О трансцендентных функциях,

возникающих при интегрировании дифференциальных уравнений в конечном виде

Мих. Дмитр. Малых

ФНМ МГУ, РУДН

19 мар. 2015 г., версия от 22 апреля 2015 г.

Историческое введение

В предисловиях к современным монографиям, посвященным интегрированию динамических систем, часто можно увидеть упоминания о неком искусстве интернирования в абелевых функций, утраченном после Первой мировой войны.

> *В мои студенческие годы, во время первой мировой войны абелевы функции считались неоспоримой вершиной математики. Каждый из нас, естественно, испытывал честолюбивое стремление самостоятельно продвинуться в этой области. А теперь? Молодое поколение вряд ли вообще знаком с абелевыми функциями. — Феликс Клейн, цит. по [Козлов, 1995].*

Что эта была за теория и где она изложена? Как она прилагалась к дифференциальным уравнениям? Да, и г-ну тайному советнику Клейну в 1914 г. было 65 лет.

Абелевы интегралы

Пусть R — рациональная функция переменных x и y, связанных алгебраическим уравнением

$$f(x, y) = 0,$$

тогда интеграл

$$\int R dx$$

называют абелевым.

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 2x + 3}} = \int \frac{dx}{y}, \quad y^2 = x^3 + 2x + 3.$$

Лекции Вейерштрасса

В 1870-х г. Вейерштрасс читал лекции по теории абелевых интегралов. Они были изданы только в 1902 г., 1 и 2 части доступны в моем переводе на `malykhmd.narod.ru`.

Популярные изложения XIX века:

- Бейкер (руск. перев. 2008),
- Тихомандрицкий,
- Покровский.

Род кривой

Род p плоской кривой кривой можно определить след. образом:

- существует функция, которая имеет простые полюса в $p+1$ произвольных точках, но не существует функции, имеющей полюса только в p точках;
- существует p линейное независимых абелевых интегралов

$$\int H_i(x,y)dx \quad i = 1, ..., p,$$

конечных во всех точках кривой, их именуют интегралами первого типа.

Нормальные особенности плоской кривой

Плоскую алгебраическую кривую обычно можно получить как проекцию гладкой пространственной кривой. При проектировании возникают особые точки:

- узел, когда проектирующий луч проходит через две точки пространственной кривой,
- точка возврата, когда проектирующий луч касается пространственной кривой.

Вычисление рода

Род

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta - \chi,$$

здесь n — порядок n, δ — число узлов, а χ — число точек возврата.

Пример. Кубика с узлом имеет род

$$p = \frac{2 \cdot 1}{2} - 1 = 0$$

и не может быть эквивалентна кубике без узла (род $p = 1$).

Maple (ван Хуей) и Sage (Штейн) умеют вычислять род, но работать над $\mathbb{C}$ пока трудно.

```
sage: XY.<x,y> = PolynomialRing(QQ,2)
sage: Curve(y^2-x^5+2*x-3).genus()
2
```

Вычисление абелевых интегралов в конченом виде

Важнейший результат 2-ой части лекций Вейерштрасса — аналог теоремы о разложении на элементарные дроби:

$$R(xy) = \sum_{n=1}^{p} g_n' H_n(xy) - g_n H_n(xy) + \sum_m H(xy; a_m b_m) + \frac{dG(xy)}{dx}.$$

Интеграл от

$$\sum_{n=1}^{p} g_n' H_n(xy) - g_n H_n(xy) + \sum_m H(xy; a_m b_m)$$

не берется в алгебраических функциях $\Rightarrow$ обобщение метода Остроградского на произвольные алгебраические функции.

Задача об обращении интегралов

Эйлер и Лежандр. При $n \leq 4$ уравнение

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a_0 x^n + \cdots + a_n}} = u$$

можно обратить

$$x = f(u),$$

где f — однозначная функция u, целая при $n = 1, 2$ и мероморфная при $n = 3, 4$.
Якоби. При $n = 5, 6$ функция f не может быть однозначной, поскольку она имеет 4-ре несоизмеримых комплексных периода.

