

# Абелевы интегралы в лекциях Вейерштрасса

М. Д. Малых

Материалы к факультативному курсу лекций,  
читаемому на кафедре математики физического факультета МГУ.  
Москва, 2003-2006 гг., 2011 г.

# Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>3</b>
<b>1 Алгебраические уравнения</b>	<b>5</b>
1.1 Неприводимые уравнения . . . . .	5
1.2 Исключение одной неизвестной из системы двух уравнений .	6
1.3 Случай, когда результат тождественно равен нулю . . . . .	11
<b>2 Алгебраические кривые</b>	<b>16</b>
2.1 Подготовительная теорема Вейерштрасса . . . . .	17
2.2 Униформизация окрестности регулярной точки . . . . .	20
2.3 Униформизация окрестности особой точки . . . . .	22
2.4 Бесконечно удаленные точки и их окрестности . . . . .	29
2.5 Локальная униформизация эллиптической кривой . . . . .	29
<b>3 Теория главной функции</b>	<b>32</b>
3.1 Рациональные функции одной переменной и пары $(xy)$ . . .	32
3.2 Главная функция . . . . .	38
3.3 Разложение в ряд для главной функции . . . . .	41
3.4 Жанр алгебраической кривой . . . . .	46
3.5 Построение рациональной функции с заданными полюсами .	49
3.6 Главная функция для эллиптической кривой . . . . .	51
3.7 Соотношение между $\frac{d}{dx}H(xy, x'y')$ и $\frac{d}{dx'}H(x'y', xy)$ . . . . .	53
<b>4 Абелевы интегралы</b>	<b>57</b>
4.1 Абелевы интегралы как функции верхнего предела . . . . .	57

4.2	Разложение произвольного интеграла на интегралы трех родов	61
4.3	Линейное пространство голоморфных дифференциалов . . .	65
4.4	Периоды интегралов первого и второго рода . . . . .	67
4.5	Периоды интеграла третьего рода . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Интегрирование в элементарных функциях</b>	<b>78</b>
5.1	Интегрирование в алгебраических функциях . . . . .	78
5.2	Интегрирование в элементарных функциях . . . . .	80

# Предисловие

В 70-х годов XIX века в берлинском университете КАРЛ ВЕЙЕРШТРАСС читал лекции по своей теории аналитических функций, венцом которой была теория абелевых интегралов. Вейерштрасс не публиковал свои результаты в журналах, а за записями его лекций из крупнейших университеты мира отряжали целые экспедиции. С 1875 ХЕТТНЕР и КНОБЛАУХ работали над изданием текстом лекций, состоявшемся 1902 в качестве 4 тома собрания трудов Вейерштрасса<sup>1</sup>. В настоящей работе пересказываются первые две части лекций Вейерштрасса по изданию 1902 года, при этом в непрерывный текст лекций внесено деление на теоремы. Изложению предшествуют необходимые сведения из алгебры. Последний раздел посвящен напрашивающемуся приложению теории главной функции к интегрированию в элементарных функциях.

На русском языке имеется несколько изложений вейерштрассовских лекций, написанных ЕРАМАКОВЫМ<sup>2</sup>, М. ТИХОМАНДРИЦКИМ<sup>3</sup> и П.М. ПОКРОВСКИМ<sup>4</sup>, однако все они написаны до 1902 и их авторы неизбежно располагали весьма отрывочными сведениями о подходе Вейерштрасса. На мой взгляд из трех авторов Покровский, располагая самой несовершенной записью лекций, составил наиболее точное представление о сути метода Вейерштрасса. Когда же лекции Вейерштрасса стали доступны, и у нас в стране исчез интерес к ним, лишь в 1970-х в связи с юбилеем С.В. Ковалев-

---

<sup>1</sup>WEIERSTRASS K. Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten // Math. Werke. Bd. 4. Berlin, Mayer&Müller, 1902

<sup>2</sup>Ермаков. Теория абелевых функций без римановой поверхности. (Это издание мне не доступно).

<sup>3</sup>Тихомандрицкий М. Основания теории абелевых интегралов. Харьков, 1895.

<sup>4</sup>Покровский П.М. О рациональных функция эллиптического образа. М, 1900.

ской была написана биография Вейерштрасса<sup>5</sup>, содержащая популярный и в связи с этим неполный обзор содержания лекций.

---

<sup>5</sup>Полубаринова-Кочина П.Я. Карл Вейерштрасс.

# Глава 1

## Алгебраические уравнения

### 1.1 Неприводимые уравнения

Пусть  $x, y$  — переменные, а  $f(x, y)$  — произвольный полином. Соотношение вида  $f(x, y) = 0$  называют алгебраическим уравнением, связывающим переменные  $x$  и  $y$ . Если функция  $f(x, y)$  не может быть представлена в виде произведения двух целых рациональных функций от  $x$  и  $y$ , то будем называть уравнение  $f(x, y) = 0$  *неприводимыми*<sup>1</sup>.

Выяснить приводимо или нет заданное уравнение на практике помогает следующий критерий

**Теорема 1.1** (Критерий Эйзенштейна<sup>2</sup>). Уравнение

$$f(x, y) = a_n(x)y^n + \dots + a_0(x) = 0$$

неприводимо, если все коэффициенты  $a_i(x)$ , кроме старшего  $a_n(x)$ , имеют общий нуль  $x = a$ , простой для младшего коэффициента  $a_0(x)$ .

