Алгебраические интегралы движения в задаче многих тел.

Малых М.Д.

Материалы к курсу «Аналитическая теория дифференциальных уравнений», ФФ МГУ, 2002-2012 гг.
Версия от 25 сентября 2016 г.

Содержание

Введение

В конце XIX века, когда были отточены методы, позволяющие проинтегрировать гамильтоновы системы, если известны интегралы движения, казалось, что дело стоит за малым — нужно угадать еще нескольких интегралов движения. Задача N тел обладает 10 классическими интегралами движения, найденными еще Ньютоном: это три компоненты полного импульса системы

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{x}_i, \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{y}_i, \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{z}_i,$$

три компоненты полного момента импульса системы

$$\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{y}_i z_i - \dot{z}_i y_i),\ \sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{x}_i z_i - \dot{z}_i x_i),\ \sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{y}_i x_i - \dot{x}_i y_i),$$

три интеграла центра масс

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{x}_i t - \sum_{i=1}^{N} m_i x_i,\ \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{y}_i t - \sum_{i=1}^{N} m_i y_i,\ \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{z}_i t - \sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

и полная механическая энергия

$$H = T + U$$

Найти новые интегралы за два последовавших века не удалось.

При этом само существование интегралов движения не вызывало сомнения. И в самом деле, по теореме Коши в окрестности $t = t_0,\ q = q_0,\ p = p_0, \ldots$ существует решение вида

$$q = \varphi(t, t_0, q_0, p_0), \quad p = \psi(t, t_0, q_0, p_0)$$

а значит,

$$\varphi(t_0, t, q, p) = q_0, \quad \psi(t_0, t, q, p) = p_0$$

— искомые интегралы. Поэтому, в классе аналитических функций существует $6N$ независимых интегралов движения.

Хотя теорема Коши дает для этих интегралов выражение в виде сходящегося ряда, для интегрирования в конечном виде эти интегралы не применимы. Классические интегралы движения являются рациональными функциями t, p и алгебраическими q и именно по этому ими можно пользоваться для решения в конечном виде. По ходу дела в методе Якоби интегрирования уравнений требуется выражать из уравнения $\varphi(p, q, t) = c$

импульсы и интегрировать получившиеся функции. Все это без труда можно проделать с интегралом движения, зависящим от p, q, t алгебраически. Но существование еще одного 11 алгебраического интеграла движения вовсе не очевидно.

Важнейшей вехой в решении задачи N тел явилась работа Генриха Брунс[1], занявшийся этой проблемой по совету Вейерштрасса еще в 1870-х годах, в которой был указан способ отыскания всех алгебраических интегралов. Строго и изящно метод Брунса был освещен в работе Пенлеве[2], но для упрощения мы не станем вслед за Пенлеве отказываться от условия алгебраичности зависимости интеграла от q.[3]

1. Общий случай гамильтоновой системы с алгебраическим гамильтонианом

Поскольку задача N тел — гамильтонова с гамильтонианом, зависящим от q алгебраически, рассмотрим сначала в общем виде произвольную гамильтонову систему

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{1}$$

Будем считать, что производные

$$\frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial q}$$

являются рациональными функциями p, q, t, H с одним и тем же знаменателем

$$Z_1(p, q, t, H) = H_1^{N-1} + a_1(p, q, t)H^{N-2} + \cdots + a_{N-1}(p, q, t)$$

Этому условию можно удовлетворить, предполагая, что гамильтониан $H(p, q, t)$ является алгебраической функцией своих аргументов, то есть яв-

[1] *Bruns H.* Über die Integrale der Vielkörper-Problems // Acta math. Bd. 11 (1887), p. 25-96.

[2] *Painlevé P.* Mémore sur les intégrales du problème des n corps (1898)// Œuvres. T. 3. Paris, 1975 P. 666-699

[3] Другая модификация доказательства теоремы Брунса в случае трех тел приведена в Механике Э. Уиттикера.

ляется корнем неприводимого уравнения

$$h^N + a_1(p,q,t)h^{N-1} + \cdots + a_N(p,q,t) = 0, \tag{2}$$

где коэффициенты $a_n(p,q,t)$ — рациональные функции. Дифференцируя это равенство последовательно по времени, координатам и импульсам, видим, что указанные производные являются рациональными функциями p, q, t, H_1 с одним и тем же знаменателем

$$Z_1(p,q,t,H) = H^{N-1} + a_1(p,q,t)H^{N-2} + \cdots + a_{N-1}(p,q,t)$$

Под интегралом движения $\varphi_1(p,q,t)$ будем понимать любую функцию, которая на решении (1) является постоянной, то есть

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + (H,\varphi_1) = 0$$

Рассмотрим алгебраический интеграл, то есть такой, который является корнем неприводимого уравнения

$$\varphi^M + b_1(p,q,t,H)\varphi^{M-1} + \cdots + b_M(p,q,t,H) = 0, \tag{3}$$

где коэффициенты $a_n(p,q,t,H)$ — рациональные функции.

Дифференцируя это равенство последовательно по времени, координатам и импульсам, видим, что и

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t},\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial q},\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial q}$$

являются рациональными функциями p, q, t, H, φ_1 с одним и тем же знаменателем

$$Z_2(p,q,t,H) = \varphi_1^{M-1} + b_1(p,q,t,H)\varphi_1^{M-2} + \cdots + b_{M-1}(p,q,t,H).$$

Поэтому равенство

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + (H,\varphi_1) = 0$$

может быть переписано после замены частных производных φ_1 и H и умножения на Z_1 и Z_2 в виде

$$G(\varphi_1,H,p,q,t) \equiv \varphi_1^R + c_1(p,q,t,H)\varphi_1^{R-1} + \cdots + c_R(p,q,t,H) = 0,$$

В силу неприводимости (3) ему удовлетворяют все корни φ_k уравнения (3):

$$G(\varphi_k, H, p, q, t) = 0$$

Но это означает, что

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + (H, \varphi_k) = 0$$

то есть все корни уравнения (3) являются интегралами, а значит, коэффициенты $b_m(p, q, t, H)$ как симметричные функции корней тоже являются интегралами. Доказанное можно сформулировать так.