Задача Якоби и абелевы функции

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{\sqrt{P(x_1)}} + \dfrac{dx_2}{\sqrt{P(x_2)}} = du \\ \dfrac{x_1 dx_1}{\sqrt{P(x_1)}} + \dfrac{x_2 dx_2}{\sqrt{P(x_2)}} = dv \end{cases}$$

При $n = 5, 6$ рациональные симметрические функции пар

$$(x_1, \sqrt{P(x_1)}) \quad \text{и} \quad (x_2, \sqrt{P(x_2)})$$

являются мероморфными функциями параметров u и v, имеющие 4-ре комплексных периода:

$$f(u + \omega_i, v + \omega_i') = f(u, v), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Эти функции и называют абелевыми.

Абелевы поверхности

По теореме Кронекера все эти симметрические функции можно выразить рационально через три такие функции, напр.,

$$x = x_1 + x_2, \quad y = x_1 x_2, \quad z = \sqrt{P(x_1)} + \sqrt{P(x_2)}.$$

Эти три функции не независимы, но связаны одним соотношением, скажем,

$$S(x, y, z) = 0.$$

Это уравнение задает поверхность, которую можно описать параметрически при помощи абелевых функций:

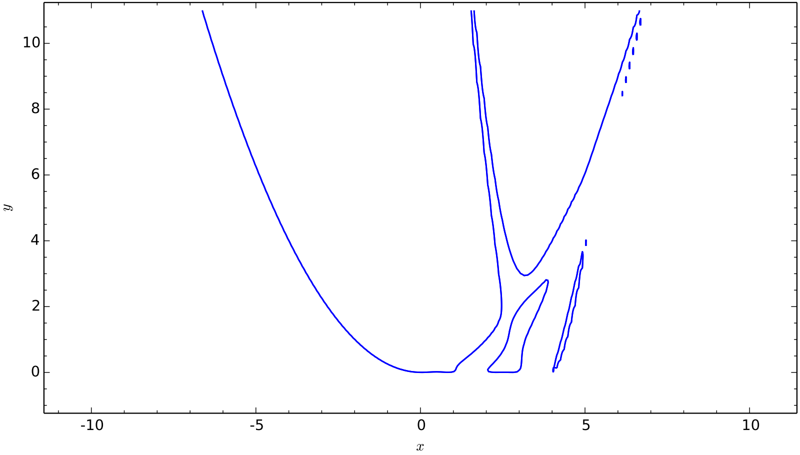
$$x = X(u, v), \quad y = Y(u, v), \quad z = Z(u, v).$$

Ее называют абелевой поверхностью.

Пример

```
sage: x=var('x')
sage: P = lambda x: x*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)
sage: R.<x,y,z,x1,y1,x2,y2> = PolynomialRing(QQ,7)
sage: I = R * [x-(x1+x2), y-x1*x2, z-(y1+y2), y1^2-P(x1),y2
    ^2-P(x2)]
sage: I.elimination_ideal([x1,y1,x2,y2])
Ideal (x^10 - 20*x^9 - 10*x^8*y + 170*x^8 + 180*x^7*y + 35*
    x^6*y^2 - 800*x^7 - 1360*x^6*y - 540*x^5*y^2 - 50*x^4*y
    ^3 - 2*x^5*z^2 + 2273*x^6 + 5600*x^5*y + 3400*x^4*y^2 +
     600*x^3*y^3 + 25*x^2*y^4 + 20*x^4*z^2 + 10*x^3*y*z^2 -
     3980*x^5 - 13686*x^4*y - 11100*x^3*y^2 - 2790*x^2*y^3
    - 160*x*y^4 - 4*y^5 - 70*x^3*z^2 - 80*x^2*y*z^2 - 10*x*
    y^2*z^2 + 4180*x^4 + 20380*x^3*y + 19649*x^2*y^2 +
    6000*x*y^3 + 280*y^4 + 100*x^2*z^2 + 210*x*y*z^2 + 40*y
    ^2*z^2 + z^4 - 2400*x^3 - 18400*x^2*y - 17840*x*y^2 -
    5092*y^3 - 48*x*z^2 - 200*y*z^2 + 576*x^2 + 9600*x*y +
    6720*y^2 - 2304*y) of Multivariate Polynomial Ring in x
    , y, z, x1, y1, x2, y2 over Rational Field
sage: S=I.elimination_ideal([x1,y1,x2,y2]).gens()[0]
```

Пример: сечение плоскостью $z = 1$.