*Доказательство.* Допустим противное, что, именно, верно  $f(x, y) = g(x, y)h(x, y)$  при

$$g(x, y) = b_d(x)y^d + \dots + b_0(x), \quad h(x, y) = c_m(x)y^m + \dots + c_0(x)$$

и  $d, m \geq 1, b_d c_m \neq 0$ . По условию  $f(a, y) = a_n(a)y^n \neq 0$ . Это означает, что  $g(a, y)h(a, y) = a_n(a)y^n$ . В силу однозначность разложения полинома  $P(y)$ ,

---

<sup>1</sup>ЭЙЛЕР Л. Введение в анализ бесконечных. Кн.1, гл. 5

<sup>2</sup>См. ЛЕНГ С. Алгебра, гл. 5, § 7.

имеем

$$g(a, y) = b_d(a)y^d, \quad h(a, y) = c_m(a)y^m$$

Значит,  $b_0(x)$  и  $c_0(x)$  делятся на  $p(x) = x - a$ . Но тогда

$$a_0(x) = b_0(x)c_0(x)$$

делится на  $p(x)^2$ , что невозможно. □

**Пример 1.1.1.** В качестве примера докажем неприводимость кривой

$$y^n + a(x) = 0,$$

где  $a(x)$  полином, имеющий простой корень  $x = \alpha$ . Для этого возьмем  $p(x) = x - \alpha$ . Старший коэффициент, то есть 1, на него не делится, все прочие (т.е.  $a(x)$ ), напротив делятся, наконец, младший коэффициент  $a(x)$  не делится на  $p(x)^2$ , поскольку  $\alpha$  — простой корень  $a(x)$ .

Существуют и более тонкие достаточные критерии приводимости и неприводимости; они реализованы Maple в пакете AlgCurves функцией AIrreduc. Эта функция имеет один аргумент — полином  $f$ , и возвращает три значения true, то есть да, неприводим, false, то есть, нет, приводим, и fail, когда ничего не получилось.

## 1.2 Исключение одной неизвестной из системы двух уравнений

Рассмотрим теперь систему двух алгебраических уравнений

$$\{F(x, y) = 0, G(x, y) = 0. \tag{1.1}$$

и найдем такие значения переменной  $x$ , при которых существует хотя бы одно решение  $y$  этой системы, то есть, как говорят, исключим из системы (1.1) переменную  $y$ .

Чисто алгебраические способы исключения были впервые указаны Эйлером<sup>3</sup> и Безу<sup>4</sup> Простейший способ исключения был предложен Сильвестром<sup>5</sup> и Гессе<sup>6</sup>.

Запишем  $F$  и  $G$  в виде

$$\begin{aligned} F(x, y) &= f_0(x)y^n + f_1(x)y^{n-1} + \dots + f_n(x), \\ G(x, y) &= g_0(x)y^m + g_1(x)y^{m-1} + \dots + g_m(x), \end{aligned}$$

где коэффициенты  $f_0, g_0$  не равны тождественно нулю. Если при некотором значении  $x = x_0$  система совместна и имеет решение  $y = y_0$ , тогда тоже решение имеет система

$$\begin{aligned} \{F(x, y) = 0, yF(x, y) = 0, \dots, y^{m-1}F(x, y) = 0, \\ G(x, y) = 0, \dots, y^{n-1}G(x, y) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n(x) + f_{n-1}(x)y + \dots + f_0(x)y^n = 0 \\ 0 + f_n(x)y + f_{n-1}(x)y^2 + \dots + f_0(x)y^{n+1} = 0 \\ \dots \\ 0 + \dots + 0 + f_n(x)y^{m-1} + f_{n-1}(x)y^m + \dots + f_0(x)y^{n+m-1} = 0 \\ g_m(x) + g_{m-1}(x)y + \dots + g_0(x)y^m = 0 \\ 0 + g_m(x)y + g_{m-1}(x)y^2 + \dots + g_0(x)y^{m+1} = 0 \\ \dots \\ 0 + \dots + 0 + g_m(x)y^{n-1} + g_{m-1}(x)y^n + \dots + g_0(x)y^{m+n-1} = 0 \end{array} \right.$$

Поэтому при  $x = x_0$  система  $n + m$  линейных уравнений вида

$$\mathfrak{A}(x)z = 0$$

<sup>3</sup>EULER. // Mem. de Berlin. 1764 (Bauer G.)

<sup>4</sup>BÉZOUT. // Mém. de Paris. 1764 (Bauer G.)

<sup>5</sup>SYLVESTER. // Philos. Mag. 1840, p. 372 (Bauer G.)

<sup>6</sup>HESSE. // Crelles Journal. 1843. Bd. 27 или Werke, p.85 (Bauer G.)

с матрицей

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} & f_{n-2} & \dots & f_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & f_n & f_{n-1} & \dots & & f_0 & 0 & \dots \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & f_n & \dots & & & f_0 \\ g_m & g_{m-1} & g_{m-2} & \dots & g_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & g_m & g_{m-1} & \dots & & g_0 & 0 & \dots \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & g_m & \dots & & & g_0 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

имеет нетривиальное решение

$$z = (1, y_0, y_0^2, \dots, y_0^{n+m-1})$$

Поэтому определитель матрицы  $\mathfrak{A}$  при  $x = x_0$  должен быть равен нулю. Этот определитель представляет собой полином по  $x$  и может быть сразу выписан при помощи одних арифметических действий для данных полиномов  $F$  и  $G$ .<sup>7</sup> Его называют *результантом полиномов  $F$  и  $G$  по  $y$* . Таким образом, мы доказали, что *результант  $R(x)$  полиномов  $F$  и  $G$  по  $y$  обращается в нуль во всех точках  $x$ , при которых совместна система (1.1)*.

