Конечно разностные модели динамических систем с квадратичной правой частью

М.М. Гамбарян, А.А. Зорин, М.Д. Малых, Л.А. Севастьянов

3 ноября 2023 г.

Аннотация

Разностные схемы, аппроксимирующие динамические системы, рассмотрены как дискретные модели тех же явлений, которые описывают непрерывные динамические системы. Рассмотрены разностные схемы, обладающие t-симметрией, — схемы средней точки и трапеций. Показано, что эти схемы двойственны друг к другу и отсюда получены теоремы о наследовании этими схемами квадратичных интегралов (теорема Купера и двойственная к ней теорема о схеме трапеций). Показано на примерах нелинейных осцилляторов, что эти схемы трудны для теоретического исследования и практического применения в виду проблемы лишних корней: эти схемы не позволяют по начальным значениям однозначно определить конечные и наоборот. Поэтому далее мы рассматриваем разностные схемы, в которых переход от слоя к слою по времени осуществляются при помощи бирациональных преобразований (преобразований Кремоны). Такие схемы называются обратимым.

Показано, что обратимые схемы, обладающие t-симметрией, нетрудно построить для любой динамической системой с квадратичной правой частью. В качестве примера такой динамической системы подробно рассмотрен волчок, закрепленный в своем центре тяжести. В этом случае дискретная теория повторяет непрерывную теорию полностью: 1.) точки приближенного решения ложатся на некоторую эллиптическую кривую, которая при $\Delta t \to 0$ переходит в интегральную кривую, 2.) разностная схема допускает представление при помощи квадратуры, 3.) приближенное решение можно представить при помощи эллиптической функции дискретного аргумента. В последнем разделе рассмотрен общий случай. Место интегральных кривых занимают замыкания орбит соответствующего преобразования Кремоны. Обсуждена проблема размерности этого множества.

Ключевые слова: метод конечных разностей, динамические системы, преобразования Кремоны.

1. Введение

Динамические системы весьма редко удается решить аналитически, и поэтому их приходится исследовать численно. В настоящее время основным численным методом интегрирования является метод конечных разностей. Этот метод предлагает заменить систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

или, для краткости,

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{f}(\mathfrak{x}), \tag{1}$$

на систему алгебраических уравнений

$$g_i(\mathfrak{x}, \hat{\mathfrak{x}}, \Delta t) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2}$$

связывающих значение решения в некоторый момент времени t со значением решения в момент времени $t+\Delta t$. При этом первое значение обозначают просто как $\mathfrak{x}$, второе — как $\hat{\mathfrak{x}}$, а конечную величину Δt называют шагом по времени. Саму систему алгебраических уравнений (2) будем называть разностной схемой для системы дифференциальных уравнений (1).

Под приближенным решением задачи Коши

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{f}(\mathfrak{x}), \quad \mathfrak{x}(0) = \mathfrak{x}_0,$$

найденным по схеме (2) с положительным шагом $\Delta t \in \mathbb{R}$, понимают последовательность точек $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \dots \in \mathbb{R}^n$, найденных рекурретно: $\mathfrak{x}_{m+1}$ — решение

$$g_i(\mathfrak{x}_m, \hat{\mathfrak{x}}, \Delta t) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

относительно $\hat{\mathfrak{x}}$, ближайшее к $\hat{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}_m$. В центре внимания исследователей в прошлом веке была близость $\mathfrak{x}_m$ и $\mathfrak{x}(m\Delta t)$.

Оставив в стороне этот, безусловно, важный математический вопрос, заметим, что разностная схема (2) представляет дискретную математическую модель того же явления, что и исходная система дифференциальных уравнений (1). Более того, в механике, как в старые времена, так и в новые, величину dt часто трактовали как конечное приращение и подразумевали, что уравнения Ньютона в действительности разностные [1]. С этой точки зрения представляется разумным, что разностная модель должна быть не хуже дифференциальной. Однако простейший пример показывает, что при дискретизации теряются важнейшие свойства непрерывной задачи.

Рассмотрим линейный осциллятор

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x \tag{3}$$

и простейшую разностную схему для него — явную схему Эйлера

$$\hat{x} - x = -y\Delta t, \quad \hat{y} - y = x\Delta t. \tag{4}$$

На исходной дифференциальной системе сохраняется энергия $x^2 + y^2$, поэтому на плоскости xy происходит движение точки по окружности с постоянной скоростью. На решениях, найденных по схеме Эйлера, энергия не сохраняется и точка (x, y) по спирали падает в центр системы координат xy вместо того, чтобы крутится по кругу. Это противоречит нашим представлениям об осцилляциях, которое снимается лишь в пределе при $\Delta t \to 0$. Фактически, описывая свойства линейного осциллятора, мы все время поправляем наши суждения, оглядываясь на дифференциальный случай, который, следовательно, нельзя изъять из рассмотрения.

В общем случае ситуация остается той же: замена дифференциальной модели на разностную схему приводит к нарушению законов сохранения и вносит новые явления (диссипацию или даже антидиссипацию), которые снимаются в пределе $\Delta t \to 0$. Это и заставляет все время сравнивать приближенные решения с точным.

2. Сохранение и наследование интегралов движения

По аналогии с непрерывным случаем примем следующее.

Определение 1. Будем говорить, что разностная схема (2) сохраняет выражение $h(\mathfrak{x}, \Delta t)$, если из уравнений (2) следует, что

$$h(\hat{\mathfrak{x}}, dt) = h(\mathfrak{x}, \Delta t).$$

Если выражение h не зависит от Δt, то оно является интегралом движения непрерывной динамической системы (1). В этом случае мы будем говорить, что интеграл движения h сохраняется на разностной схеме точно. Если же выражение h зависит от Δt, то интегралом движения будет предел этого выражения при $\Delta t \to 0$. В этом случае мы будем говорить, что этот интеграл наследуется разностной схемой.

В действительности, причины, по которым перестают сохраняться интегралы движения, не связаны с предельным переходом $\Delta t \to 0$. Заменяя

$$\frac{dx}{dt} = -y$$

на

$$\hat{x} - x = -y\Delta t$$

мы нарушаем t-симметрию, присущую самому явлению, из-за чего возникает «диссипация».