Произвольное сечение плоскостью $z = \mathrm{const.}$ неприводимо и имеет род 12.

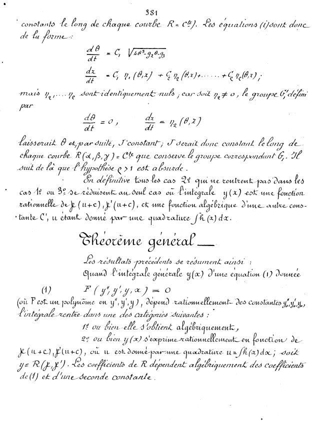
Вейерштрасс: абелевы функции и дифференциальные уравнения

В 1880-х годах Вейерштрасс предлагал своим ученикам приложить эту теорию к интегрированию дифференциальных уравнений в конечном виде.

- Уравнения движения волчка допускают в одном случае решение вида $x = \mathrm{Al}(at + C_1, bt + C_2)$ (Ковалевская).
- Задача 3-х тел не допускает интеграла движения, который можно было бы выразить в абелевых квадратурах (Брунс).
- Между теорией интегрирования дифференциальных уравнений в элементарных функциях, развитой Лиувиллем, и теорией интегрирования в абелевых функциях есть какая-то связь (Кёнигсбергер).

Алгебраические изыскания Пенлеве

- 1890 г. Memoire sur les equations differentielles du primier ordre // Œuvres. T. 2. Paris, 1974. Pag. 237-461.
- 1897 г. Leçons sur la theorie analytique des equations differentielles. Paris, 1897 = Œuvres. T. 1. Paris, 1971
- 1900 г. Приложение к книге P. Boutroux // Œuvres. T. 2. Paris, 1974. P. 767-813


381

constants le long de chaque courbe $R = C^{te}$). Les équations (1) sont donc de la forme :

$$\frac{d\theta}{dt} = C_1 \sqrt{4\theta^3 - g_2\theta - g_3}$$

$$\frac{dz}{dt} = C_1\, \eta_1(\theta, z) + C_2\, \eta_2(\theta, z) + \dots\dots + C_\rho\, \eta_\rho(\theta, z);$$

mais $\eta_2, \dots \eta_\rho$ sont identiquement nuls ; car soit $\eta_2 \neq 0$, le groupe G_1' défini par

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \qquad \frac{dz}{dt} = \eta_2(\theta, z)$$

laisserait θ et, par suite, J constant ; J serait donc constant le long de chaque courbe $R(\alpha, \beta, \gamma) = C^{te}$ que conserve le groupe correspondant G_1. Il suit de là que l'hypothèse $\rho > 1$ est absurde.

En définitive tous les cas 2° qui ne rentrent pas dans les cas 1° ou 3° se réduisent au seul cas où l'intégrale $y(x)$ est une fonction rationnelle de $\wp(u+c)$, $\wp'(u+c)$, et une fonction algébrique d'une autre constante C', u étant donné par une quadrature $\int h(x)\,dx$.

Théorème général —

Les résultats précédents se résument ainsi :

Quand l'intégrale générale $y(x)$ d'une équation (1) donnée

$$F(y'', y', y, x) = 0 \tag{1}$$

(où F est un polynôme en y'', y', y), dépend rationnellement des constantes y_0'', y_0', y_0, l'intégrale rentre dans une des catégories suivantes :

1° ou bien elle s'obtient algébriquement,

2° ou bien $y(x)$ s'exprime rationnellement en fonction de $\wp(u+c)$, $\wp'(u+c)$, où u est donné par une quadrature $u = \int h(x)\,dx$; soit $y = R(\wp, \wp')$. Les coefficients de R dépendent algébriquement des coefficients de (1) et d'une seconde constante.