Обращение этого утверждения все же требует некоторых усилий, поскольку уравнение  $R(x) = 0$  влечет лишь существование решения у линейной системы

$$\mathfrak{A}(x)z = 0,$$

но, вообще говоря, не существование решения вида

$$z = (1, y, y^2, \dots, y^{n+m-1}).$$

Тем не менее обращение нетрудно усмотреть из следующей чисто алгебраической леммы:

---

<sup>7</sup>Отметим, что при этом несущественно, считаем ли мы  $x$  — фиксированной точкой с известными комплексными координатами, или напротив, рассматриваем ее как переменную.

**Теорема 1.2.** Пусть  $\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_0, \dots, \beta_m$  — независимые переменные, тогда результат  $r$  полиномов

$$f = \alpha_0 \prod_{i=1}^n (y - \alpha_i), \quad g = \beta_0 \prod_{i=1}^m (y - \beta_i)$$

равен

$$r = \alpha_0^m \beta_0^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j).$$

*Доказательство.* (i) Пусть  $F(x_1, \dots, x_n)$  — полином, и пусть на гиперплоскости  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$  он обращается в нуль, тогда он делится нацело на  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ .

Для доказательства сделаем линейную замену переменных

$$y_1 = a_1x_1 + \dots + a_nx_n, \dots$$

и разложим  $F$  по степеням  $y_1$ :

$$F = F_0(y_2, \dots, y_n) + F_1(y_2, \dots) y_1 + F_2 y_1^2 + \dots$$

Поскольку при  $y_1 = 0$  и любых  $y_2, \dots, y_n$  он равен нулю, то  $F_0$  равно нулю тождественно, и поэтому

$$F = y_1(F_1 + y_1 F_2 + \dots) = (a_1x_1 + \dots + a_nx_n)G(x_1, \dots, x_n),$$

где  $G$  — некоторый полином.

(ii) Из выписанного выше выражения для результата получается, что он равен

$$R = \alpha_0^m \beta_0^n \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m),$$

где  $\varphi$  — полином. На гиперплоскости  $\alpha_i = \beta_j$  уравнения  $f(y) = 0$  и  $g(y) = 0$  совместны, поэтому результат равен нулю. В силу (i) отсюда следует, что  $R$  делится на все множители вида  $\alpha_i - \beta_j$ , то есть

$$h = \frac{r}{\alpha_0^m \beta_0^n \prod (\alpha_i - \beta_j)}$$

— полином относительно переменных  $\alpha_i, \beta_j$ .

Зафиксируем теперь значения  $\alpha_i$  и рассмотрим результат  $r$  как функцию коэффициентов  $a_i$  полинома  $g(y)$ . Поскольку результат полиномов  $f$  и  $\lambda g$  больше  $r$  в  $\lambda^n$  раз, то

$$r(\lambda a_0, \lambda a_1, \dots) = \lambda^n r(a_0, a_1, \dots),$$

то есть  $r$  есть однородная функция этих коэффициентов степени  $n$ . Используя

$$\beta_0 \prod (y - \beta_j) = g(y),$$

знаменатель  $h$  можно записать как

$$\alpha_0^m \prod_{i=1}^n g(\alpha_i),$$

то есть как целую однородную функцию коэффициентов той же степени  $n$ . Но это значит, что  $h$  является целой и однородной функцией коэффициентов  $a_i$  полинома  $g(y)$  степени нуль, а таковой может быть только константа. Это означает, что  $h$  не меняется при любом изменении коэффициентов полинома  $g(y)$ , а значит и при любом изменении переменных  $\beta_0, \beta_1, \dots$ . Меняя ролями  $\alpha$  и  $\beta$  видим, что

$$r = \text{const} \alpha_0^m \beta_0^n \prod (\alpha_i - \beta_j)$$

Наконец, подсчитав результат для  $y^m = 0$  и  $y^n = 1$ , видим, что  $\text{const} = 1$ . □

Выражение

$$R(x) = \begin{vmatrix} f_n & f_{n-1} & f_{n-2} & \dots & f_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & f_n & f_{n-1} & \dots & & f_0 & 0 & \dots \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & f_n & \dots & & & f_0 \\ g_m & g_{m-1} & g_{m-2} & \dots & g_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & g_m & g_{m-1} & \dots & & g_0 & 0 & \dots \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & g_m & \dots & & & g_0 \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

можно переписать, прибавив к первому столбцу второй, умноженный на  $y$ , третий, умноженный на  $y^2$  и т.д., тогда

$$R(x) = \begin{vmatrix} F(x, y) & f_{n-1} & f_{n-2} & \dots & f_0 & 0 & 0 & \dots \\ yF(x, y) & f_n & f_{n-1} & \dots & & f_0 & 0 & \dots \\ \dots & & & & & & & \\ y^{n-1}F(x, y) & 0 & \dots & f_n & \dots & & & f_0 \\ G(x, y) & g_{m-1} & g_{m-2} & \dots & g_0 & 0 & 0 & \dots \\ yG(x, y) & g_m & g_{m-1} & \dots & & g_0 & 0 & \dots \\ \dots & & & & & & & \\ y^{m-1}G(x, y) & 0 & \dots & g_m & \dots & & & g_0 \end{vmatrix}. \quad (1.4)$$