Определение 2. Будем говорить, что разностная схема (2) обладает t-симметрией, если система уравнений (2) эквивалентна системе

$$g_i(\hat{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}, -\Delta t) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Схемы, обладающие t-симметрией, хорошо известны, среди них нельзя не выделить схему средней точки

$$\hat{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x} = \mathfrak{f}\left(\frac{\hat{\mathfrak{x}} + \mathfrak{x}}{2}\right)\Delta t, \tag{5}$$

и схему трапеций

$$\hat{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x} = \frac{\mathfrak{f}(\hat{\mathfrak{x}}) + \mathfrak{f}(\mathfrak{x})}{2}\Delta t. \tag{6}$$

Сохранение интегралов на схеме средней точке было исследовано в 1980-х годах Купером [2, 3].

Теорема 1 (Cooper)**.** Схема средней точки сохраняет линейные и квадратичные интегралы динамической системы (1) точно.

Из этой теоремы следует, что, например, точки приближенного решения линейного осциллятора (3), найденные по схеме средней точки

$$\hat{x} - x = -(\hat{y} + y)\frac{\Delta t}{2}, \quad \hat{y} - y = (\hat{x} + x)\frac{\Delta t}{2} \tag{7}$$

ложатся на окружности

$$x^2 + y^2 = C. \tag{8}$$

Более того, в данном случае переход со слоя на слой можно описать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

где матрица перехода

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4-\Delta t^2}{\Delta t^2+4} & \frac{-4\Delta t}{\Delta t^2+4} \\ \frac{4\Delta t}{\Delta t^2+4} & \frac{4-\Delta t^2}{\Delta t^2+4} \end{pmatrix}$$

является матрицей поворота

$$\begin{pmatrix} \cos\Delta\alpha & -\sin\Delta\alpha \\ \sin\Delta\alpha & \cos\Delta\alpha \end{pmatrix}$$

на угол $\Delta\alpha$. Таким образом, схема средней точки позволяет дискретизовать модель линейного осциллятора (3) так, что за равные промежутки времени происходит повороты на равные углы. Качественно дискретная и непрерывная модели ничем не отличаются, количественно за интервал времени Δt непрерывная модель поворачивается на угол Δt, а дискретная — на угол

$$\Delta\alpha = \arcsin\frac{\Delta t}{1 + \Delta t^2/4} = \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^3),$$

что было отмечено в [4].

Если, как в в случае линейного осциллятора, $\mathfrak{f}$ — линейная функция $\mathfrak{x}$, то

$$\mathfrak{f}\left(\frac{\hat{\mathfrak{x}} + \mathfrak{x}}{2}\right) = \frac{\mathfrak{f}(\hat{\mathfrak{x}}) + \mathfrak{f}(\mathfrak{x})}{2},$$

поэтому схема трапеций (6) совпадет со схемой средней точки (5). В нелинейном же случае эти схемы не совпадают и возникает естественный вопрос о том, наследуются ли интегралы движения схемой трапеций?

Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что эти две разностные схемы в некотором смысле сопряжены друг к другу. В самом деле, пусть $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots$ — приближенное решение уравнения (1), рассчитанное по схеме средней точки (5). Тогда координаты $\mathfrak{x}'_0, \mathfrak{x}'_1, \mathfrak{x}'_2, \dots$ середин звеньев ломаной $\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 \dots$ дают другое приближенное решение этого же уравнения, рассчитанное по схеме трапеций (6), что было отмечено в [5]. Отсюда сразу следует теорема, двойственная к теореме 1 Купера.

Теорема 2 (двойственная к теореме Купера)**.** Если выражение h сохраняется на схеме средней точки (в смысле опр. 1), то на схеме трапеций сохраняется выражение

$$h\left(x - f(x)\frac{\Delta t}{2}\right).$$

Таким образом, линейный или квадратичный интеграл движения h наследуется и схемой трапеций (6), однако выражение для сохраняющейся величины лишь в пределе $\Delta t \to 0$ совпадает с h. Это обстоятельство и затрудняло его отыскание.

Теорема Купера, равно как и двойственная к ней теорема 2, в равной мере справедливы как для линейных, так и для нелинейных систем.

Классический, и в то же время реальный пример нелинейного осциллятора предлагает динамическая система, описывающая движение волчка, закрепленного в своем центре тяжести. Хотя интегрирование этой модели связывают с именами Эйлера и Пуансо [6], движение волчка до сих пор вызывает удивление и интерес у наблюдающих его в живую. Так, напр., в сети активно обсуждались кувырки барашка в невесомости, которые наблюдал Джанибеков и которые, тем не менее, прекрасно описываются этой моделью [7].

Обозначим, вслед за [6], координаты вектора угловой скорости относительно главных осей инерции как p, q, r, а моменты инерции относительно этих осей — как A, B, C, тогда изменение угловой скорости описывается динамической системой

$$\dot{p} = aqr, \quad \dot{q} = bpr, \quad \dot{r} = cpq, \tag{9}$$

коэффициенты которых выражаются моменты инерции

$$a = -\frac{C - B}{A}, b = -\frac{A - C}{B}, c = -\frac{B - A}{C}.$$

Эта система имеет два квадратичных интеграла

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = C_1 \quad \text{и} \quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = C_2, \tag{10}$$

которые были найдены еще в XVIII веке [6]. В XIX веке их использовали для сведения задачи к квадратуре и интегрировании в эллиптических функциях. С точки зрения численных методов этот случай интересен как нелинейный осциллятор с квадратичными интегралами, которые сохраняются точно на схеме средней точки, что было отмечено в [3], и в силу двойственной к ней теоремы 2 наследуются в несколько измененной форме схемой трапеций.

В тех случаях, когда интегралы движения не являются линейными или квадратичными, конструировать разностные схемы, сохраняющие все алгебраические интегралы движения, все равно возможно. Один из наиболее простых путей — метод квадратизации интеграла, который состоит в введении новых переменных таким образом, чтобы относительно них все интегралы были линейными и квадратичными [8, 9, 10]. При этом число новых переменных может быть больше, чем число переменных в исходной задаче. Таким путем нам из схемы средней точки удалось сконструировать разностную схему для задачи многих тел, сохраняющую все ее алгебраические интегралы [11, 12].

