Об интегрировании дифференциальных уравнений

Мих. Дмитр. Малых* **

*Факультет наук о материалах МГУ.

**Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей РУДН.

malykhmd@yandex.ru

Компьютерная алгебра
Москва, 29 июня - 2 июля 2016.
Версия от 2 іюля 2016 г.

Практическая неразрешимость

Неспособность отыскать символьное решение дифференциального уравнения той или иной CAS ничего не говорит о сложности уравнения.

SageMath version 7.2, Release Date: 2016-05-15

```
sage: y=function('y')(x)
sage: desolve(diff(y,x)==(x-y)^2,y)
(...)
Maxima was unable to solve this ODE.
```

Уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = F(x - y)$$

оказываются «неразрешимыми» во всех свободных CAS, поскольку они используют Soldier Мозеса, написанный в начале 1960-х годов.

Задача Коши

Maple 17

```
> dsolve(diff(y(x), x) = (x-y(x))^4, y(x));
y(x) = -tan(RootOf(-2*_Z+ln(-tan(_Z)+1)
                    -ln(-tan(_Z)-1)+4*x+_C1))+x
```

- Зачем система пыталась выразить y через x?
- Как отсюда найти $y|_{x_1}$ по известному значению y_{x_0}? — Применить дифференциально параметрический метод, то есть вернуть обратно к задаче Коши и решить ее численно.

Идеальный метод интегрирования

- Неспособность метода проинтегрировать заданное дифференциальное уравнение должно быть понятной и наглядной характеристикой решения дифференциального уравнения.
- Получающиеся уравнение $u(x, y) = C$ интегральных кривых должно быть возможно разрешить относительно y в символьном виде.

К этому идеалу близко подходит метод, указанный Пенлеве в его первых чисто алгебраических работах (1890 г.).

Класс $\mathcal{A}$

Определение

Говорят, что дифференциальное уравнение

$$pdx + qdy = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$$

принадлежит классу $\mathcal{A}$, если его общее решение $y = f(x, C)$ зависит от константы C алгебраически.

1. Можно ли выяснить за конечное число действий, принадлежит ли заданное дифференциальное уравнение классу $\mathcal{A}$?
2. Можно ли в случае утвердительного ответа на первый вопрос, выписать общее решние в символьном виде?

Трансцендентные решения

Частные решение уравнения, принадлежащего классу $\mathcal{A}$, могут быть трансцендентными функциями, но лишь конченое их число алгебраически независимо над полем $\mathbb{C}(x)$.

Пример

Общее решение уравнения

$$y' = xy + x^2$$

зависит от константы линейно, всякое его решения выражается линейно через фиксированных частных решения.

Сведение к уравнению Риккати

Теорема (Painlevé, 1890)

Если $podx + qdy \in \mathcal{A}$, *то существует подстановка*

$$z = \frac{\alpha_0(x)y^N + \ldots \alpha_N(x)}{\beta_0(x)y^N + \ldots \beta_N(x)}, \quad \alpha_0, \dots \in \overline{\mathbb{Q}(x)}$$

которая переводит исходное уравнение в уравнение Риккати.

Элементарная теория интегрирования ОДУ — иллюстрация к этой теореме.

Пример

Уравнение Бернулли принадлежит классу $\mathcal{A}$:

$$y' = p(x)y + q(x)y^n \quad \Rightarrow \quad y = (\alpha(x)C + \beta(x))^{-1/(n+1)}$$

и сводится к уравнению Риккати.

Сведение к уравнению Риккати - 2

Теорема

Если $pdx + qdy \in \mathcal{A}$, *то существует и притом единственная подстановка*

$$z = \frac{\alpha_0(x)y^N + \dots \alpha_N(x)}{\beta_0(x)y^N + \dots \beta_N(x)}, \quad \alpha_0, \dots \in \overline{\mathbb{Q}(x)}$$

которая переводит исходное уравнение в уравнение Риккати, а три произвольные функции — в другие три произвольные функции.

Док-во: неопубл.

Поскольку подстановка — единственная, задача об ее отыскании должна быть линейной.

Пример

Уравнение:

$$(x^4 - 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 - y^2)dx + (x^2 + 2xy - y^2)dy = 0$$

Ищем подстановку 2-го порядка, оставляющая на месте $0, 1$ и ∞:

$$z = \frac{y(y + a_1)}{a_2y + (1 + a_1 - a_2)}.$$

Ответ:

$$z = \frac{1 - x}{1 + x}\frac{y(y + x)}{y - x}.$$

Нерешенная трудность: определение порядка подстановки.