Поэтому результат  $R(x)$  всегда можно представить в виде

$$R(x) = U(x, y)F(x, y) + V(x, y)G(x, y),$$

где  $U$  и  $V$  — целые рациональные функции  $x$  и  $y$ , причем  $U$  по  $y$  степени не выше  $n - 1$ , а  $V$  по  $y$  — степени не выше  $n - 1$ .

### 1.3 Случай, когда результат тождественно равен нулю

Особо следует рассмотреть тот случай, когда результат  $R(x)$  тождественно равен нулю, а значит система совместна при всех  $x$  кроме конечного числа значений  $x$ , для которых  $f_0(x)g_0(x) \neq 0$ , то есть системы (1.1) имеет бесконечно много решений  $(x, y)$ .

Линейная замена переменных

$$x = ax' + by', \quad y = cx' + dy'$$

не меняет свойства системы (1.1) иметь бесконечное число решений. Поэтому можно сначала сделать такую линейную замену, чтобы у преобразованных уравнений старшие коэффициенты при  $y$  не зависели от  $x$ . Будем считать эти коэффициенты равными единице.

Поскольку  $F$  неприводим, то есть его нельзя представить в виде произведения двух полиномов  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ , тогда его нельзя и представить в виде произведения двух рациональных функций, целых только по  $y$ . Это сразу следует из теоремы:

**Теорема 1.3.** (Лемма Гаусса) Если полином  $f(y) = y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots = 0$  с целыми коэффициентами  $a_i$  можно представить как произведение множителей с рациональными коэффициентами, то есть

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_0 = (y^u + b_{u-1}y^{u-1} + \dots + b_0)(y^v + c_{v-1}y^{v-1} + \dots + c_0)$$

то коэффициенты  $b_i$  и  $c_i$  на самом деле целые.<sup>8</sup>

*Доказательство.* Допустим, что среди коэффициентов есть не целые. Тогда в знаменатель хотя бы одного из них входит некоторое простое число  $p$  или некоторый неприводимый полином от  $p(x)$ , то есть не являющийся произведением каких либо полиномов. Обозначим как  $s$  его наивысшую степень, входящую в хотя бы один из знаменателей  $b_i$ , а через  $s$  — наивысшую степень, входящую в хотя бы один из знаменателей  $c_i$ ; при этом хотя бы одно из чисел  $s$  и  $t$  больше нуля. Далее, обозначим как  $k$  такой индекс, что знаменатель  $b_k$  содержит  $p^s$ , а  $b_i$  при  $i > k$  не содержат столь большую степень  $p$ , аналогично введем индекс  $l$  для второго множителя. Тогда коэффициент

$$a_{k+l} = b_k c_l + b_{k+1} c_{l-1} + \dots + b_{k-1} c_{l+1} + \dots$$

должен благодаря слагаемому  $b_k c_l$ , которому не с чем сократиться, содержать в знаменателе множитель  $p^{s+l}$ , что невозможно.  $\square$

Теперь можно применить те же соображения, которые используются при делении целых чисел (*алгоритм Евклида*). Пусть задано два полинома  $f(y)$  и  $g(y)$  с коэффициентами из поля  $k$  и пусть степень  $g$  не больше чем степень  $f$ , тогда можно найти такой полином  $q_1$ , что

$$f(y) = q_1(y)g(y) + r_1(y),$$

---

<sup>8</sup>Эта теорема верна как для поля рациональных чисел, так и для поля рациональных функций

где степень полинома  $r_1$  строго меньше степени  $g$ . Полином  $r_1$  называют *остатком* от деления  $f$  на  $g$ .

Для его разыскания положим

$$f = \sum_{n=0}^N a_n y^n, \quad g = \sum_{n=0}^M b_n y^n, \quad q_1 = \sum_{n=0}^{N-M} c_n y^n$$

тогда полином

$$\sum a_n y^n - \sum c_n b_m y^{n+m}$$

будет степени, меньшей  $M$ , если коэффициенты при  $y^N, y^{N-1} \dots y^M$  будут равны нулю, но эти коэффициенты суть  $a_N - c_{N-M} b_M, a_{N-1} - c_{N-M-1} b_M - c_{N-M} b_{M-1}, \dots, a_M - c_0 b_M - c_1 b_{M-1} - \dots - c_M b_0$ . Приравнивая их нулю, получим

$$\begin{aligned} c_{N-M} &= \frac{a_N}{b_M}, \\ c_{N-M-1} &= \frac{a_{N-1} - c_{N-M} b_{M-1}}{b_M}, \\ &\dots \\ c_0 &= \frac{a_M - c_1 b_{M-1} - c_2 b_{M-2} - \dots - c_M b_0}{b_M} \end{aligned}$$

Поэтому взяв таковыми коэффициенты  $q_1$  добьемся того, что  $r_1 = f - q_1 g$  станет степени, меньшей степени  $g$ , что и требовалось.