Теоремы Пенлеве

Теорема

Если общее решение дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \quad f \in k[y]$$

зависит от константы алгебраически, то уравнение сводится алгебраической заменой к уравнению Риккати.

Пример: уравнение Бернулли

$$y' = p(x)y + q(x)y^n, \quad y = (\alpha(x)C + \beta(x))^{-1/(n+1)}$$

Теоремы Пенлеве

Теорема

Если общее решение дифференциального уравнения

$$F(y', y, x) = 0, \quad F \in k[y', y]$$

зависит от константы алгебраически, то уравнение или сводится алгебраической заменой к уравнению Риккати, или решается в эллиптических функциях.

Пример:

$$(y')^2 = p(x)(4y^3 - g_2 y - g_3), \quad y = \wp\left(\int \sqrt{p(x)}dx\right).$$

Теоремы Пенлеве

Теорема

Если общее решение дифференциального уравнения

$$F(y'', y', y, x) = 0, \quad F \in k[y'', y', y]$$

зависит от обеих константы алгебраически, то уравнение или решается в абелевых функциях и их вырождениях, или сводится к паре уравнений Риккати.

Пример: в случае Ковалевской движения волчка решение выражается через

$$\mathrm{Al}(t + C_1, C_2).$$

Базовый пример

Точке (y_0', y_0) кривой

$$F(y_0', y_0; x_0) = 0$$

решение задачи Коши

$$\begin{cases} F\left(\frac{dy}{dx}, y; x\right) = 0 \\ y|_{x=x_0} = y_0,\ y'|_{x=x_0} = y_0' \end{cases}$$

ставит в соответствие точку кривой

$$F(y', y; x) = 0$$

Несмотря на теорему Коши, соответствие между слоями x_0 и x не вз.-однозначное.

Шаги доказательства Пенлеве

1. Пенлеве сводит дифференциальное уравнение, общее решение которого зависит от констант алгебраически, к уравнению, общее решение которого задает бирациональное соответствие между начальными и конечными слои.
2. Слои как многообразия допускают непрерывную группу бирациональных автоморфизмов.

Предыстория: Софус Ли, 1880-е г., рассматривал дифференциальные уравнения, общие решения которых задают проективные преобразования между слоями.

Современный взгляд на ранние работы Пенлеве

- В 1912 г. Шлезингер связал отыскание дифференциальных уравнений, обладающих свойством Пенлеве, с задачей Римана.
- Гарнье, 1919, доказал, что упрощенные уравнения для этих уравнений (или вообще для всех?) интегрируются в абелевых функциях. При этом появилась матричная конструкция, подозрительно напоминающая пару Лакса.
- Окамото, 1979, рассмотрел трансцендентные Пенлеве как аналитические преобразования начальных и конченых данных.

Поэтому ранние работы Пенлеве — подготовка к более поздней теории, в ней еще не появились трансцендентные Пенлеве.

Цель нашего исследования

Для современных авторов важно расширить понятие функции, вводить все новые и новые трансцендентные функции. Для авторов XIX века было важно понять, почему все общеупотребимые трансцендентные функции были известны еще во времена Гаусса.

Наблюдение Пенлеве

Зафиксировав *алгебраические* свойства общего решения, можно выделить класс общеупотребимых *трансцендентных* функций.

Можно построить аналог теории Галуа для дифференциальных уравнений, не фиксировав класс допустимых трансцендентных функций.