3. Проблема лишних корней

Если $\mathfrak{f}$ не является линейной функцией $\mathfrak{x}$, то уравнения (5), равно как и уравнения (6) перестают быть линейными относительно $\hat{\mathfrak{x}}$. Это существенно осложняет вычисление приближенных решений: на каждом шаге приходится численно решать систему нелинейных алгебраических уравнений, что не только вносит свою дополнительную ошибку, но и делает расчеты по таким схемам значительно более затратны в сравнении с явной схемой Эйлера.

Не менее проблемным является и исследование наследования периодичности. Нам удалось вычислить базис Грёбнера схемы средней точки для осциллятора и исключить из системы $\hat{q}, \hat{r}$. Это приводит к уравнению

$$f(\hat{p}, p, q, r, \Delta t) = 0,$$

имеющему 5-ую степень относительно $\hat{p}$. Не ясно, как исследовать его далее. Более того, не ясен физический смысл лишних корней: раз это уравнение 5-ой степени, то помимо нужного нам корня $\hat{p}$, близкого к p, должны иметься еще 4 других. Используя явный вид многочлена f нетрудно доказать, что эти корни стремятся к ∞ при $\Delta t \to 0$. Это обстоятельство позволяет в численных расчетах отделить 4 лишних корня от 5-го, который только и интересен при вычислении приближенного решения.

Вопрос о «лишних» корнях удивительным образом ускользал от внимания исследователей. Между тем в нелинейных системах они возникают естественным образом.

Например, явная схема Эйлера

$$\hat{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \mathfrak{f}(\mathfrak{x})\Delta t$$

линейна относительно $\hat{\mathfrak{x}}$, поэтому заданному значению $\mathfrak{x}$ отвечает одно единственное значение $\hat{\mathfrak{x}}$. Однако, в нелинейном случае, заданному значению $\hat{\mathfrak{x}}$ отвечает несколько значений $\mathfrak{x}$, одно из которых при $\Delta t \to 0$ стремится к $\hat{\mathfrak{x}}$. Эти корни не интересны при отыскании численного решения, поскольку при переходим со слоя $\mathfrak{x}_i$ к слою $\mathfrak{x}_{i+1}$.

Появление лишних корней в явной схеме Эйлера не удивительно. Удивительно то, что переход от нее к схемам, обладающим t-симметрией и сохраняющим интегралы движения, не приводит к исчезновению лишних корней. Их появление нарушается другой базовый принцип механики: по начальным данным должно быть возможно однозначно определить конечные, а по конечным — начальные.

4. Обратимые схемы

Принято считать, что при составлении разностных схем, наследующих свойства исходной дифференциальной модели, важнейшим является наследование интегралов движения. Однако, как мы видели выше, сохранение интегралов и t-симметрия не избавляют схему от лишних корней, рассмотренных в предыдущем разделе. Желание избавиться от них привело нас к разностной схеме, в которой заданному начальному значению $\mathfrak{x}$ отвечает одно единственное конечное значение $\hat{\mathfrak{x}}$, а заданному конечному значению $\hat{\mathfrak{x}}$ — одно начальное значение $\mathfrak{x}$. В [13] мы предложили называть такие разностные схемы обратимыми.

Описанная конструкция хорошо известна в алгебраической геометрии [14]. Мы называем разностную схему обратимой, если ее уравнения задают бирациональное преобразование между теми многообразиями, точками которых являются $\mathfrak{x}$ и $\hat{\mathfrak{x}}$.

Вопрос о выборе этих многообразий не является тривиальным. Но мы пока рассмотрим простейший вариант, когда разностная схема задает бирациональное преобразование между n-мерным $\mathfrak{x}$-пространством и n-мерным $\hat{\mathfrak{x}}$-пространством, то есть преобразование Кремоны [14]. Только за такой разностной схемой мы сохраним название обратимой.

Можно было бы подумать, что обратимые схемы встречаются весьма редко, однако в действительности для всякой динамической системы с квадратичной правой частью такую обратимую схему

$$\hat{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x} = \mathfrak{F}\Delta t,$$

здесь правая часть $\mathfrak{F}$ получается из правой части $\mathfrak{f}$ исходной динамической системы путем замены квадратов x_i^2 на $x_i\hat{x}_i$, а смешанных членов $x_i x_j$ —

на $\frac{1}{2}(\hat{x}_i x_j + x_i \hat{x}_j)$, см. [13].

В теории динамических систем дискретные системы, в которых шаг описывается преобразованием Кремоны, рассматривались А.П. Веселовым [15], частные примеры — Хеноном и Мозером [16]. Пример 3 в [15] не оставляет никаких сомнений в том, что А.П. Веселов рассматривал возможность получения таких дискретных моделей из непрерывных, однако названные авторы ограничили рассмотрение полиномиальными преобразованиями Кремоны. Описанный выше способ дискретизации динамической системы с квадратичной правой частью неизбежно приводит к преобразованиям Кремоны, которые не являются полиномиальным.

5. Движение волчка в случае Эйлера-Пуансо

Среди непрерывных динамических моделей с квадратичной правой частью нельзя не выделить осцилляторы, которые интегрируются в эллиптических функциях. В [13] мы рассмотрели несколько таких осцилляторов, в т.ч. осцилляторы Якоби и Вейерштрасса. Оба эти случаи можно рассматривать как своего рода вариации динамической системы, описывающей движение волчка в случае Эйлера-Пуансо и интегрируемой в эллиптических функциях. Традиционно случай Эйлера-Пуансо сводят к осциллятору Якоби [6], однако в действительности свойства обратимой разностной для волчка удобно описывать в исходных координатах. Для волчка, закрепленного в центре тяжести, нетрудно без каких либо замен составить обратимую и t-симметричную разностную схему, аппроксимирующую систему дифференциальных уравнений (9):

$$\hat{p} - p = (\hat{q} + q)(\hat{r} + r)\frac{a\Delta t}{4}, \dots \tag{11}$$

5.1. Интегральные кривые

Проводя численные эксперименты с этой схемой, мы заметили, что точки приближенного решения выстраиваются вдоль некоторой линии, которая