Теорема 1 (Кенигсбергер)**.** Если производные гамильтониана H системы (1) являются рациональными функциями от p, q, t, H, то любой алгебраический интеграл может быть представлен как алгебраическая комбинация интегралов, зависящих от p, q, t, H рационально.

2. Случай, когда гамильтониан H не зависит явно от t

Раз интеграл является рациональной функцией t, его можно предстать в виде

$$\varphi = \prod \psi_0(p, q)(t - \psi_n(p, q))^{\mu_n},$$

где ψ_n — алагебарические функции p, q, а μ_n — целые числа. Поскльку $\log \varphi$ — тоже интеграл движения,

$$\frac{d\psi_0}{dt} + \sum \frac{\mu_n}{t - \psi_n(p, q)} \left(1 - \frac{d\psi_n}{dt}\right) = 0$$

и даже

$$(H, \psi_0) + \sum \frac{\mu_n}{t - \psi_n(p, q)} (1 - (H, \psi_n)) = 0$$

Поскольку (H, ψ_n) не зависят от t, а выписанное равенство выполняется тождественно при всех t, p, q, должно выполнятся равенства

$$(H, \psi_0) = 0, \quad (H, \psi_n) = 1$$

тождественно по p, q. Это означает, что в выражении

$$\varphi = \prod \psi_0(p, q)(t - \psi_n(p, q))^{\mu_n},$$

функция $\psi_0(p,q)$ и все фукнции $t-\psi_n(p,q)$ являются алгебраическими интегралами движения.

Если как для задачи N тел известен один интеграл движения, зависящий от t линейно:

$$t+\psi(p,q),$$

то выражение

$$\psi(p(t),q(t))-\psi_n(p(t),q(t))=c-t-(c_n-t)=c-c_n$$

постоянно на любой траектории, то есть тоже является интегралом движения. Поэтому алгебраический интеграл движения $\varphi(p,q,t,H)$, является алгебраической комбинацией алгебраического интеграла $\psi_0(p,q)$, интегралов $\psi(p,q)-\psi_n(p,q)$ и классического интеграла $t-\psi(p,q)$.

Теорема 2. Если гамильтониан системы не зависит от t явно, то в условиях предыдущей теоремы любой алгебраический интеграл движения является алгебраической комбинацией алгебраических интегралов, не содержащих явно времени, и одного алгебраического интеграла вида $t+\psi(p,q,H)$.

Эта теорема позволяет, во-первых, из трех интегралов центра масс образовать два интеграла, не зависящих от t:

$$\sum_{i=1}^N m_i\dot{x}_i\sum_{i=1}^N m_iy_i-\sum_{i=1}^N m_i\dot{y}_i\sum_{i=1}^N m_ix_i,\quad \sum_{i=1}^N m_i\dot{x}_i\sum_{i=1}^N m_iz_i-\sum_{i=1}^N m_i\dot{z}_i\sum_{i=1}^N m_ix_i,$$

а, во-вторых, в дальнейшем ограничиться нахождением интегралов вида $\varphi(p,q,H)$, зависящих от своих аргументов рационально.

3. Случай, когда $H=T(p)+U(q)$

Допустим теперь, что гамильтониан системы $H=T(p)+U(q)$, где кинетическая энергия T является квадратичной формой относительно p, а потенциальная является алгебраической функцией q, ветвь которой выделена однозначно в некоторой области изменения q.

По предыдущему любой алгебраический интеграл, не зависящий от времени явно, может быть представлен как алгебраическая комбинация интегралов вида

$$\varphi(p,q,H) = \frac{P(p,q,H)}{Q(p,q,H)}$$

где P, Q — целые рациональные функции своих аргументов.

Если N — степень неприводимого уравнения для гамильтониана, то степени H^{N+r} можно выразить через $H, \ldots H^{N-1}$, поэтому можно считать, что

$$P = \sum_{n=0}^{N-1} P'_n(p,q)H^n, \quad Q = \sum_{n=0}^{N-1} Q'_n(p,q)H^n$$

где P'_n и Q'_n — целые рациональные функции p, q. Подставим $H = T(p) + U(q)$ в эти выражения и раскроем скобки, тогда получим

$$P = \sum_{n=0}^{N-1} P''_n(p,q)U^n, \quad Q = \sum_{n=0}^{N-1} Q''_n(p,q)U^n$$

Представим теперь P и Q как полиномы от p в виде суммы однородных по p членов

$$P = P_\nu(p,q) + \ldots P_0(p,q), \quad Q = Q_\mu(p,q) + \ldots Q_0(p,q)$$

где P_k, Q_k означает однородные по p члены порядка k, зависящие от q алгебраически.