Основные объекты

- k — поле функций, напр., $\mathbb{C}(t, \sin t)$.
- K — алгебраически замкнутое дифференциальное расширение поля k, напр., поле рядов Пюизё.
- $\mathfrak{p} = (g_1, \ldots g_m)$ — простой идеал кольца $k[x_1, \ldots, x_{2n}]$.
- $\mathfrak{p}^K$ — расширение $\mathfrak{p}$, которое тоже предполагается простым.
- $V(\mathfrak{p}/k)$, $V(\mathfrak{p}/K)$ — аффинные многообразия в A^{2n} над соотв. полем
- $R(\mathfrak{p}/k)$, $R(\mathfrak{p}/K)$ — поля рац. функций на этих многообразиях.
- $S(\mathfrak{p}/K)$ — подмножество точек $V(\mathfrak{p}/K)$, уд. усл.

$$\dot{x}_i = x_{i+n}, \quad i = 1, \ldots n,$$

которое можно интерпретировать как множество решений системы

$$\{g_1(x_1, \ldots, \dot{x}_1, \ldots) = 0, \ldots$$

Условия

1. Система д.у. вполне совместна над K: для любой $f \in K[x_1, \ldots, x_{2n}]$ верно

$$f(q) = 0 \, \forall q \in S(\mathfrak{p}/K) \quad \Rightarrow \quad f \in \mathfrak{p}^K.$$

2. Система замкнута: для поля $R(\mathfrak{p}/K)$ можно указать такое дифференцирование D, что

$$\frac{d}{dt} f(q) = Df(q), \quad \text{причем } Dx_i \in R(\mathfrak{p}/k).$$

Ядро дифференцирования D — поле рациональных интегралов $I(\mathfrak{p}/K)$. Множество коэффициентов этих функций на $V(\mathfrak{p}/k)$ конечно порождено над k; базис трансцендентности — трансценденты, вводимые интегрированием системы д.у.

Основная задача

Задача

Перечислить трансцендентные функции, которые возникают при интегрировании систем д.у.

Отличие от стандартных теорий Галуа. Зингер, 1991, рассматривает интегралы, которые являются элементарными функциями в смысле Лиувилля, т.е. фиксирует список допустимых трансцендентных операций. Мы же пытаемся исследовать разрешимость задачи «в конечном виде», не фиксировав этот список.

Свойства поля интегралов

Если несколько интегралов $R_1, \ldots R_r$ зависимы над K, то есть

$$S(R_1, \ldots R_n; t) = 0,$$

то они зависимы и над $\mathbb{C}$. Отсюда:

Теорема

Поле интегралов I как расширение поля констант $\mathbb{C}$ бирационально эквивалентно полю рациональных функций на некоторой гиперповерхности, размерность которой в точности равна числу независимых рациональных интегралов системы д.у.

Свойства поля интегралов

Теорема

Если интегрирование системы д.у. вводит r трансцендент, то поле интегралов допускает r-параметрическую группу $\mathbb{C}$-автоморфизмов.

Доказательство.

(i) Базис поля трансцендент над K — функции $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_r(t)$ — удовлетворяют алгебраической системе дифференциальных уравнений.
(ii) Заменяя функции $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_r(t)$ в интеграле $R(x, \alpha)$ на любое другое решение этой системы, опять получим интеграл. Тем самым будет задан автоморфизм поля интегралов. □

Связь с алгебраической геометрией

Следствие (из теорем 4 и 5; Труды ПОМИ, 2014)

Если интегрирование системы д.у. вводит r трансцендент, то поле интегралов эквивалентно полю рациональных функций на гиперповерхности, допускающей r-параметрическую группу бирациональных преобразований в себя.

Это позволяет превратить утверждения теории автоморфизмов гиперповерхностей в утверждение об интегралах системы дифференциальных уравнений.

Размерность равна 1

Теорема (Шварц, Пикар, 1870-е годы)

Если кривая допускает r-параметрическую группу автоморфизмов, то ее род равен 0 или 1.

- Кривые рода нуль эквивалентны прямой, группа автоморфизмов — 3-параметрическая группа др.-линейных подстановок:

$$\xi' = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}.$$

- Кривые рода один эквивалентны эллиптическим кривым вида

$$\eta^2 = P(\xi), \quad \partial P = 3,\, 4.$$

  Координаты ξ, η можно представить как эллиптические функции параметра τ; сдвиги по τ составляют однопараметрическую группу.