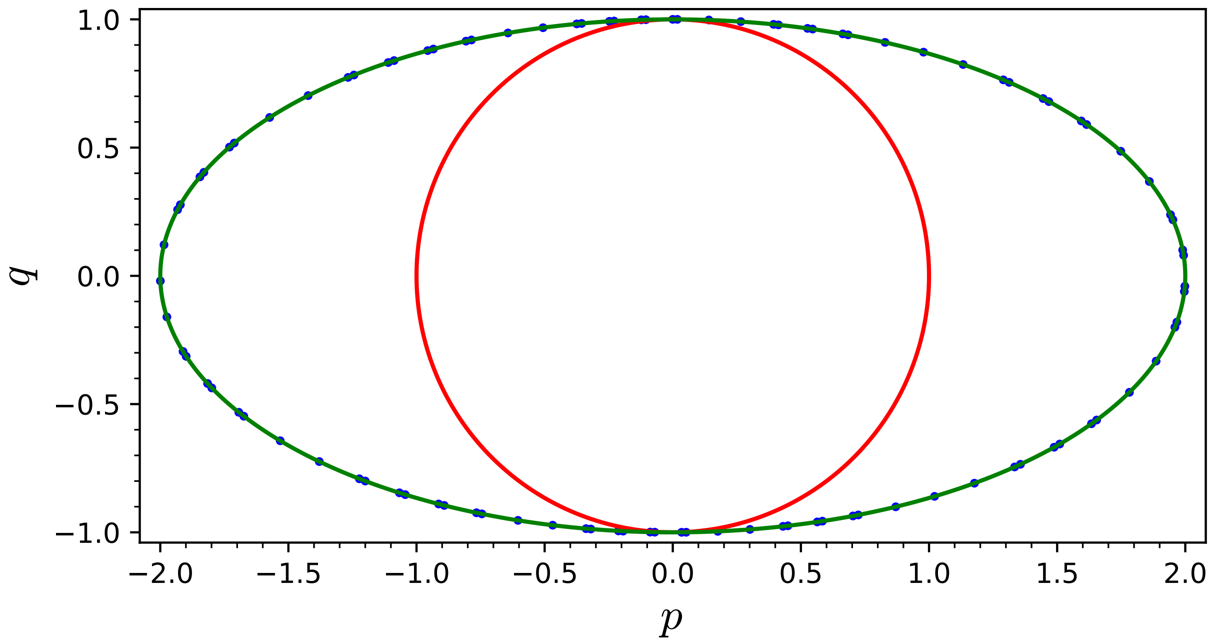

Рис. 1. Приближенное решение системы (9), найденное по обратимой схеме (11) при $A = 1, B = 2, C = 3$ и $\Delta t = 3$. На рис. указан круг, который является интегральной кривой при $\Delta t = 0$, и эллипс, на который ложатся точки приближенного решения

похожа на эллипс, но приметно отличается от интегральной кривой. На рис. 1 отмечены интегральная кривая и эллипс на который ложатся точки приближенного решения.

Чтобы составить уравнение кривой, на которую ложатся точки приближенного решения, нам пришлось распространить теорию Лагутинского [17, 18, 19] на разностный случай [20].

Теорема 3. Пусть задана линейная система вида

$$\sum_{i=0}^{m} a_i g_i(\mathfrak{x}) = 0, \tag{12}$$

где $a_0, \dots, a_m$ — числовые параметры из $\mathbb{R}$. Если для любой приближенной траектории $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \dots$ системы (1) определитель Кремоны

$$\det(g_i(\mathfrak{x}_j)) = 0 \quad (i, j = 0, 1, \dots m), \tag{13}$$

равен нулю, то всякая приближенная траектория лежит на гиперповерхности системы (12).

Глядя на рис. 1 нетрудно догадаться, что проекция точек решения на плоскость pq лежат на эллипсе линейного семейства

$$a_1p^2 + a_2q^2 + a_3 = 0. \tag{14}$$

Чтобы доказать это строго, достаточно принять координаты начальной точки $\mathfrak{x}_0$ за символьные переменные, рассчитать в символьном виде точки координаты точек $\mathfrak{x}_1$ и $\mathfrak{x}_2$, а затем вычислить определитель (13). Эти расчеты удалось без заметных затрат времени выполнить в Sage. Определитель оказался равным нулю, поэтому проекция точек решения на плоскость pq лежат на эллипсе линейного семейства (14).

Найти само уравнение не трудно: достаточно заменить последнюю строку в определителе на $p^2, q^2, 1$. Отсюда, после сокращения на несущественные множители, получается уравнение

$$abc\Delta t^2 p_0^2 q^2 - abc\Delta t^2 p^2 q_0^2 + 4bp^2 - 4bp_0^2 - 4aq^2 + 4aq_0^2 = 0. \tag{15}$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{b(4 - ac\Delta t^2 q_0^2)}{4bp_0^2 - 4aq_0^2} p^2 - \frac{a(4 - bc\Delta t^2 p_0^2)}{4bp_0^2 - 4aq_0^2} q^2 = 1$$

Полагая

$$C = \frac{4 - ac\Delta t^2 q_0^2}{4bp_0^2 - 4aq_0^2},$$

имеем

$$bCp^2 - a\left(C - \frac{c\Delta t^2}{4}\right) q^2 = 1. \tag{16}$$

Таким образом, проекции точек приближенного решения ложатся на кривые, принадлежащие одному и тому же пучку (16). Иными словами, на приближенном решении сохраняется выражение

$$\frac{bp^2 - aq^2}{1 + \frac{c\Delta t^2}{4} aq^2} = \mathrm{const} \tag{17}$$

в смысле определения 1. Это выражение при $\Delta t \to 0$ переходит в интеграл $bp^2 - aq^2 = C$ исходной системы.

Аналогично, можно исследовать проекцию на плоскость pr и прийти к следующей теореме.

Теорема 4. Точки приближенного решения системы (9), найденные по обратимой схеме (11), ложатся на кривую

$$\frac{bp^2 - aq^2}{1 + \frac{c\Delta t^2}{4} aq^2} = C_1, \quad \frac{cp^2 - ar^2}{1 + \frac{b\Delta t^2}{4} ar^2} = C_2, \tag{18}$$

где C_1, C_2 надлежащим образом выбранные константы.

5.2. Представление разностной схемы в виде квадратуры

Кривая (18) является эллиптической кривой, как и интегральная кривая в непрерывном случае. Эта кривая инвариантна относительно преобразования Кремоны, которое задает разностная схема (11).Поэтому сужение этого преобразования до преобразования на кривой (18) является бирациональным. Бирациональные преобразования на эллиптической кривой всегда можно описать при помощи абелевых интегралов первого типа [14, 21].