Пример: решение при помощи пакета riccati.sage

```
sage: x,y,a1,a2=var('x,y,a1,a2')
sage: p=x^4 - 2*x^3*y + 2*x*y^3 + y^4 + 2*(x^2 - 1)*y^2
sage: q=x^2 + 2*x*y - y^2
sage: u=y*(y+a1)
sage: v=y*a2 +(1+a1-a2)
sage: J=riccati_ideal(x,y,p,q,[a1,a2],u,v)
sage: J.elimination_ideal(a2).gens()[0].factor()
(-1) * (-a1 + x) * (a1 + 1) * x^4 * (6*x^2 - 1)
sage: J.elimination_ideal(a1).gens()[0].factor()
a2 * x^4 * (6*x^2 - 1) * (a2*x - a2 + x + 1)
```

Проблема отыскания N

За конечное число действий, можно выяснить, имеется ли подстановка порядка N, сводящая уравнение к уравнению Риккати, или нет.
Однако:

1. на практике вычисления уже при $N = 2$ занимают много времени и ресурсов,
2. в теории не найдено никаких оценок на N.

Проблема отыскания порядка — общая для многих методов интегрирования дифференциальных уравнений.

Отыскание решения уравнения класса $\mathcal{A}$

1. Если уравнение принадлежит классу $\mathcal{A}$, то любое его решение можно выразить алгебраически через три частные решения. Для отыскания этих трех, вообще говоря, трансцендентных решений, проще всего использовать метод конечных разностей.
2. Метод конечных разностей имеет с классом $\mathcal{A}$ нетривиальную связь.

Метод конечных разностей

Даны: $p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$ и числа x_0, y_0, x_{end}.
Требуется найти число y_{end}, т.е. значение решения начальной задачи

$$pdx + qdy = 0,\ y|_{x_0} = y_0$$

при $x = x_{\text{end}}$.
Решение: делим отрезок $x_0 < x < x_{\text{end}}$ на N частей длины Δx точками

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N = x_{\text{end}},$$

знаем значения $y = y_0$ при $x =_0$, остальные находим приближенные значения решения в этих точках по явной схеме Эйлера

$$p(x_n, y_n)\Delta x + q(x_n, y_n)(y_{n+1} - y_n) = 0$$

в цикле for по n.

Особые точки

Если решение $y = y(x)$ задачи Коши

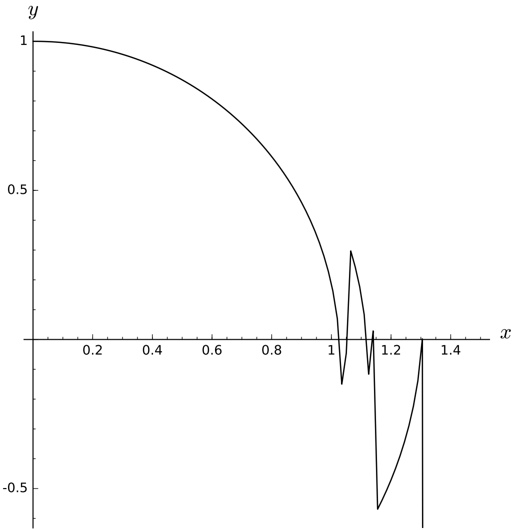
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y), \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

на отрезке $x_0 < x < x_{\mathrm{end}}$ не имеет особых точек, то

$$|y(x_n) - y_n| \leq C\Delta x, \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

См., напр., [Hairer et all.], теорема 3.6.
В силу теоремы Реллиха нелинейные дифференциальные уравнения имеют особые точки, положения которых зависят от начальных данных и потому заранее неизвестно. При прохождении через подвижные особые точки решение «разваливается».

Пример: $xdx + ydy = 0$



Эйлер -> А.Н. Крылов -> Н.Н. Калиткин

Со времен Эйлера в курсах численных методов стало традицией иллюстрировать метод конечных разностей уравнением Риккати

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2,$$

имеющим подвижные полюса и сопровождать след. комментарием.