*Общим делителем* полиномов  $f$  и  $g$  называют полином  $r$  с коэффициентами из  $k$  такой, что эти полиномы можно представить в виде  $f = f_1 r$  и  $g = g_1 r$ , где  $f_1$  и  $g_1$  — полиномы с коэффициентами из  $k$ . Общий делитель наибольшей степени со старшим коэффициентом, равным единице, называют *наибольшим общим делителем* (НОД).

Для разыскания наибольшего общего делителя применим процедуру де-

ления несколько раз

$$\begin{aligned}
 f &= q_1g + r_1, \\
 g &= q_2r_1 + r_2, \\
 &\dots, \\
 r_{m-2} &= q_m r_{m-1} + r_m, \\
 r_{m-1} &= r_m q_{m+1} + r_{m+1}
 \end{aligned}$$

и либо на  $m + 1$  шаге получим  $r_{m+1} \equiv 0$ , или дойдем до отличного от нуля полинома  $r_{m+1}(y)$  наименьшей, то есть нулевой степени, то есть до отличной от нуля константы  $r_{m+1}(y) \equiv a \neq 0$ .

В первом случае существуют такие полиномы  $f_1$  и  $g_1$ , что  $f(y) = f_1(y)r_m(y)$  и  $g(y) = g_1(y)r_m(y)$ , то есть  $f$  и  $g$  делятся на  $r_m$  без остатка. Более того, если  $r(y)$  наибольший общий делитель  $f$  и  $g$ , то он будет делителем  $r_1, r_2, \dots$ , поэтому наибольший общий делитель совпадает с  $r_m$ , и мы, стало быть, нашли алгоритм построения наибольшего общего делителя полиномов  $f$  и  $g$  и при этом оказалось, что он представим в виде

$$r(y) = u(y)f(y) + v(y)g(y),$$

где  $u$  и  $v$  некоторые полиномы. Во втором случае, наибольший общий делитель  $f$  и  $g$  должен быть делителем ненулевой константы  $r_{m-1}$ , то есть сам равен единице, и опять можно найти такие полиномы  $u$  и  $v$ , что

$$u(y)f(y) + v(y)g(y) = 1.$$

Отсюда между прочим следует, что если НОД равен единице, то полиномы  $f$  и  $g$  не имеют общих корней.

Описанный способ нахождения полиномов  $u$  и  $v$  называется *алгоритмом Евклида* и реализован в пакете `Maple` в виде функции `gcdex(f, g, y, 'u', 'v')` над полями рациональных чисел и рациональных функций.

В интересующем нас случае, когда  $k$  — поле рациональных функций  $x$ , мгновенно из неприводимости  $F(x, y)$  над полем рациональных функций  $x$

следует, что НОД  $F$  и  $G$  или равен  $F$  или единице. Во втором случае, из равенства

$$U(x, y)F(x, y) + U(x, y)G(x, y) = q(x),$$

в котором все функции целые, следует (1.1) имеет лишь конечное число решений. В первом же случае,  $G(x, y) = F(x, y)H(x, y)$ , где  $H(x, y)$  — рациональная функция, целая по  $y$ . В силу леммы Гаусса, эта функция является целой и по  $x$ , что и доказывает теорему ??.

## Глава 2

# Алгебраические кривые

Понятие алгебраической функции подразумевает неравноправность переменных  $x$  и  $y$ , однако при рассмотрении абелева интеграла можно считать  $x$  функцией  $y$ . Желая сохранить равноправие, мы рассмотрим сначала свойства алгебраических кривых, а затем вернемся к алгебраическим функциям.

Множество же точек  $(x, y)$  с комплексными координатами, удовлетворяющими уравнению  $f(x, y) = 0$ , называют *алгебраической кривой*. Будем всюду далее в этой главе считать уравнение  $f = 0$  неприводимым.

К числу наиболее изученных кривых относятся кривые вида

$$y^2 = P(x),$$

где  $P(x)$  — полином с простыми корнями. Как мы видели в примере 1.1.1, уравнение этой кривой неприводимо. Если степень  $P$  равна 2, то кривую, заданную этим уравнением называют тригонометрической, если эта степень равна 3 или 4, то кривую называют эллиптической, в противном случае говорят о гиперэллиптической кривой.

Изучение тригонометрической кривой не встречает затруднения. поскольку ее можно представить параметрически, напр., так

$$x = \sin(t), \quad y = \cos(t).$$

В общем случае не ясно, как найти такое представление (униформизацию кривой), поэтому мы вслед за Вейерштрассом покажем, как это сделать

локально в окрестности произвольной точки.

Под окрестностью произвольной точки  $(a, b)$  алгебраической кривой будем понимать пересечение обычной евклидовой окрестности точки  $(a, b)$  в  $\mathbb{C}^2$  и самой кривой. Нам бы хотелось все точки  $(x, y)$  кривой  $f(x, y) = 0$ , лежащие в достаточно малой окрестности заданной точки  $(a, b)$ , представить как однозначные функции  $x_t, y_t$  некоторого параметра  $t$  лежащего в некоторой области  $G$  так, чтобы между  $t$  из  $G$  и точками этой окрестности было взаимно однозначное соответствие.