Рассмотрим дифференциал

$$\frac{dp}{qr}$$

на кривой (18). Выражая q, r через p по уравнениям (18), мы можем преобразовать его к виду

$$\frac{dp}{\sqrt{f_4(p)}},$$

с точностью до выбора ветви корня, где f_4 — многочлен 4-ой степени с простыми корнями. Это выражение имеет всюду интегрируемые особенности [22] и поэтому является дифференциалом первого типа (kind).

Теорема 5. Точки приближенного решения системы (9), найденные по обратимой схеме (11), удовлетворяют соотношению

$$\int_{\mathfrak{x}_n}^{\mathfrak{x}_{n+1}} \frac{dp}{qr} = \Delta u, \tag{19}$$

где Δu зависит от Δt и начальных данных, а интеграл рассматривается как абелев интеграл на кривой (18).

Доказательство. Пусть O — произвольная точка пространства pqr и $\hat{x} = \mathfrak{R}(\mathfrak{x}, \Delta t)$. Выражение

$$\int\limits_O^{\mathfrak{R}(\mathfrak{x},\Delta t)} \frac{dp}{qr}$$

как функция $\mathfrak{x}$ тоже является интегралом первого типа и поэтому найдутся такие f и g, что

$$\int\limits_O^{\mathfrak{R}(\mathfrak{x},\Delta t)} \frac{dp}{qr} = f(\Delta t) \int\limits_O^{\mathfrak{x}} \frac{dp}{qr} + g(\Delta t). \tag{20}$$

Заставим точку $\mathfrak{x}$ пробежать замкнутый контур. При этом найдутся такие целые числа n, m, что

$$f(\Delta t)\omega = n\omega + m\omega',$$

где ω, ω' — фундаментальные периоды кривой (18), которые, вообще говоря, зависят от Δt. При $\Delta t \to 0$ образ $\mathfrak{x}$ стремится к $\mathfrak{x}$, поэтому $f(0) = 1$, $n = 1$ и $m = 0$. Однако, функция f не может меняться скачками, а m и n, напротив, принимают только целые значения. Поэтому не только при всех $\Delta t = 0$ верно $n = 1$ и $m = 0$, но при других значениях Δt. Это означает, что

$$f(\Delta t) = 1.$$

Поэтому (20) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\mathfrak{x}}^{\hat{\mathfrak{x}}} \frac{dp}{qr} = g(\Delta t),$$

откуда сразу следует (19). □

Аналог соотношения (19) в непрерывном случае хорошо известен. На интегральной кривой уравнение

$$\frac{dp}{dt} = aqr$$

можно переписать в виде т.н. квадратуры

$$\int \frac{dp}{qr} = at,$$

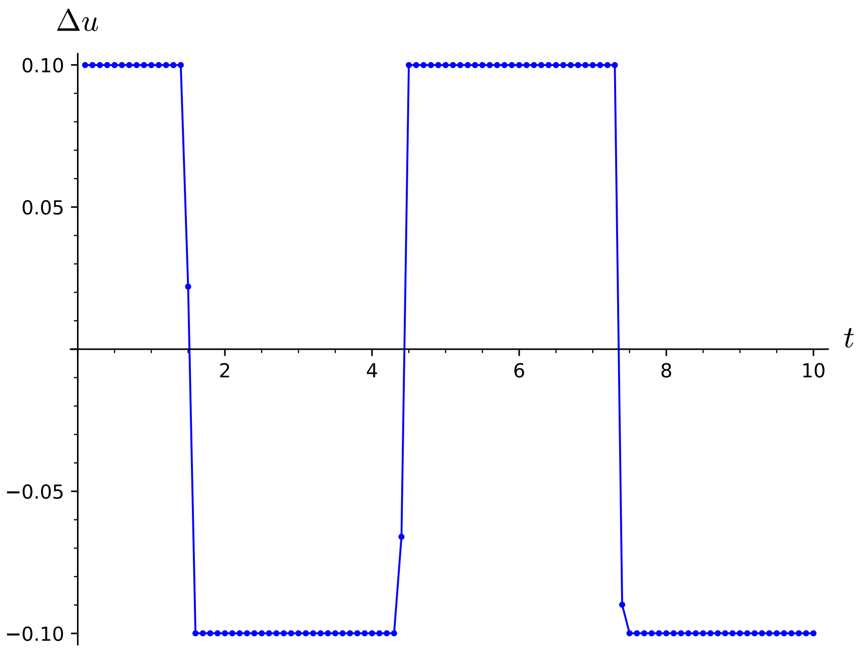

Рис. 2. Изменение приращение квадратуры 19 при $A = 1, B = 2, C = 3$, начальных данных $p = 0, q = r = 1$ и шаге $\Delta t = \frac{1}{10}$.

где слева q, r рассматривают как функции p. Отсюда в частности следует, что

$$\int\limits_{\mathfrak{x}(t_n)}^{\mathfrak{x}(t_{n+1})} \frac{dp}{qr} = a\Delta t.$$

Поэтому представление приближенного решения в виде (19) мы будем называть квадратурой.

При применение формулы (19) следует принимать во внимание выбор корня. Если условится выбирать арифметическое значение корня, то величина Δu остается постоянной почти на всех шагах, кроме тех, во время которых следует изменить ветвь корня. На рис. 2 представлен обычный вид зависимости Δu от времени. Хорошо видно, что Δu принимает два значения, различающиеся знаком. Переключение между этими значениями происходит не скачком, а за один-два шага.

В непрерывной теории квадратуры возникают из-за того, что на интегральной кривой можно выполнить разделение переменных. Появление же квадратур в дискретной теории не может не удивлять. Тем не менее, даже в тривиальном случае линейного осциллятора (3) схема средней точки (7) допускает представление в виде квадратуры.

В самом деле, линейное преобразование (7) можно рассматривать как преобразование Кремоны. Мы знаем, что оно сохраняет окружности (8). Угол $\Delta\alpha$, который зависит только от Δt, пропорционален длине пройденной дуги этой окружности:

$$\int\limits_{x}^{\hat{x}} \frac{dx}{\sqrt{C - x^2}} = C\Delta\alpha. \tag{21}$$

Разумеется, окружность имеет род 0 и поэтому место интегралов 1-го типа занимает интеграл 3-го типа как в дискретном, так и в непрерывном случае.