Допустим, что $P_\nu(p,q)$ не является рациональной функцией q, тогда $P_\nu(p,q)$ содержит член вида

$$F_1(p,q)U^R$$

где $F_1(p,q)$ — целая рациональная функция, степени ν по p. Этот член мог произойти только из выражения вида

$$F_2(p,q)(T+U)^S, \quad S \geq R,$$

где F_2 — целая рациональная функция, степени $\nu - 2(S-R)$ по p. Но из этого выражения получился бы и член вида

$$F_2(p,q)T^S,$$

который является целой рациональной функцией p, q, степени $\nu + 2R$, против предположения о том, что степень P_ν максимальна. Поэтому *старшие члены P_ν и Q_μ зависят от q рационально.* Умножая числитель и знаменатель интеграла φ на общий знаменатель P_ν и Q_μ, можно добиться того, чтобы эти функции были целыми рациональными и по q

4. Случай $T = \sum \lambda_i p_i^2$

Допустим теперь, что $T = \sum \lambda_i p_i^2$, тогда гамильтониан не меняется при замене при заменен t — на $-t$ и p — на $-p$, поэтому выражение $\varphi(-p, q)$ будет решением уравнения

$$(H, \varphi) = 0$$

если таково $\varphi(p, q)$. В частности, если обозначить члены четного порядка в P как P', а нечетного — как P'', то помимо интеграла

$$\varphi(p, q) = \frac{P' + P''}{Q' + Q''}$$

задача будет допускать и другой

$$\varphi(-p, q) = \frac{P' - P''}{Q' - Q''}$$

Поэтому исходный интеграл является алгебраической комбинацией двух других

$$\frac{P' + P''}{Q' + Q''} + \frac{P' - P''}{Q' - Q''}, \quad \frac{P' + P''}{Q' + Q''}\frac{P' - P''}{Q' - Q''}$$

которые имеют то же вид, но все однородные функции в них имеют четный порядок. Поэтому *любой алгебраический интеграл, не содержащий явно время, может быть представлен как алгебраическая комбинация интегралов вида*

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_\nu(p, q) + P_{\nu-2}(p, q, U) + \dots}{Q_\mu(p, q) + Q_{\mu-2}(p, q, U) + \dots}$$

где P_k и Q_k — целые рациональные функции p, q, U, однородные по p степени k, а старшие члены $P_\nu(p, q)$ и $Q_\mu(p, q)$ — целые рациональные функции p, q.

Докажем, что *для всякого интеграла вида*

$$\varphi(p,q) = \frac{P(p,q)}{Q(p,q)}$$

где P *и* Q *— целые рациональные функции* p, *найдется такая функция* Ω, *линейная по* p, *что*

$$(P,H) = \Omega P, \quad (Q,H) = -\Omega Q$$

Для чего возьмем указанную ветвь алгебраической функции $U(q)$ и рассмотрим числитель интеграла P как целую рациональную функцию p, коэффициенты которой зависят от q. Этот полином можно представить в виде произведения некоторого числа неразложимых полиномов $P = P^{(1)} \dots P^{(R)}$. При уравнение

$$(H, P^{(r)}) = 0$$

выполняется в точке (p,q) всякий раз, как $P^{(r)}(p,q) = 0$.

В самом деле, возьмем корень (p_0, q_0) уравнения $P^{(r)}(p,q) = 0$ за начальные данные в задаче (1) и в окрестности начальных данных получим решение $(p(t), q(t))$. Раз P/Q — интеграл и в начальный момент времени он равен нулю, то

$$P^{(r)}(p(t), q(t)) = 0$$

Дифференцируя его по t и полагая $t = 0$, получим $(H, P^{(r)})|_{(p_0,q_0)} = 0$, что и требовалось.

Поскольку степень $(H, P^{(r)})$ по p выше, чем у $P^{(r)}$, на единицу, существует такая функция $\Omega_r(p,q)$, линейная по p, что

$$(H, P^{(r)}) = \Omega_r P^{(r)}$$

Поэтому, существует такая линейная по p функция $\Omega(p,q)$, что

$$(H, P) = \Omega P$$

и, аналогично, существует такая линейная по p функция $\Omega'(p,q)$, что

$$(H, Q) = \Omega' Q$$

В силу соотношения

$$0=(H,P/Q)=Q^{-2}\{Q(H,P)-P(H,Q)\}=Q^{-2}(\Omega-\Omega')PQ$$

имеем $\Omega'=\Omega$.[4]

Покажем теперь, что, *поделив числитель и знаменатель на некоторую рациональную функцию $\mu(q)$, можно достигнуть того, что Ω обратиться в нуль тождественно, то есть числитель и знаменатель интеграла сими станут интегралами движения.*

В самом деле, выражение (H,P) содержит член (T,P_ν) порядка $\nu+1$ по p, а все прочие члены имеют меньший порядок, поэтому

$$(T,P_\nu)=\Omega P_\nu,$$

то есть Ω выражается через P_ν:

$$\Omega=\frac{(T,P_\nu)}{P_\nu}.$$

Отсюда сразу видно, что $\Omega(p,q)$ имеет вид

$$\Omega=\sum\omega_k(q)p_k,$$

где $\omega_k(q)$ — рациональные функции q.

Выражение $P_\nu(p,q)$ является целой рациональной функцией p,q, поэтому его можно представить в виде произведения неразложимых более множителей

$$P_\nu=\mu(q)G_1(p,q)\dots G_\lambda(p,q),$$

[4]Следует отметить, что из того, что P и Q — целые рациональные функции p,q, не следует, что Ω — целая рациональная функция q. Например, при рационной $U(q)=V(q)/W(q)$ энергия является интегралом движения

$$H=\frac{T(p)W(q)+V(q)}{W(q)}$$

и

$$(H,T(p)W(q)+V(q))=(H,HW)=(H,W)H=\frac{(H,W)}{W}(T(p)W(q)+V(q))$$

то есть

$$\Omega=\frac{(H,W)}{W(q)}.$$

При этом в качестве функции $Q^{(1)}(p,q)$ взять $W(q)$ нельзя, поскольку при доказательстве предполагается, что задача Коши с начальными условиями на $Q^{(1)}(p_0,q_0)=0$ разрешима.

где $G_i(p,q)$ — целые рациональные функции p,q, которые не могут быть представлены в виде произведения двух целых рациональных функций.