К сожалению, окрестность точки  $(0, 0)$  кривой  $y^2 = x^2$  легко представить как объединение двух множеств

$$x = t, \quad y = t,$$

и

$$x = t, \quad y = -t$$

но нельзя представить единым выражением  $(x_t, y_t)$ . Поэтому *задачу о локальной униформизации* мы сформулируем осторожнее: представить окрестность произвольной точки как объединение множеств вида

$$x = x_t^{(n)}, \quad y = y_t^{(n)}, \quad t \in G_n$$

так, чтобы между  $t$  из  $G$  и точками этой окрестности было взаимно однозначное соответствие.

Для ее разрешения требуются два вспомогательных результата: обобщение теоремы о неявной функции и теория неизвестной из двух уравнений.

## 2.1 Подготовительная теорема Вейерштрасса

Начнем с теоремы, обобщающей элементарную теорему о неявной функции.

**Теорема 2.1** (Подготовительная теорема Вейерштрасса<sup>1</sup>). Пусть функция

$$g(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} g_{\nu}(x)y^{\nu}$$

голоморфна в точке  $(0, 0)$ , причем

$$g_0(0) = \dots = g_{m-1}(0) = 0, \quad g_m = 1.$$

Тогда существует голоморфная функция  $e(x, y)$ , не равная нулю при  $x = 0, y = 0$ , и многочлен степени  $m$

$$\omega(x, y) = \sum_{k=0}^m s_k(x)y^k$$

с голоморфными коэффициентами, такие, что

$$g(x, y) = e(x, y)\omega(x, y).$$

Если рассматривать  $g(x, y)$  как элемент кольца  $K \langle y \rangle$  степенных рядов от  $y$  с коэффициентами, голоморфными при  $x = 0$ , то можно сформулировать эту теорему так:  $g(x, y)$  может быть представлен в виде произведения обратимого элемента  $e(x, y)$  и полинома  $\omega(x, y)$ .

*Доказательство.* Запишем  $g$  в виде

$$g(x, y) = y^m \left( 1 + \sum_{\nu=0}^{m-1} g_{\nu}(x)y^{\nu-m} + \sum_{\nu>m} g_{\nu}(x)y^{\nu-m} \right),$$

Если обозначить

$$u = \sum_{\nu=0}^{m-1} g_{\nu}(x)y^{\nu-m}, \quad v = \sum_{\nu>m} g_{\nu}(x)y^{\nu-m}, \quad w = u + v$$

то

$$g = y^m(1 + w)$$

---

<sup>1</sup> Первое доказательство этой теоремы было дано Вейерштрассом в начале 1860-х [WEIERSTRASS K. Math. Werke. Bd. 3.], затем было предложено ряд модификаций этого доказательства, наиболее распространенное приведено у ФУКСА Л.Б.. Мы же приведем изящное и короткое доказательство этой теоремы, указанное ШТИКЕЛЬБЕРГЕРОМ в 1887 году, затем надолго забытое и лишь в 1968 году возвращенное к жизни К. ЗИГЕЛЕМ [ГРАУЭРТ-ЛИБ с. 51-53].

где  $w$  — ряд Лорана по  $y$ , причем  $u$  — его сингулярная, а  $v$  — регулярная части. Поскольку

$$g_0(0) = \dots = g_{m-1}(0) = 0,$$

можно так подобрать константы  $\delta$  и  $\rho$ , чтобы в области

$$|x| < \delta, \frac{\rho}{2} < |y| < \rho$$

функция

$$u = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{g_\nu(x)}{y^{m-\nu}}$$

была бы голоморфная и по абсолютному значению меньше  $1/2$ , а функция

$$v(x, y) = \sum_{\nu>m} g_\nu(x) y^{\nu-m}$$

была голоморфна в области

$$|x| < \delta, |y| < \rho$$

и тоже меньше  $1/2$  по абсолютному значению.

Первое сразу следует из неравенства

$$|u| < \max_{|x|<\delta, \nu} |g_\nu(x)| ((2/\rho)^m + \dots + 2/\rho),$$

а второе — из того, что  $v(x, y)$  — ряд по положительным степеням  $x, y$  и  $v(0, 0) = 0$ .

Тогда  $|w| < 1$  и вполне определено выражение

$$\ln(1 + w) \equiv w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \dots$$

Его можно разложить в ряд Лорана по  $y$  в рассматриваемом кольце  $\rho/2 < |y| < \rho$ . Обозначим его регулярную часть как  $A$ , а сингулярную часть как  $B$ . Тогда, понимая под  $\exp(z)$  ряд  $\sum z^\nu/\nu!$ , имеем

$$y^m \exp(\ln(1 + w)) = y^m(1 + w) = g(x, y)$$

откуда

$$g(x, y) \exp(-A) = y^m \exp(B)$$

Здесь в левой части стоит голоморфная функция в окрестности точки  $x = 0$ ,  $y = 0$ , следовательно, такова и правая часть. Но поскольку

$$\exp(B) = 1 + B + \dots$$

и  $B$  содержит только отрицательные члены как сингулярная часть ряда Лорана, справа неизбежно стоит полином степени  $m$ , причем его коэффициент при  $y^m$  равен 1. Полагая

$$\omega = y^m \exp(B), \quad e = \exp(A)$$

приходим к  $g = e\omega$ , где  $\omega$  — действительно полином указанного вида, а  $e$  — голоморфная в области  $|x| < \delta$ ,  $|y| < \rho$  функция, причем  $e(0, 0) = \exp(A(0, 0)) \neq 0$ .  $\square$