5.3. Периодичность приближенного решения

Квадратура является аддитивной функцией точек интегрирования, поэтому из (19) следует, что

$$\int\limits_{\mathfrak{x}_0}^{\mathfrak{x}_m} \frac{dp}{qr} = m\Delta u.$$

Поскольку интегральная кривая (18) — эллиптическая, а dp/qr — дифференциал 1-го типа, то существует такая мероморфная функция al, что

$$\mathfrak{x}_m = \mathrm{al}(m\Delta u).$$

Поскольку эллиптический интервал имеет пару несоизмеримых периодов, эта мероморфная функция — двояко периодическая. Таким образом, движение как в рамках непрерывной, так и в рамках дискретной модели волчка описываются эллиптическими функциями.

Таким образом, в данном случае обратимая разностная схема подражает всем известным свойствам непременной модели волчка, закрепленного в своем центре тяжести. Главное различие проявляется в том, что в дискретном случае переход от слоя к слою осуществляется преобразование Кремоны всего пространства pqr, а в непрерывном — бирациональным

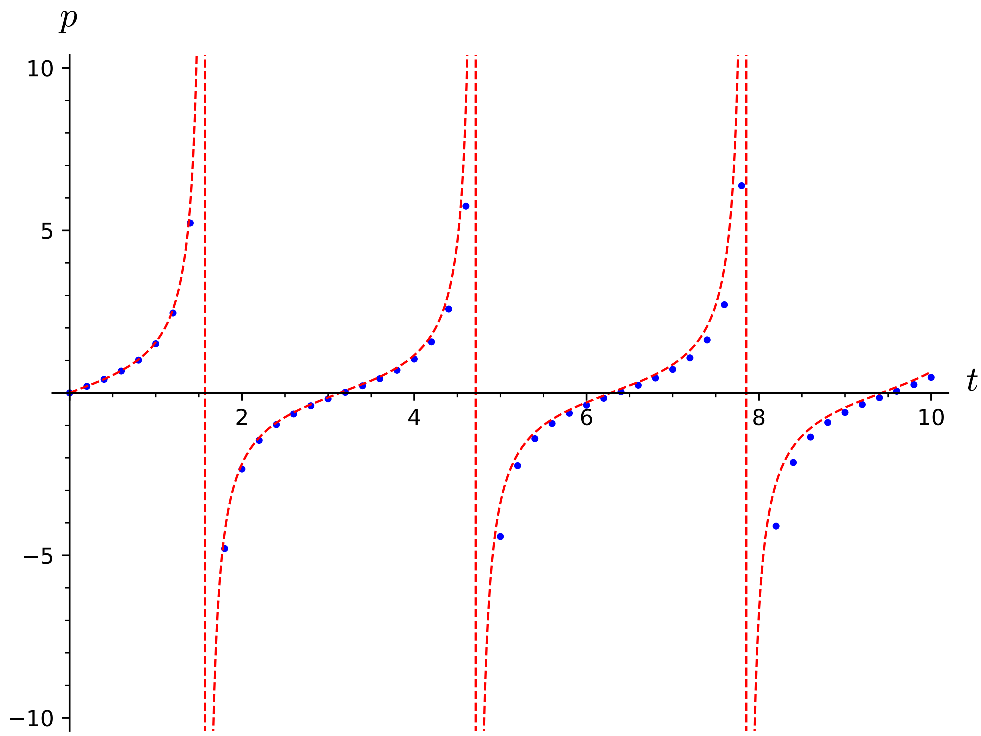

Рис. 3. Точное и приближенное решения уравнения (22), удовлетворяющие начальному условию $p(0) = 0$.

преобразованием на интегральной кривой. С этой точки зрения дискретная модель проще непрерывной

6. Приближенные траектории в проективных пространствах

Обращаясь вновь к общему случаю динамической системы с квадратичной правой частью, заметим, что переход от слоя к слою дается рациональными функциями, знаменатели которых, вообще говоря, могут обращаться в нуль. В случае волчка, рассмотренном в прошлом разделе, мы не сталкиваемся с такой ситуацией, поэтому необходимости переходить к проектному пространству не было. Однако, простейшие математические модели приводят к появлению бесконечно удаленных точек.

Рассмотрим, например, уравнение Риккати

$$\frac{dp}{dt} = 1 + p^2, \tag{22}$$

решением которого при начальном условии $p(0) = 0$ будет $p = \tan t$. Это решение уходит на бесконечность при $t = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Приближенное решение, найденное по обратимой схеме с нарочито большим шагом, представлено на рис. 3. Оно подражает этому уходу на бесконечность, правильно описывая поведения решения не только до первого полюса, но и после него. Это удивительное свойство обратимых схем было отмечено в [23]. Отмеченное свойство сохраняется и для нелинейных осцилляторов, напр., $\wp$-осциллятора

$$\frac{d^2p}{dt^2} = ap^2 + bp + c,$$

точное решение которого также периодически уходит на бесконечность [13].

По умолчанию, при рассмотрении динамических систем (1) рассматривают положение системы $\mathfrak{x}$ как точку аффинного пространства. Теперь у нас есть очевидный повод расширить рассматриваемое пространство до проективного, добавив бесконечно удаленную гиперплоскость. Это — вполне естественное расширение для исследования преобразований Кремоны [14].

Таким образом, мы рассматриваем $\mathfrak{x}$ как точку проективного пространства $\mathbb{P}_n$, а дискретную модель динамической системы (1) — как переход со слоя на слой:

$$\hat{\mathfrak{x}} = C\mathfrak{x},$$

описывавшейся преобразованием Кремоны C, зависящим от Δt.

При вычислении приближенного решения, принимающего при $t = 0$ значение $\mathfrak{x}_0$, мы вычисляем точки последовательность $\{\mathfrak{x}_n\}$ реккурентно по формуле

$$\mathfrak{x}_{k+1} = C\mathfrak{x}_k.$$

Если при каком то значении k знаменатель преобразования обращается в нуль, то точка $\mathfrak{x}_{k+1}$ будет бесконечно большой. Такая интерпретация невозможна лишь в одном случае, когда в нуль обращаются и знаменатель, и все числители. Такие точки, как известно, называют особыми точками преобразования Кремоны.