Взяв решение

$$\dot{p}=0, \quad \dot{q}=\frac{\partial T}{\partial p}, \tag{4}$$

проходящее черз нуль (p_0,q_0) уравнения $G_i(p,q)=0$, не удовлетворяющий уравнению $\omega_k(q_0)=\infty$, видим, что на всем решении $P_\nu(p(t),q(t))\equiv 0$. Это возможно, если $G_i(p(t),q(t))\equiv 0$ и, стало быть, верно

$$\frac{dG_i}{dt}|_{t=t_0}=(T,G_i)|_{p_0,q_0}=0$$

Переходя от переменных $q_1,q_2,\dots$ к переменным $q_1,\xi_2,\dots$, полагая для краткости

$$\frac{\partial T}{\partial p_i}=T_i$$

и

$$\xi_i=q_iT_1-T_iq_1,$$

получим

$$G_k=T_1^{(-r)}\Pi_k(p,q_1,\xi_2,\dots),$$

где Π — целая функция своих аргументов. Поскольку p_i,ξ_i, как и линейная комбинация импульсов T_1 являются интегралами движения, то

$$(T,G_k)=T_1^{(1-r)}\frac{\partial \Pi_k}{\partial q_1}$$

Значит, выражение

$$\frac{\partial \Pi_k}{\partial q_1}$$

равно нулю как только $G_k(p,q)=0$, то есть как только $\Pi_k(p,q_1,x_2,\dots)=0$. Это совместимо с неприводимостью $G_k=0$ лишь тогда, когда

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\equiv 0$$

Поэтому $P_\nu = \mu(q)\Pi(p, \xi_2, \dots)$, значит, поделив числитель и знаменатель φ добьемся того, что P_ν станет равен $\Pi(p, \xi_2, \dots)$ и, стало быть, $(T, P_\nu) = 0$.[5]

Из соотношения $(T, P_\nu) = 0$ следует, что Ω равна нулю тождественно, откуда, в свою очередь, что числитель и знаменатель φ сами являются интегралами движения.

Теорема 3. Если гамильтониан имеет вид $H = T(p) + U(q)$, где кинетическая энергия T является квадратичной формой относительно p, а потенциальная является алгебраической функцией q, ветвь которой выделена однозначно в некоторой области изменения q, то любой алгебраический интеграл, не содержащий явно время, может быть представлен как алгебраическая комбинация интегралов вида

$$\varphi = P_\nu(p, q) + P_{\nu-2}(p, q, U) + \dots + P_0(q, U)$$

где P_k — рациональные функции p, q, U, целые однородные по p степени k.

Заметим теперь, что в уравнении $(H, \varphi) = 0$ члены порядка $k-1$ имеют вид

$$(U, P_k) + (T, P_{k-2})$$

поэтому уравнение $(H, \varphi) = 0$ распадается на

$$(T, P_\nu) = 0,\ (U, P_\nu) + (T, P_{\nu-2}) = 0, \dots,\ (U, P_2) + (T, P_0) = 0 \tag{5}$$

Запишем эти равенства в переменных $p, q_1, \xi_2, \dots$, полагая $P_k = \Pi_k(p, q_1, \xi_2, \dots)$. Поскольку

$$\frac{\partial P_k}{\partial q_1} = \frac{\partial \Pi_k}{\partial q_1} - \sum_{i>1} \frac{\partial \Pi_k}{\partial \xi_i}\frac{\partial T}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial P_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \Pi_k}{\partial \xi_i}\frac{\partial T}{\partial p_1},$$

[5] Аналогичные размышления не применимы к множителю $\mu(q)$, поскольку уравнение $\mu(q) = 0$ может и не иметь корней, для которых ω_k конечны. Поясним это примером. Пусть $U(q) = V(q)/W(q)$ — рациональная функция. Тогда энергия как интеграл движения

$$H = \frac{T(p)W(q) + V(q)}{W(q)}$$

Здесь роль G_1 играет $T(p)$, а роль μ — функция $W(q)$. Понятно, что $(T, T) = 0$, но не (T, TW). Поэтому к утверждению Пенлеве о том, всякий полином $P(p, q)$, удовлетворяющий условию $(T, P) = \Omega P$, является интегралом (4), требуется указанное в тексте дополнение.

верно
$$(T,P_k)=\frac{\partial T}{\partial p_1}\frac{\partial \Pi_k}{\partial q_1}.$$
В частности, первое уравнение из (5) имеет вид
$$\frac{\partial \Pi_\nu}{\partial q_1}=0,$$
его общее решение
$$P_\nu=\Pi_\nu(p,\xi_2,\dots),$$
что уже было отмечено выше.

Труднее записать компактно второе уравнение. Поскольку
$$\frac{\partial T_i}{\partial p_j}=\frac{\partial T}{\partial p_i\partial p_j}=2\lambda_i\delta_{ij}$$
то верно
$$\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j}=2(q_i\lambda_1\delta_{1j}-q_1\lambda_i\delta_{ij}),$$
откуда
$$\frac{\partial P_k}{\partial p_j}=\frac{\partial \Pi_k}{\partial p_j}-2\lambda_j q_1\frac{\partial \Pi_k}{\partial \xi_j}+2\lambda_1\delta_{1j}\sum_{i>1}q_i\frac{\partial \Pi_k}{\partial \xi_i}$$
В силу
$$q_i=T_1^{-1}(\xi_i+T_iq_1)$$
последнее равенство можно записать так
$$\frac{\partial P_k}{\partial p_j}=\frac{\partial \Pi_k}{\partial p_j}-2\lambda_j q_1\frac{\partial \Pi_k}{\partial \xi_j}+\frac{2\lambda_1}{T_1}\delta_{1j}\sum_{i>1}(\xi_i+T_iq_1)\frac{\partial \Pi_k}{\partial \xi_i}=$$
$$=T_1(\mathfrak{L}_j[P_k]+q_1\mathfrak{M}_j[P_k]),$$
где $\mathfrak{L}_j,\mathfrak{M}_j$ — линейные дифференциальные операторы, коэффициенты которых не зависят от q_1:
$$\mathfrak{L}_j=\frac{1}{T_1}\frac{\partial}{\partial p_j}+\frac{2\lambda_1}{T_1^2}\delta_{1j}\sum_{i>1}\xi_i\frac{\partial}{\partial \xi_i},$$
$$\mathfrak{M}_j=-\frac{2\lambda_j}{T_1}\frac{\partial}{\partial \xi_j}+\frac{2\lambda_1}{T_1^2}\delta_{1j}\sum_{i>1}T_i\frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