## 2.2 Униформизация окрестности регулярной точки

Обратимся теперь к локальной униформизации произвольной неприводимой алгебраической кривой

$$f(x, y) = 0.$$

Обозначив частные производные первого порядка от целой рациональной функции через  $f(x, y)_1$  и  $f(x, y)_2$ , второго порядка — через  $f(x, y)_{11}$ ,  $f(x, y)_{12}$ ,  $f(x, y)_{22}$  и т. д., по формуле Тейлора найдем

$$f(x, y) = f(a, b)_1(x - a) + f(a, b)_2(y - b) + \\ + \frac{1}{2}f(a, b)_{11}(x - a)^2 + f(a, b)_{12}(x - a)(y - b) + \frac{1}{2}f(a, b)_{22}(y - b)^2 + \dots$$

Разложение  $f(x, y)$  начинается с членов второй или большей степени от  $x - a$  и  $y - b$  только при такой точке  $(a, b)$ , в которой

$$f(a, b)_1 = 0 \quad \text{и} \quad f(a, b)_2 = 0$$

Условимся называть такие точки кривой особыми. Исключим их пока из рассмотрения.

Для того, чтобы не исследовать частные случаи, когда одна из  $f(a, b)_1$  и  $f(a, b)_2$  равна нулю, введем вместо  $x, y$  новые переменные  $s, t$ , положив

$$\begin{aligned} s &= f(a, b)_1(x - a) + f(a, b)_2(y - b), \\ t &= \alpha(x - a) + \beta(y - b), \end{aligned} \tag{2.1}$$

в котором константы  $\alpha$  и  $\beta$  можно взять любыми, лишь бы определитель

$$\beta f(a, b)_1 - \alpha f(a, b)_2 \neq 0.$$

При этом условии преобразование задает взаимно однозначное и непрерывное соответствие между переменными  $x, y$  и  $s, t$ .

В качестве окрестности  $U$  точки  $(a, b)$  возьмем множество

$$|\alpha(x - a) + \beta(y - b)| < \delta, \quad f(x, y) = 0$$

где  $\delta$  — некоторое произвольное число, значение которого мы уточним в дальнейшем так, чтобы сходились все получающиеся ряды. При линейно преобразовании (2.1) эта окрестность переходит в окрестность  $V$  вида

$$|s| < \delta, \quad F(s, t) = 0,$$

где

$$F(s, t) = s + (s, t)_2 + (s, t)_3 + \dots = 0,$$

а  $(s, t)_\mu$  означает целую однородную функцию  $\mu$ -ого порядка по  $s, t$ , и наоборот.

В силу подготовительной теоремы 2.1 уравнение  $F(s, t) = 0$  можно записать в виде

$$[s - A(t)]e(s, t) = 0,$$

где  $A(t) = \mathfrak{P}(t)$  — голоморфная в нуле функция, а  $e(s, t) \neq 0$  при достаточно малых  $s$  и  $t$ . Поэтому множество всех точек  $(s, t)$ , лежащих в  $V$ , аннулирует множитель  $s - A(t)$ , то есть это множество можно представить в виде

$$s = \mathfrak{P}(t).$$

Подставив  $s = \mathfrak{P}(t)$  в преобразование, обратное к (2.1), сразу получим, что точки окрестности  $U$  представимы в виде

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) = a - f(a, b)_2 t + \dots = \mathfrak{P}(t), \\ y &= \psi(t) = b + f(a, b)_1 t + \dots = \mathfrak{P}(t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  представляют собой степенные ряды по натуральным степеням  $t$ , которые имеют вид и сходятся в  $K_0$ . Между  $t$  и точками  $(x, y)$  соответствие взаимно однозначное, поскольку  $t = \alpha(x - a) + \beta(y - b)$ . Стало быть,  $t$  — униформизирующая переменная. Умножая  $t$  на подходящий множитель, мы можем добиться того, чтобы эти ряды сходились в единичном круге  $K_0 = \{|t| < 1\}$ .

**Теорема 2.2.** Для любой регулярной точки  $(a, b)$  кривой  $f(x, y) = 0$  найдется такая линейная функция  $T(x, y) = \alpha(x - a) + \beta(y - b)$ , что соотношение  $t = T(x, y)$  задает взаимно однозначное соответствие между точками малой окрестности точки  $(a, b)$  и единичным кругом  $K_0$  комплексной плоскости  $t$ , при этом все точки окрестности представимы в виде рядов

$$x = x_t = \mathfrak{P}_1(t), \quad y = y_t = \mathfrak{P}_2(t),$$

сходящихся в  $K_0$ .

### 2.3 Униформизация окрестности особой точки

Обратимся теперь к самому общему случаю, когда в окрестности точки  $(a, b)$  кривой  $f(x, y) = 0$  разложение в ряд Тейлора для полинома  $f$  имеет вид

$$f = (x - a, y - b)_\mu + (x - a, y - b)_{\mu+1} + \dots, \quad (\mu > 1)$$

где  $(u, v)_n$  — однородные функции порядка  $n$ , а  $(x - a, y - b)_\mu$  — однородная функция наименьшего порядка, не равная тождественно нулю. Если  $\mu > 1$ , говорят об особой точке порядка  $\mu$ .