Здесь возникает одна проблема, специфичная для многомерных преобразований Кремоны: особая точка может переходить в линию [14]. Напр., преобразование Кремоны

$$\hat{x} = \frac{1}{x} = \frac{y}{xy}, \quad \hat{y} = \frac{x}{y} = \frac{x^2}{xy}$$

имеет особую току в нуле $(0,0)$. Предел

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{y}$$

не определен и преобразованием точка $(0,0)$ (или ее окрестность) «разрывается» в бесконечно удаленную прямую линию $x = \infty$. Мы можем снять (zu aufheben, to sublate) неопределенность предела, устремив точку к нулю не произвольным образом, а вдоль некоторой линии.

При вычислении приближенного решения эта линия определяется естественным образом. Допустим, что $\mathfrak{x}_m$ не является особой точкой, а $\mathfrak{x}_{m+1} = C\mathfrak{x}_m$ как раз является и формально мы не можем определить $C^2\mathfrak{x}_m$. Пусть точка $\mathfrak{x}$ движется вдоль отрезка $\mathfrak{x}_m\mathfrak{x}_{m+1}$ к $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_{m+1}$, тогда $C\mathfrak{x}$ движется к некоторому положению, которое мы примем за $\mathfrak{x}_{m+2}$. Приняв это соглашение, мы можем считать, что приближенное решение представляет собой или бесконечную последовательность, или состоит из одной особой точки, неудачно взятой за начальную.

Процесс вычисления приближенного решения можно продолжить и в сторону отрицательным значений m, приняв аналогичное соглашение о продолжении через особые точки. Таким образом, в дальнейшем под приближенным решением, выпущенным из точки $\mathfrak{x}$ подразумевается последовательность

$$O(\mathfrak{x}) = \{C^m\mathfrak{x},\, m \in \mathbb{Z}\},$$

то есть орбита преобразования C. Эта последовательность при сделанных соглашениях определена для всех $\mathfrak{x} \in \mathbb{P}_n$, кроме конечного числа особых точек преобразования C.

Замыкание множества $O(\mathfrak{x})$ в $\mathbb{P}_n$ обозначим как $Z(\mathfrak{x})$. Это множество, очевидно, является инвариантным относительно преобразования C. Равенство $Z(\mathfrak{x}) = Z(\mathfrak{x}')$ означает, что различные интегральные кривые $O(\mathfrak{x})$ и $O(\mathfrak{x}')$ подходят произвольно близко друг к другу и, стало быть, их не следует различать.

В случае волчка (9) множество $Z(\mathfrak{x})$ представляет собой или конечное множество (когда $O(\mathfrak{x}_0)$ — периодическая последовательность), или эллиптическую кривую (18) в пространстве pqr. Небезынтересно отметить, что при выборе в качестве координат точки $\mathfrak{x}_0$ и шага Δt рациональных чисел мы получим бесконечную последовательность рациональных точек $O(\mathfrak{x})$ на эллиптической кривой (18), бывшую предметом многих изысканий [24].

Возьмем точку $\mathfrak{x}' \in Z(\mathfrak{x})$, не принадлежащую $O(\mathfrak{x})$. В силу инвариантности $Z(\mathfrak{x})$, орбита $O(\mathfrak{x})$ принадлежит $Z(\mathfrak{x})$ целиком. В случае волчка при $\Delta t \to 0$ кривая $Z(\mathfrak{x})$ переходит в точную интегральную кривую, поэтому $O(\mathfrak{x})$ и $O(\mathfrak{x}')$ можно интерпретировать как «приближения» к одному и тому же точному решению.

Однако стоит нам лишь немного сдвинуть центр закрепления волчка из центра тяжести, как ситуация радикально меняется — точки приближенного решения перестают выстраиваться вдоль некоторой линии. Прежде всего, меняется размерность самой системы с 3 до 6 неизвестных функций, в качестве которых обычно берут p, q, r и направляющие косинусы подвижной оси Oz [6]. Эта динамическая система имеет квадратичную правую часть и указанным выше способом для нее можно составить обратимую разностную схему.

В случае симметричного волчка ($A = B$, случай Лагранжа-Пуассона [6, 25]) проекция частного решения в пространство pqr лежит на плоскости $r = C$ и траектория заполняет плотно некоторое кольцо на этой плоскости. Компьютерные эксперименты (см. рис. 4) указывают, что это

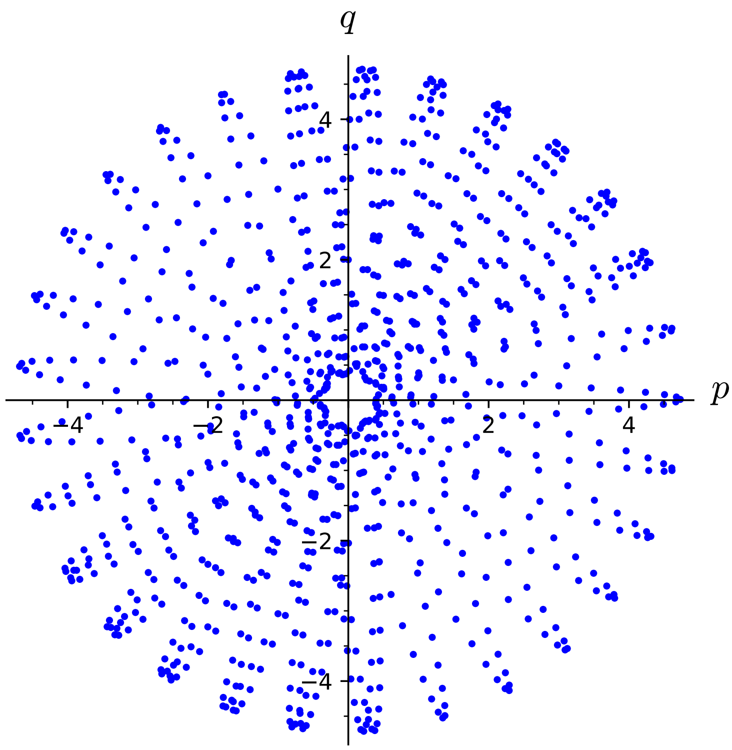

Рис. 4. Приближенное решение волчка, центр тяжести которого смещен относительно точки закрепления, найденное по обратимой схеме.

свойство наследуется приближенным решением, найденным по обратимой схеме. Таким образом, $Z(\mathfrak{x})$ может быть куском двумерного многообразия. В случае несимметричного волчка в нашем распоряжении нет аналитического описания точного решения. Эксперименты с обратимой разностной схемой позволяют предположить, что в несимметричном случае множество $Z(\mathfrak{x})$ представлять собой поверхность, которая при $A - B \to 0$ «схлопывается» в кольцо.