При таких обозначениях, второе уравнение из (5) можно записать так

$$\sum \frac{\partial U}{\partial q_i}\mathfrak{L}_i[\Pi_\nu] + \sum q_1 \frac{\partial U}{\partial q_i}\mathfrak{M}_i[\Pi_\nu] = -\frac{\partial \Pi_{\nu-2}}{\partial q_1}$$

Вспомним теперь, что

$$\Pi_{\nu-2} = P_{\nu-2}\left(p_1, \dots p_n, q_1, \frac{\xi_2 + 2\lambda_2 p_2 q_1}{2\lambda_1 p_1}, \dots, \frac{\xi_n + 2\lambda_n p_n q_1}{2\lambda_1 p_1}\right),$$

где $P_{\nu-2}$ — целая однородная функция p и алгебарическая функция q, поэтому $\Pi_{\nu-2}$ — алгебраическая функция p, q_1, ξ. Для дальнейшего важно отметить еще, что выражение этой функции не может иметь в знаменателе несократимый множитель, содеражщий p_i не в комбинации $p_i q_1$. Поэтому *выражение*

$$\sum \mathfrak{L}_i[\Pi_\nu] \int \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_1 + \sum \mathfrak{M}_i[\Pi_\nu] \int \frac{\partial U}{\partial q_i} q_1 dq_1, \tag{6}$$

где интегралы берутся при фиксированных $p, \xi_2, \dots,$ совпадает с $\Pi_{\nu-2}$ с точностью до некоторой не обязательно алгебарической функции $\Phi(p, \xi)$, и стало быть, *должно быть алгебраической функцией* q *и ее выражение не может иметь в знаменателе несократимый множитель, содеражщий* p_i *не в комбинации* $p_i q_1$.

5. Задача многих тел

Обратимся теперь к случаю, когда q — декартовы координаты N тел, то есть $x_1, y_1, z_1, \dots z_N$, взаимодействующих по закону всемирного тяготения

$$U = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad r_{ij}^2 = \mathrm{S}(x_i - x_j)^2$$

где S означает суммирование по трем координатам одной и той же точки. Роль переменных $\xi_2, \dots$ играют моменты импульса

$$f_i = x_i \dot{x}_1 - x_1 \dot{x}_i, \; g_i = y_i \dot{x}_1 - x_1 \dot{y}_i, \; h_i = z_i \dot{x}_1 - x_1 \dot{z}_i$$

Запишем $\frac{\partial U}{\partial q_i}$ как функции p, x_1, f, g, h. Полагая для краткости

$$x_{ij} = x_i - x_j, \dots$$

получим

$$x_{ij}\dot{x}_1 = x_i\dot{x}_1 - x_j\dot{x}_1 = f_{ij} + x_1\dot{x}_{ij}$$

и

$$r_{ij}^2\dot{x}_1^2 = \mathrm{S}(f_{ij} + x_1\dot{x}_{ij})^2,$$

то есть

$$r_{ij} = \frac{\sqrt{(\mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}^2)x_1^2 + 2(\mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}f_{ij})x_1 + \mathrm{S}\,f_{ij}^2}}{\dot{x}_1},$$

Поэтому

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \sum_{j\neq i} m_i m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij^3}} = -\sum_{j\neq i} m_i m_j \frac{\dot{x}_1^3(f_{ij} + x_1(\dot{x}_{ij}))}{\left((\mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}^2)x_1^2 + 2(\mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}f_{ij})x_1 + \mathrm{S}\,f_{ij}^2\right)^{3/2}}$$

Значит, выражение (6) имеет вид

$$\mathrm{S}\sum_{j\neq i}\mathfrak{L}_i[\Pi_\nu]\int \frac{m_i m_j\dot{x}_1^3(f_{ij} + x_1(\dot{x}_{ij}))}{\left((\mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}^2)x_1^2 + 2(\mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}f_{ij})x_1 + \mathrm{S}\,f_{ij}^2\right)^{3/2}}dx_1 +$$
$$+\mathfrak{M}_i[\Pi_\nu]\int \frac{m_i m_j\dot{x}_1^3(f_{ij} + x_1(\dot{x}_{ij}))}{\left((\mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}^2)x_1^2 + 2(\mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}f_{ij})x_1 + \mathrm{S}\,f_{ij}^2\right)^{3/2}}x_1 dx_1$$

Воспользуемся теперь теоремой

Теорема 4. Интеграл

$$\int dx \frac{Rx^2 + Px + Q}{(ax^2 + 2bx + c)^{3/2}}$$

является алгебраической функцией лишь тогда, когда $R = 0$, и в этом случае этот интеграл равен

$$\frac{Vx + W}{(ax^2 + 2bx + c)^{1/2}},$$

где

$$\mathfrak{D} = b^2 - ac,\ \mathfrak{D}V = bP - Qa,\ \mathfrak{D}W = cP - Qb.$$

Требование отсутствие членов с x_1^2 приводит к уравнениям

$$\mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}\mathfrak{M}_i[\Pi_\nu] = 0, \quad (i, j = 1\dots N) \tag{7}$$

Рассмотрим эти уравнения как систему линейных уравнений в частных производных относительно переменных f_i, g_i, h_i при произвольных, но фиксированных значениях $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ и найдем ее общее решение, отметив, что в этой системе много линейно зависимых уравнений. Поскольку моменты импульсов системы

$$A = \sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{x}_i y_i - \dot{y}_i x_i),\ B,\ C$$

и два интеграла центра масс

$$D = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{y}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{x}_i \sum_{i=1}^{N} m_i y_i,\ E$$

неизбежно удовлетворяют этой системе, мы знаем пять функционально независимых решений (7).