Следствие

Теорема

Если поле интегралов системы д.у. изоморфно полю рациональных функций на прямой, то интегрирование этой системы вводит:

- *или три трансценденты, в качестве которых можно взять три любые решения некоторого уравнения Риккати,*
- *или две трансценденты, в качестве которых можно взять два любые решения некоторого линейного неоднородно дифференциального уравнения 1-го порядка,*
- *или одну трансценденту, в качестве которых можно взять любое решение некоторого линейного однородно дифференциального уравнения 1-го порядка.*

Следствие

Теорема

Если поле интегралов системы д.у. изоморфно полю рациональных функций на эллиптической кривой

$$\eta^2 = P(\xi),$$

то интегрирование этой системы вводит одну трансценденту

$$\wp\left(\int \lambda dt\right),$$

где λ — функция переменной t, алгебраическая над k.

Интегрирование заданного уравнения 1-го порядка

Если уравнение

$$g(x, \dot{x}; t) = 0$$

допускает пару интегралов R_1 и R_2, связанных уравнением рода 1, то решение дифференциального уравнения дается квадратурой

$$\int_O^{(R_1, R_2)} H(\xi, \eta) d\xi = \int hdx + sdt = C.$$

Точная форма

$$hdx + sdt$$

имеет рациональные на кривой g коэффициенты и всюду конечна.

Вспомогательная задача

Для заданной кривой

$$g(x, y; t) = 0 \quad (g \in k[x, y])$$

построить линейную систему всюду конечных точных форм

$$hdx + sdt,$$

имеющих постоянные периоды, в предположении, что h, s — рациональные функции на кривой g, коэффициенты которых или 1.) алгебраичны над k, или 2.) лежат в K.

Решение методом сечений

Решение следует искать в виде

$$h(xy;t) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(t) h_i(xy;t),$$

где λ_i — неизвестные коэффициенты. Условие — интеграл

$$\int \frac{\partial h}{\partial t} dx = s$$

берется в алгебраических функциях — дает p уравнений

$$\sum_{i=1}^{p} g_{ij} \lambda_i = 0, \quad j = 1, \ldots p$$

и p дифференциальных уравнений

$$\dot{\lambda}_j = \sum_{i=1}^{p} g'_{ij} \lambda_i, \quad j = 1, \ldots p.$$

Пример

$$\dot{x}^2 = (1 - x^2)(1 - g(t)x^2).$$

Тогда

$$h = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-g(t)x^2)}}, \quad h' = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)(1-g(t)x^2)}},$$
$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{x^2(1-x^2)\dot{g}}{2(1-x^2)^{3/2}(1-g(t)x^2)^{3/2}} = g'h - gh' + \frac{\partial s'}{\partial x}$$

Интеграл от этого выражения будет алгебраическим, если $g' = g = 0$, то есть если $\dot{g} = 0$.
Вывод: искомый интеграл существует, если g не зависит от t, и он равен

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-gx^2)}} + \lambda(t)dt.$$

Что нам нужно из теории поверхностей?

Пусть поверхность S допускает r-параметрическую группу автоморфизмов $\mathfrak{G}$. Возьмем произвольную кривую C на поверхности и рассмотрим семейство кривых $\mathfrak{G}C$.

1. Кривые семейства $\mathfrak{G}C$ линейно неэквивалентны, поэтому в силу теоремы Кастельнуово-Энрикеса-Севери на поверхности имеется r линейно независимых всюду конечных 1-форм. $\Rightarrow$ Для системы д.у. можно составить r всюду конечных интегральных 1-форм, причем интегралы берутся в абелевых функциях.
2. Кривые семейства $\mathfrak{G}C$ линейно эквивалентны, поэтому на поверхности имеется линейное семейство кривых, элементы которого группа $\mathfrak{G}$ переставляет. $\Rightarrow$ Интегрирование системы вводит трансцендентны, которые являются решениями линейной системы д.у.