> *«...Чем быстрее значение этой функции меняется от одного промежутка к следующему, тем большую можно ожидать погрешность. Это невыгодное обстоятельство имеет место обыкновенно там, где значения $f(x, y)$ или уничтожаются, или же становятся бесконечно большими.»*

Поправка к схеме Эйлера

Если поправить явную схему Эйлера для уравнения Риккати

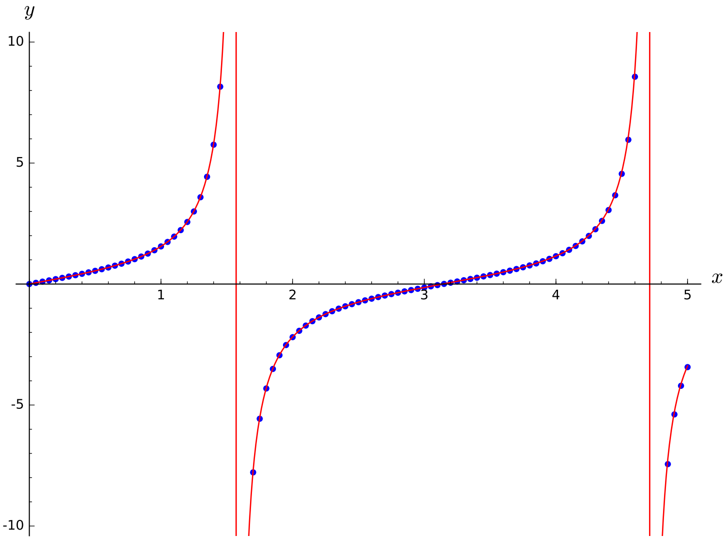
$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = p(x_n) + q(x_n)y_n + r(x_n)y_n^2$$

на другую схему

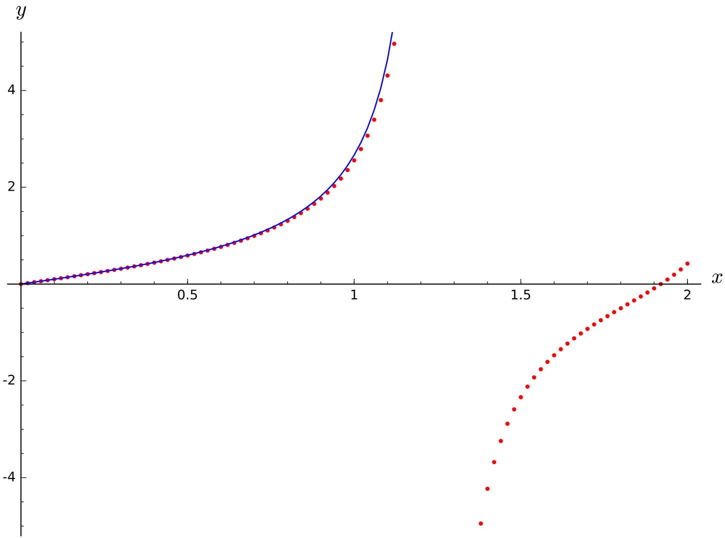
$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = p(x_n) + q(x_n)y_n + r(x_n)y_n y_{n+1},$$

«невыгодное обстоятельство» исчезает.

Пример 1: $y' = 1 + y^2$



Пример 2: $y' = (1 + x^2) + xy + x^2y^2$



Слои

В численных методах обычно принимают, что $y_0, y_1, \ldots, y_N$ — десятичные дроби, мы же будем рассматривать их как символьные переменные.
Область изменения переменной y_n будет называть n-м слоем, $(n+1)$-ый слой будем называть следующим за n-м и т.д.
Разностная схема

$$F_n(y_n, y_{n+1}) = 0, \quad F_n \in \mathbb{Q}[y_n, y_{n+1}]$$

задает алгебраическое соответствие между соседними слоями.

Свойства уравнения Риккати

- Общее решение уравнения Риккати является дробно-линейной функцией константы:
$$y = \frac{\alpha(x)C + \beta(x)}{\gamma(x)C + \delta(x)}.$$
- Ангармоническое отношение любых четырех частных решений постоянно:
$$(y^1, y^2, y^3, y^4) = C.$$
- Подвижные особые точки решения уравнения Риккати — полюса (свойство Пенлеве).

Соответствие между слоями, версия 1

По заданному значению y_n можно однозначно определить значение y_m решения начальной задачи

$$\begin{cases} y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2, \\ y|_{x_n} = y_n \end{cases}$$

при $x = x_m$ и наоборот.

Satz (аналитическое свойство)

Уравнение Риккати задает между слоями взаимно-однозначное соответствие.

Уточнение. Поскольку x_{n+1} может оказаться полюсом, поэтому далее слои считаются проективными прямыми.