Если $N = 3$, то в системе (7) имеется три независимых уравнения, а независимых переменных f_i, g_i, h_i — восемь, поэтому любой интеграл системы (7) выражается черз $8 - 3 = 5$ уже известных интегралов, то есть

$$\Pi_\nu = \chi(A, \ldots, E, \dot{x}_1, \ldots, \dot{z}_3).$$

Если же $N > 3$, то прямого подсчета числа линейно независимых уравнений можно избежать так. Через пять известных интегралов можно выразить переменные

$$g_1, h_1, f_2, g_2, h_2$$

и поэтому общее решение (7) можно искать в виде

$$\Pi_\nu = \chi(A, \ldots, E, f_3, \ldots, g_N, \dot{x}_1, \ldots, \dot{z}_N).$$

Подставить это выражения в (6) — все равно, что положить в (7) производные по g_1, h_1, f_2, g_2, h_2 равными нулю. Вспомним теперь, что при $i > 1$ верно

$$\mathfrak{M}_i[\chi] = -\frac{2\lambda_i}{T_1}\frac{\partial \chi}{\partial \xi_i},$$

поэтому из (7) следует

$$\mathrm{S}(\dot{x}_i - \dot{x}_j)\frac{\partial\chi}{\partial f_i} = 0, \quad (i = 3, \ldots, N,\ j = 1\ldots N)$$

Отсюда видно, что χ как функция f_i, g_i, h_i удовлетворяет трем независимым уравнениям

$$\dot{x}_{ij}\frac{\partial\chi}{\partial f_i} + \dot{y}_{ij}\frac{\partial\chi}{\partial g_i} + \dot{z}_{ij}\frac{\partial\chi}{\partial h_i} = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots,\ j \neq i)$$

что возможно лишь тогда, когда χ от них вообще не зависит. Таким образом, получается, что

$$\Pi_\nu = \chi(A, \ldots, E, \dot{x}_1, \ldots, \dot{z}_N)$$

Воспользуемся теперь тем, что интегралы $A, \ldots E$ — однородные первой степени по p, поэтому для них порознь выполняются соотношения

$$(T, A) = 0,\ (U, A) = 0, \ldots$$

Значит, для (U, P_ν) можно записать весьма простое выражение

$$\begin{aligned}(U, P_\nu) &= -\sum_{i=1}^{N} \mathrm{S}\,\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial\chi}{m_i\partial\dot{x}_i}\\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i} \mathrm{S}\,\frac{m_j\dot{x}_1^3(f_{ij} + x_1(\dot{x}_{ij}))}{\left((\mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}^2)x_1^2 + 2(\mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}f_{ij})x_1 + \mathrm{S}\,f_{ij}^2\right)^{3/2}}\frac{\partial\chi}{\partial\dot{x}_i}\end{aligned}$$

Интеграл от этого выражения по x_1 будет алгебраической функцией p, q, рациональной по p:

$$\int (U, P_\nu)dx_1 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i} \mathrm{S}\,\frac{m_j\dot{x}_1^3(W_{ij} + x_1 V_{ij})}{\mathfrak{D}_{ij}\left((\mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}^2)x_1^2 + 2(\mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}f_{ij})x_1 + \mathrm{S}\,f_{ij}^2\right)^{1/2}}\frac{\partial\chi}{\partial\dot{x}_i}$$

где

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{ij} &= (\mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}f_{ij})^2 - \mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}^2\,\mathrm{S}\,f_{ij}^2,\\ V_{ij} &= \dot{x}_{ij}(\mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}f_{ij}) - f_{ij}(\mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}^2),\\ W_{ij} &= \dot{x}_{ij}\,\mathrm{S}\,f_{ij}^2 - f_{ij}(\mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}f_{ij})\end{aligned}$$

Учитывая, что члены (ij) и (ji) можно сгруппировать и с прочими они сократиться не могут, нужно чтобы

$$\mathrm{S}(m_j\frac{\partial\chi}{\partial\dot{x}_i} - m_i\frac{\partial\chi}{\partial\dot{x}_j})(V_{ij}x_1 + W_{ij})$$

делилось на $\mathfrak{D}_{ij}$. Поскольку $\mathfrak{D}_{ij}$ и V_{ij}, W_{ij} не зависят от x_1, это возможно только тогда, когда выражения

$$\mathrm{S}(m_j\frac{\partial\chi}{\partial\dot{x}_i} - m_i\frac{\partial\chi}{\partial\dot{x}_j})V_{ij}$$

и

$$\mathrm{S}(m_j\frac{\partial\chi}{\partial\dot{x}_i} - m_i\frac{\partial\chi}{\partial\dot{x}_j})W_{ij}$$

то есть

$$\mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}(m_j\frac{\partial\chi}{\partial\dot{x}_i} - m_i\frac{\partial\chi}{\partial\dot{x}_j})(\mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}f_{ij}) - \mathrm{S}\,f_{ij}(m_j\frac{\partial\chi}{\partial\dot{x}_i} - m_i\frac{\partial\chi}{\partial\dot{x}_j})(\mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}^2)) \tag{8}$$

и

$$\mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}(m_j\frac{\partial\chi}{\partial\dot{x}_i} - m_i\frac{\partial\chi}{\partial\dot{x}_j})(\mathrm{S}\,f_{ij}^2) - \mathrm{S}\,f_{ij}(m_j\frac{\partial\chi}{\partial\dot{x}_i} - m_i\frac{\partial\chi}{\partial\dot{x}_j})(\mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}f_{ij})) \tag{9}$$

делятся на

$$D_{ij} = (\mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}f_{ij})^2 - \mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}^2\,\mathrm{S}\,f_{ij}^2$$

порознь.