Автоморфизмы поверхностей

Согласно Энрикесу (1905, 3-c-6b, no. 39), поверхности, допускающие бесконечное число автоморфизмов, бирационально эквивалентны след.:

- абелевы многообразия размерности 2,
- эллиптические поверхности, т.е. поверхности, координаты которых можно выразить рационально через параметр u и пару эллиптических функций $\wp(v)$, $\wp'(v)$ параметра v,
- некоторые линейчатые поверхности, в т.ч. плоскость.

Два независимых интеграла, первый случай

На абелевой поверхности имеется две 1-формы, конченые во всех точках:

$$H_i(x_1, y_1)dx_1 + H_i(x_2, y_2)dx_2, \quad i = 1, 2$$

Если поле рациональных интегралов интегралов системы

$$\dot{x} = f(x, y, z; t),\ \dot{y} = f(x, y, z; t),\ F(x, y, z; t) = 0$$

эквивалентно полю рациональных функций на абелевой поверхности, то ее решение дается квадратурами

$$\int p_{11}dx + p_{12}dy + q_1 dt = C_1, \quad \int p_{21}dx + p_{22}dy + q_2 dt = C_2.$$

Два независимых интеграла, первый случай

Квадратуры

$$\int p_{11}dx + p_{12}dy + q_1 dt = C_1, \quad \int p_{21}dx + p_{22}dy + q_2 dt = C_2$$

имеют те же периоды, что и

$$H_i(x_1, y_1)dx_1 + H_i(x_2, y_2)dx_2, \quad i = 1, 2$$

Поэтому они берутся в абелевых функциях, поэтому решение можно выразить алгебраически через

$$\mathrm{Al}\left(\int \lambda_1 dt, \int \lambda_2 dt\right), \ldots$$

где λ_i — функции переменной t, алгебраические над k.
Пример: случай Ковалевской вращения волчка.

Два независимых интеграла, второй случай

Если два интеграла связаны уравнением рода 1, то получится один интеграл вида

$$\int p_1 dx + p_2 dy + q dt = C_1,$$

который возьмется в эллиптических функциях.
Пример: вращение симметричного волчка.

Автоморфизмы плоскости

Автоморфизмы плоскости удивительно богаты; согласно Энрикесу (1893 г., 3-с-11, no. 64), подгруппы группы Кремоны, зависящие от конечного числа параметров, суть

- 8-параметрическая группа группа проективных преобразований плоскости (коллинеаций)
- 6-параметрическая группа квадратичных преобразований, переставляющая коники линейной системы кривых второго порядка, имеющих две различные базовые точки
- $(n+5)$-параметрическая группа преобразований Жонкьера произвольного порядка n, переставляющие элементы пучка прямых и линейной ∞^{n+1}-системы кривых n-го порядка с базовой точкой кратности $(n-1)$ в центре пучка прямых и $(n-1)$-ой неподвижной касательной в этой точке.

Два независимых интеграла, третий случай

Группа преобразований Жонкъера переставляет линии уровня некоторого интеграл R, то есть под действием этой группы R испытывает др.-линейные подстановки. Поэтому коэффициенты R выражаются алгебраически через решения уравнения Риккати. Добавив их к полю основных функций, а интеграл — к системе д.у. получим новую задачу рассмотренного вида.
В оставшихся случаях трансцендентны будут решениями линейных уравнений.

Описание трасцендент в случае любой размерности

Гипотеза

Если интегрирование системы дифференциальных уравнений вводит несколько трасцендент, то система допускает рациональные интегралы, коэффициенты которых выражаются алгебраически через элементы поля основных функций k и

- абелевы функции вида

$$\mathrm{Al}\left(\int \lambda_1 dt, \ldots, \int \lambda_p dt\right),$$

  где λ_k — функции переменной t, алгебраические над k,
- или решения некоторой системы линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которой алгебраичны над k.

Конец