Соответствие между слоями, версия 2

Общий интеграл

$$\frac{\alpha(x)y+\beta(x)}{\gamma(x)y+\delta(x)}=C$$

уравнения Риккати задает дробно-линейное соответствие между слоями:

$$\frac{\alpha(x_n)y_n+\beta(x_n)}{\gamma(x_n)y_n+\delta(x_n)}=\frac{\alpha(x_m)y_m+\beta(x_m)}{\gamma(x_m)y_m+\delta(x_m)}$$

Satz (алгебраическое свойство)

Уравнение Риккати задает между слоями дробно-линейное соответствие.

Уравнение Риккати, схема Эйлера

Схема Эйлера

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = p(x_n) + q(x_n)y_n + r(x_n)y_n^2$$

ставит в соответствие точке y_n одну точку на следующем слое, а точке y_{n+1} — две точки на предыдущем слое, то есть задает $(1, 2)$-соответствие между соседними слоями.

Между n и $n + m$ слоем соответствие будет типа $(1, 2^m)$.

Само уравнение Риккати задает (1,1)-соответствие между слоями.

Использовать схему Эйлера — аппроксимировать однозначную функцию многозначной.

Уравнение Риккати, (1,1)-схема

Подправленная схема

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\Delta x}=p(x_n)+q(x_n)y_n+r(x_n)y_ny_{n+1}$$

задает $(1,1)$-соответствие между слоями.

Теорема

Вычисление по $(1,1)$-разностной схемой решения уравнения Риккати проходит через полюса без заметного накопления ошибки.

Док-во: [Малых, 2015]

Соответствие между слоями в общем случае

Дифференциальное уравнение может задавать неоднозначное соответствие между слоями.

Пример

Дифференциальное уравнение

$$xdx + ydy = 0$$

имеет своим интегралом

$$x^2 + y^2 = C;$$

уравнение

$$x_n^2 + y_n^2 = x_m^2 + y_m^2$$

задает $(2, 2)$-соответствие между слоями.

Пример (продолжение)

Противоречит ли это теореме Коши?
По теореме Коши начальная задача

$$\begin{cases} x + yy' = 0, \\ y|_{x_n} = y_n \end{cases}$$

имеет и притом единственное решение

$$y = y_n + (x - x_n)\mathfrak{P}(x - x_n)$$

в малой окрестности $x = x_n$, размеры которой зависят от y_n.
Нельзя предполагать, что x_{n+1} всегда попадает в эту окрестность.

Пример (продолжение)

Чтобы найти значения решения начальной задачи

$$\begin{cases} x + yy' = 0, \\ y|_{x_n} = y_n \end{cases}$$

в точке $x = x_m$, следует соединить точки x_n и x_m кривой L и продолжить решение вдоль этой кривой и вычислить значение получившейся ветви аналитической функции в точке $x = x_m$.

При изменении кривой L будут получаться различные значения для y_m.

В силу принципа аналитических продолжений равенств в данном случае получится двузначная функция.

Пример (продолжение)

Satz

Уравнение

$$xdx + ydy = 0$$

задает $(2,2)$*-соответствие между слоями:*

$$x_n^2 + y_n^2 = x_m^2 + y_m^2$$

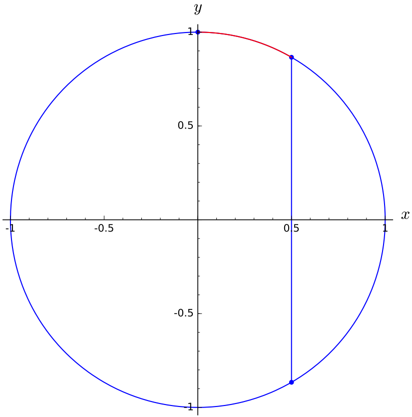
Одному значению y_n отвечают два значения y_m, в которых интегральная кривая

$$x^2 + y^2 = x_n^2 + y_n^2$$

пересекает прямую $x = x_m$.

Пример (продолжение)

Если $y_n \in \mathbb{R}$ и между x_n и x_m нет особой точки, то одно из них соединяется с начальными данными вещественной дугой интегральной кривой, а другое нет.



Проективное соответствие

Пусть имеет некоторое соответствие между проективный прямыми Y и Z. Обозначим как Z_y множество точек прямой Z, отвечающих точке $y \in Y$, в как Y_z — множество точек, отвечающих точек $z \in Z$.