При любых фиксированных i и j значения $\mathrm{S}\,f_{ij}^2$ и $\mathrm{S}\,\dot{x}_{ij}f_{ij}$ можно взять какими угодно, не изменив значения $A, \ldots, E$, а, следовательно, и $\chi(A, \ldots, E, \dot{x}_1, \ldots, \dot{z}_N)$. Поэтому выражение (9) делится на $\mathfrak{D}_{ij}$ лишь тогда, когда

$$\frac{m_j\frac{\partial\chi}{\partial\dot{x}_i} - m_i\frac{\partial\chi}{\partial\dot{x}_j}}{\dot{x}_{ij}} = \frac{m_j\frac{\partial\chi}{\partial\dot{y}_i} - m_i\frac{\partial\chi}{\partial\dot{y}_j}}{\dot{y}_{ij}} = \frac{m_j\frac{\partial\chi}{\partial\dot{z}_i} - m_i\frac{\partial\chi}{\partial\dot{z}_j}}{\dot{z}_{ij}} \tag{10}$$

При этом выражение (8) тождественно равно нулю.

Система (10) имеет четыре решения

$$A' = \sum m_i\dot{x}_i,\ B',\ C',\ T = \sum \mathrm{S}\,m_i\frac{\dot{x}_i^2}{2}$$

При этом уравнение

$$\frac{m_j\frac{\partial\chi}{\partial\dot{x}_i}-m_i\frac{\partial\chi}{\partial\dot{x}_j}}{\dot{x}_{ij}}=\frac{m_j\frac{\partial\chi}{\partial\dot{y}_i}-m_i\frac{\partial\chi}{\partial\dot{y}_j}}{\dot{y}_{ij}}$$

как уравнение на четыре неизвестные имеет только три независимых решения A', B', C', поэтому общее решение не может содержать $\dot{x}_i$ иначе как в этих комбинациях. Поэтому не существует пятого независимого решения. Значит, старший по p член рассматриваемого интеграла φ имеет вид

$$P_\nu = \chi(A, \ldots, C', T)$$

Но тогда выражение

$$\varphi - \chi(A, \ldots, C', T+U) = P'_{\nu-2} + \ldots$$

является интегралом движения, степень которого меньше чем у исходного на две единицы. Применяя к нему те же соображения и помня о том, что интеграл движения должен содержать p, представим исходной интеграл как комбинацию девяти классических интегралов.

В союзе с теоремой 2 доказанное можно сформулировать так:

Теорема 5 (Брунс Г., 1887 г.)**.** Всякий интеграл движения задачи многих тел, который зависит от p, q и t алгебраически, является алгебраической комбинацией 10 классических интегралов.

Теорему Брунса затем обобщили в двух направлениях. Во-первых, было показано, что и две другие важнейшие динамические системы — волчок и система вихрей Гельмгольца — тоже имеют лишь уже известные алгебраические интегралы.[6] Во-вторых, условия на интеграл движения задачи N тел можно ослабить: Пенлеве удалось отказаться от требования алгебраичности зависимости от q, Пуанкаре пытался доказать, что не существует нового однозначного интеграла (все классические интегралы, кроме интеграла энергии, являются однозначными функциями). Это последнее утвер-

[6] См. Полубаринова-Кочина П.Я. Об однозначных решениях и алгебраических интегралах задачи о вращении твердого тела около неподвижной точки // Сборник памяти С.В. Ковалевской С. 157-186

ждение, по всей видимости, до сих пор строго не доказано в столь общей формулировке.[7]

Теорема Брунса указывает на то, что классическая трактовка интегрирования механической системы не применима к основной задаче и, стало быть, нужно искать другие пути, чем не преминул заняться Вейерштрасс.

6. Система Калоджеро

Поскольку результат Брунса касается фиксированного закона взаимодействия, с конца 19 века делаются попытки найти более общие признаки интегрируемости и неинтегрируемости. Ф. Калоджеро (Calogero F.) в 1971 г. обнаружил, однако, одну вполне интригуемую систему, о которую разбились многие из высказанных гипотез.[8]

Рассмотрим N материальных точек единичной массы на прямой, отталкивающихся друг от друга с силой, обратно пропорциональной минус третьей степени расстояния. Пусть q_n — положение n-ой точки, тогда

$$\ddot{q}_n = -\frac{\partial U}{\partial q_n}, \tag{11}$$

где

$$U = \sum_{i<j} V(q_i - q_j), \quad V(x) = \frac{b}{|x|^2}.$$

Эта система является гамильтоновой с

$$H = \frac{1}{2}\sum p_n^2 + U(q)$$

[7] Приведем для справки комментарий В.М. Алексеева (1971 г.) к соответствующему пассажу Пуанкаре: <Несуществование однозначного аналитического интеграла в задаче трех тел до сих пор не доказано *с полной строгостью*. ... Первое аккуратное доказательство неинтегрируемости гамильтоновой системы *достаточно общего вида* принадлежит Зигелю (русск. перев.: Математика, 5, вып. 2, 1961, 129-155). Интересно отметить, что неаналические интегралы в рассматриваемых задачах возможны; их существование вытекает из одной теоремы Колмогорова (см. Колмогоров А.Н. //ДАН, 1954, 48, № 4, 527-530; Арнольд В.И. //УМН, 1963, 18 , №5-6). Напротив, в случае, когда число переменных более двух, *вероятнее всего*, невозможен даже непрерывный интеграл (см. Арнольд В.И. // ДАН, 1964, 154,№ 1, 9-12).> См. также В.В. Козлов Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск, 1995.

[8] Ниже мы следуем изложению, данному Ю. Мозером в ряде статей 1970-х г.; рус. пер. см. в сб. Мозер Ю. Интегрируемые системы и спектральная теория - 1. Ижевск, 1999.