Обращаясь к общему случаю, нельзя не заметить, что сейчас в нашем распоряжении нет методов вычисления размерности $Z(\mathfrak{x})$, нельзя исключать даже, что эта размерность может быть фрактальной [26]. Во всех примерах, которые мы исследовали в компьютерных экспериментах, казалось, что точки выстраиваются или в некоторые линии, или ложатся на некоторые поверхности. Однако это не может служить доказательством того, что размерность этого множества всегда является целой. Исследование этого вопроса представляется нам весьма интересной и нетривиальной задачей, решение которой позволит объяснить различие интегрируемых и неинтегрируемых систем с точки зрения конечных разностей.

7. Заключение

В настоящей работе мы взглянули на разностные схемы, аппроксимирующие динамические системы, как на дискретные модели тех же явлений, которые описывают непрерывные динамические системы. Ключевой проблемой, с которой сталкивается такой взгляд, кажется нарушение фундаментальных законов сохранения. Однако скоро выясняется (раздел 2), что консервативные схемы очень трудны для исследования. Вместо консервативности в основу нашего подхода мы положили обратимость: мы рассматриваем разностные схемы, в которых переход от слоя к слою по времени осуществляются при помощи преобразований Кремоны. Такие разностные схемы можно построить для всех динамических систем с квадратичной правой частью.

Из них выделяется та система, которая описывает движение волчка, закрепленного в своем центре тяжести. В этом случае дискретная теория повторяет непрерывную теорию полностью вплоть до появления интегральных кривых (раздел 5.1) и представления решения в виде эллиптических функций (раздел 5.3). В общем же случае, место интегральных кривых занимают замыкания орбит соответствующего преобразования Кремоны. Эти замыкания, рассмотренные в последнем разделе, в случае волчка, закрепленного в своем центре тяжести, являются кривыми, а в общем случае их размерность может быть больше.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20-11- 20257). Много правильных слов...

Список литературы

[1] Richard P. Feynman and Albert R. Hibbs. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. Courier Corporation, 2010.

[2] G. J. Cooper. Stability of Runge–Kutta methods for trajectory problems. *IMA J. Numer. Anal.*, 7:1–13, 1987.

[3] E. Hairer, G. Wanner, and Ch. Lubich. *Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2000.

[4] V. P. Gerdt, M. D. Malykh, L. A. Sevastianov, and Yu Ying. On the properties of numerical solutions of dynamical systems obtained using the midpoint method. *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*, 27(3):242–262, 2019.

[5] Yu Ying and Mikhail D. Malykh. On conjugate difference schemes: the midpoint scheme and the trapezoidal scheme. *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*, 29(1):63–72, 2021.

[6] V. V. Golubev. *Lectures on integration of the equations of motion of a rigid body about a fixed point*. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1960.

[7] A. G. Petrov and S. E. Volodin. Janibekov's effect and the laws of mechanics. *Doklady Physics*, 58(8):349–353, 2013.

[8] Xiaofeng Yang and Lili Ju. Efficient linear schemes with unconditional energy stability for the phase field elastic bending energy model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 315, 11 2016.

[9] Xiaofeng Yang and Lili Ju. Linear and unconditionally energy stable schemes for the binary fluid-surfactant phase field model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 318, 01 2017.

[10] Hong Zhang, Xu Qian, and Songhe Song. Novel high-order energy-preserving diagonally implicit runge-kutta schemes for nonlinear hamiltonian odes. *Appl. Math. Lett.*, 102:106091, 2020.

[11] Yu Ying, Ali Baddour, Vladimir P. Gerdt, Mikhail Malykh, and Leonid Sevastianov. On the quadratization of the integrals for the many-body problem. *Mathematics*, 9(24), 2021.

[12] Ali Baddour and Mikhail Malykh. On difference schemes for the many-body problem preserving all algebraic integrals. *Phys. Part. Nuclei Lett.*, 19:77–80, 2022.

[13] Ali Baddour, Mikhail Malykh, and Leonid Sevastianov. On periodic approximate solutions of dynamical systems with quadratic right-hand side. *J. Math. Sci.*, 261:698–708, 2022.

[14] F. Severi. *Lezioni di geometria algebrica.* Angelo Graghi, Padova, 1908.

[15] A. P. Veselov. The cremona group and dynamical systems. *Mat. Zametki*, 45(3):118–120, 1989.

[16] J. Moser. *Integrable Hamiltonian systems and spectral theory.* Edizioni della Normale, 1983.

[17] M. N. Lagoutinsky. Application des opérations polaires à l'intégration des équations différ. ordinaires sous forme finie. *Communications de la Société mathématique de Kharkow*, 12:111–243, 1911.

[18] M. N. Lagoutinsky. Sur certains polynômes, liés à l'intégration algébrique des équations differentielles ordinaires algébriques. *Communications de la Société mathématique de Kharkow*, 13:200–224, 1912.

[19] E.A. Ayryan, M.M. Gambaryan, and M.D. Malykh. Trajectories of dynamic systems lying on hypersurfaces of linear systems. *Phys. Part. Nuclei Lett.*, 20:183–187, 2023.

[20] E. A. Ayryan, M. M. Gambaryan, M. D. Malykh, and L. A. Sevastyanov. On the trajectories of dynamical systems with quadratic right sides, calculated by reversible difference schemes. *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, 517:17–35, 2022.

[21] P. Painlevé. Leçons sur la theorie analytique des equations differentielles. In *Œuvres de Paul Painlevé*, volume 1. 1971.

[22] A. I. Markushevich. *Introduction to the Classical Theory of Abelian Functions.* American Mathematical Society, 2006.

[23] E. A. Ayrjan, M. D. Malykh, and L. A. Sevastyanov. On difference schemes approximating first-order differential equations and defining a projective correspondence between layers. *J. Math. Sci.*, 240:634–645, 2019.

[24] V. Prasolov and Y. Solovyev. *Elliptic Functions and Elliptic Integrals.* American Mathematical Society, 1997.

[25] F. Klein and A. Sommerfeld. *Über die Theorie des Kreisels*, volume 2. B. G. Teubner, Leipzig, 1898.

[26] Benoit B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature.* Macmillan, 1983.