Определение

Соответствие называется проективным, если

$$Z_y \cap Z_{y'} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad Z_y = Z_{y'}$$

и

$$Y_z \cap Y_{z'} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad Y_z = Y_{z'}.$$

Проективное соответствие индуцирует взаимно однозначное соответствие между

$$\{Y_z\}_{z\in Z} \quad \text{и} \quad \{Z_y\}_{y\in Y}.$$

Произвольное ОДУ, точное решение

Теорема

Дифференциальное уравнение

$$pdx + qdy, \quad p, q \in \mathbb{C}[x, y]$$

всегда задает проективное соответствие между слоями.

Док-во получается из теоремы Пенлеве о подвижных особенностях.
В общем случае это соответствие не является алгебраическим, множества $Y_{n+1}(y_n)$ устроены очень сложно. Это свойство, вообще говоря, нельзя сохранить в разностной схеме, которая всегда задает алгебраические соответствия между слоями.

ОДУ класса $\mathcal{A}$

Теорема

Дифференциальное уравнение класса $\mathcal{A}$ задает проективное алгебраическое соответствие между слоями.

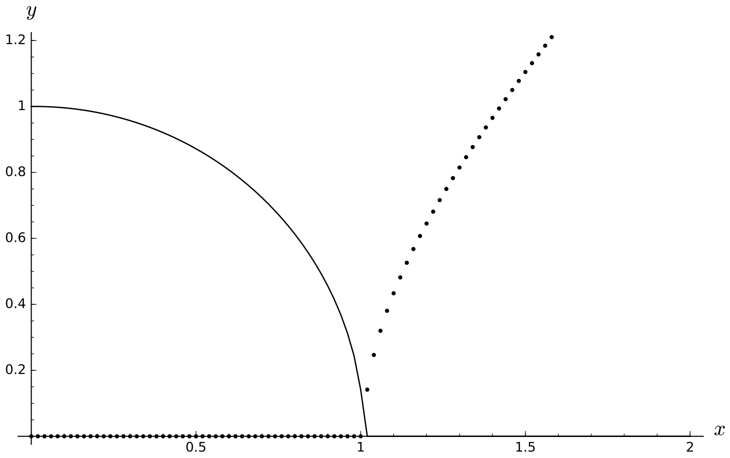
Для уравнения класса $\mathcal{A}$ и только для него (?!) можно составить разностью схему, которая задает проективное (N, N)-соответствие между любыми слоями.

- Переход с n-го слоя на $(n+2)$-й — исключение y_{n+1} из системы

$$F_n(y_n, y_{n+1}) = 0, \quad F_{n+1}(y_{n+1}, y_{n+2}) = 0.$$

- При прохождении особых точек не накапливается ошибка.

Пример: $(2,2)$ проективная схема для $xdx + ydy = 0$



Заключение

Выделенный Пенлеве класс $\mathcal{A}$ дифференциальных уравнений удобен как для численного, так и символьного решения.

- Уравнения класса $\mathcal{A}$ сводятся к уравнению Риккати и решаются по методу конечных разностей без накопления ошибки при прохождения через подвижные особые точки.
- Символьное решение уравнения, не принадлежащие классу $\mathcal{A}$, невозможно использовать для решения начальной задачи.
- Численное решение уравнения, не принадлежащие классу $\mathcal{A}$, разваливается при переходе через особые точки.

Нерешенные проблемы

- Определение порядка N подстановки, сводящей уравнение к уравнению Риккати.
- Создание прямого алгоритма составления проективных разностных схем.

Литература

- Малых М.Д. Об отыскании рациональных интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений по методу М.Н. Лагутинского // Вестник НИЯУ МИФИ, 2016. Том 5, № 3, с. 35-44.
- Малых М.Д. О дифференциальных уравнениях, общее решение которых является алгебраической функцией константы // Вестник НИЯУ МИФИ, 2016. Том 5, № 2. С. 152-161.
- Малых М.Д. О трансцендентных функциях, возникающих при интегрировании дифференциальных уравнений в конечном виде // Записки научных семинаров ПОМИ. 2015. Т. 432. Стр. 196-223.
- Малых М.Д. О приближенном решении дифференциальных уравнений, общее решение которых зависит от константы алгебраически // Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика. 2015. № 3. С. 5-9.

Конец

© 2016 г., Михаил Дмитриевич Малых.
Текст доступен на условиях лицензии Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Вычисления выполнены при помощи SageMath version 7.2, Release Date: 2016-05-15.
Дополнительные материалы доступны на сайте автора.

http://malykhmd.neocities.org