и, что наиболее существенно для дальнейшего, ее можно записать в виде

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = [\mathfrak{A}, \mathfrak{L}] \tag{12}$$

где

$$\mathfrak{L}(p,q) = \operatorname{diag}(p_1, p_2, \ldots, p_N) + i\left(\frac{1-\delta_{jk}}{q_j - q_k}\right)$$

и

$$\mathfrak{A}(p,q) = i\operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_N) - i\left(\frac{1-\delta_{jk}}{(q_j - q_k)^2}\right), \quad d_k = \sum_j \frac{1-\delta_{jk}}{(q_j - q_k)^2}$$

Это представление было угадано и проверяется непосредственной подстановкой.

Уравнение (12) означает, что собственные значения матрицы $\mathfrak{L}(p(t), q(t))$ не зависят от t. В самом деле, введем матрицу $\mathfrak{U}(t)$ как решение задачи Коши

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} = \mathfrak{A}\mathfrak{U}, \quad \mathfrak{U}(0) = E$$

Сопряженная к ней матрица удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\mathfrak{U}^*}{dt} = -\mathfrak{U}^*\mathfrak{A}$$

и поэтому

$$\frac{d\mathfrak{U}\mathfrak{U}^*}{dt} = \mathfrak{A}\mathfrak{U}\mathfrak{U}^* - \mathfrak{U}\mathfrak{U}^*\mathfrak{A} = -[\mathfrak{A}, (\mathfrak{U}\mathfrak{U}^*)], \quad \mathfrak{U}\mathfrak{U}^*(0) = E$$

Единственное решение этой задачи Коши есть $\mathfrak{U}\mathfrak{U}^* = E$, поэтому $\mathfrak{U}$ — унитарная матрица. Остается заметить, что

$$\frac{d\mathfrak{U}^*\mathfrak{L}\mathfrak{U}}{dt} = -\mathfrak{U}^*\mathfrak{A}\mathfrak{L}\mathfrak{U} + \mathfrak{U}^*[\mathfrak{L}, \mathfrak{A}]\mathfrak{U} + \mathfrak{U}^*\mathfrak{L}\mathfrak{A}\mathfrak{U} = 0$$

поэтому

$$\mathfrak{U}^*(t)\mathfrak{L}|_t\mathfrak{U}(t) = \mathfrak{L}|_0$$

то есть собственные значения матриц $\mathfrak{L}(p(t), q(t))$ и $\mathfrak{L}(p(0), q(0))$ на любом решении (11) совпадают, что и тр. д.

Доказанное означает, что собственные значения матрицы $\mathfrak{L}(p,q)$ являются интегралами движения системы (11). Из них удобно образовать симметрические функции

$$F_k(p,q) = \mathrm{Sp}\,\mathfrak{L}(p,q)^k, \quad (k=1,\ldots N)$$

которые будут рациональными интегралами движения. Эти интегралы состоят в инволюции. Проще всего это усмотреть из того обстоятельства, что отталкивающиеся частицы при $t \to +\infty$ будет разлетаться (то есть $|q_j - q_k| \to \infty$). Поэтому

$$F_k = \sum p_j^k + \ldots$$

и (F_k, F_r) стремится к нулю на любой траектории. Поскольку же с другой стороны скобка Пуассона является интегралом движения, это выражение должно быть тождественно равно нулю, то есть $(F_k, F_r) = 0$. Поэтому *система Калоджеро является вполне интегрируемой и имеет N рациональных интегралов движения.*

Использованное выше описание свойств решения можно вывести из теоремы Пенлеве и закона сохранения энергии, но в данном случае можно выписать общее решение. Для этого нужно заметить, что для матрицы

$$\mathfrak{Q}(q) = \mathrm{diag}(q_1, \ldots q_N)$$

верно

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathfrak{U}^*\mathfrak{Q}\mathfrak{U} &= -\mathfrak{U}^*\mathfrak{A}\mathfrak{Q}\mathfrak{U} + \mathfrak{U}^*\,\mathrm{diag}(p_1,\ldots)\mathfrak{U} + \mathfrak{U}^*\mathfrak{Q}\mathfrak{A}\mathfrak{U} \\ &= \mathfrak{U}^*([\mathfrak{A},\mathfrak{Q}] + \mathrm{diag}(p_1,\ldots))\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^*\mathfrak{L}\mathfrak{U} = \mathfrak{L}|_{t=0}\end{aligned}$$

откуда по формуле Тейлора сразу имеем

$$\mathfrak{U}^*\mathfrak{Q}\mathfrak{U} = \mathfrak{Q}|_{t=0} + t\mathfrak{L}|_{t=0}$$

Стало быть, *общее решение $q_1 = q_1(t), \ldots$ — суть набор собственных значений матрицы*

$$\mathfrak{Q}|_{t=0} + t\mathfrak{L}|_{t=0}$$

и является алгебраическими функциями t и начальных данных.

Таким образом, система Калоджеро доставляет пример системы с рациональным гамильтонианом $H(p, q)$, которая имеет N рациональных интегралов в инволюции и общее решение которой доставляется алгебраическими, но не рациональными фикциями t и начальных данных.

И это весьма неожиданно. Во-первых, элементарных симметрий, «связанных с пространством и временем», то есть трансляций вдоль оси $\mathbb{R}^1$ и оси t, у рассматриваемой задачи меньше, чем у здачи трех тел, тем не менее она вполне интегрируема. Во-вторых, общее решение не является однозначной функцией, а интегралы являются. В-третьих, уравнения $F_k(p, q) = c_k$ не выделяют компактное многообразие в фазовом пространстве, общее решение не имеет никаких периодов.

ББК 22.311
УДК 517.9

Малых М.Д. Теорема Брунса. — М., 2006. — 24 с.