При линейном отображении

$$u = \alpha(x - a) + \beta(y - b), \quad v = \gamma(x - a) + \delta(y - b)$$

плоскости  $(x, y)$  на плоскость  $(u, v)$  окрестность точки  $(x, y) = (a, b)$  переходит в окрестность точки  $(u, v) = O$ , а точки кривой  $f(x, y) = 0$  в точки кривой

$$F(u, v) = 0;$$

при этом всегда можно подобрать коэффициенты  $\alpha, \dots$  так, чтобы в окрестности точки  $O$

$$F(u, v) = v^\mu + g_1(u)v^{\mu+1} + \dots,$$

где  $g_1(u), \dots$  — полиномы относительно  $u$ .

В силу подготовительной теоремы Вейерштрасса 2.1, в некоторой окрестности точки  $O$ , скажем

$$|u| < \delta, \quad |v| < \varepsilon,$$

уравнение  $F = 0$  эквивалентно

$$v^\mu + s_1(u)v^{\mu-1} + \dots + s_\mu(u) = 0,$$

где  $s_1(u), \dots$  — голоморфные функции. Это означает, что в рассматриваемой области  $O$  лежит  $\mu$  в общем различных точек, имеющих одну и ту же координату  $u$ . При этом подразумевается, что лишь при некоторых значениях  $u$  эти точки могут совпадать. Если бы среди этих точек имелись совпадающие при всех  $u$ , то уравнения  $F = 0$  и  $F_v = 0$  были бы совместны при всех малых  $u$ . Но тогда их результат по  $v$  был бы тождественно равен нулю, а кривая  $F = 0$  была бы составлена из нескольких кривых, одна из которых — НОД этих двух полиномов. Это, однако, невозможно в силу неприводимости рассматриваемой кривой.

Сделаем теперь т.н. квадратичное преобразование

$$\xi = u, \quad \eta = \frac{v}{u},$$

которое задает бирациональное соответствие между плоскостями  $(u, v)$  и  $(\xi, \eta)$ , но имеет особенность вдоль прямой  $u = 0$  (или  $\xi = 0$ ) и "разрывает" окрестность этой точки. Поскольку полином  $F(\xi, \xi\eta)$  можно записать

как произведение  $\xi^\mu$  и некоторого полинома  $G(\xi, \eta)$ , то между точками кривой  $F = 0$ , лежащими вне прямой  $u = 0$ , и точками кривой  $G = 0$ , лежащими вне прямой  $\xi = 0$ , имеется взаимно однозначное соответствие.

При этом младший член  $(u, v)_\mu$  в  $F$  преобразуется в

$$(u, v)_\mu = (\xi, \eta\xi)_\mu = \xi^\mu(1, \eta)_\mu;$$

поскольку  $(u, v)_\mu$  содержит  $v^\mu$ , то полином  $(1, \eta)_\mu$  имеет степень  $\mu$  и старший коэффициент в нем равен единице. Значит,

$$(u, v)_\mu = \xi^\mu \prod_{i=1}^{\nu} (\eta - a_i)^{\mu_i} \quad (a_i \neq a_j)$$

и

$$G = \prod_{i=1}^{\nu} (\eta - a_i)^{\mu_i} + \xi(1, \nu)_{m+1}$$

В точке  $(\xi, \eta) = (0, a_i)$  это уравнение имеем уже меньшую особенность — именно, порядка, который не превышает  $\mu_i \leq \mu$ .

В силу подготовительной теоремы Вейерштрасса, в окрестностях точек  $(\xi, \eta) = (0, a_i)$  это уравнение эквивалентно соответственно уравнениям

$$(\eta - a_i)^{\mu_i} + g_i(\xi)(\eta - a_i)^{\mu_i-1} + \dots = 0.$$

Это означает, что существует такие  $\delta'$  и  $\varepsilon'$ , что в окрестности

$$|\xi| < \delta', \quad |\eta - a_i| < \varepsilon'$$

имеется  $\mu_i$  в общем различных точек  $(\xi, \eta)$  кривой  $G = 0$ , имеющих одну и ту же координату  $\xi$ . Ограничим изменение  $\xi$  константой  $\delta''$  столь малой, чтобы

$$\delta'' \leq \min(\delta, \delta'), \quad \delta''(\max |a_i| + \varepsilon) \leq \varepsilon;$$

тогда найденным  $\mu_1 + \dots = \mu$  точкам кривой  $G = 0$  отвечают точки  $(u, v) = (\xi, \xi\eta)$  кривой  $F = 0$ , лежащих в окрестности

$$|u| < \delta'', \quad |v| = |\xi||\eta| < \delta(\max |a_i| + \varepsilon) < \varepsilon$$

точки  $O$  и имеющих одну и ту же координату  $\xi$ . Но и всего таких точек у кривой  $F = 0$  имеется  $\mu$ , следовательно, любую точку, лежащую в достаточно малой окрестности  $O$ , можно получить как прообраз некоторой точки кривой  $G = 0$ , лежащей в окрестности одной из точек  $(\xi, \eta) = (0, a_i)$ .

Доказанное, можно сформулировать так: если в окрестности особой точки  $(a, b)$  порядка  $\mu$  кривой  $f = 0$ , младшая однородную функцию в ряде Тейлора для  $f$  раскладывается на множители

$$(x - a, y - b)_\mu = A \prod_{i=1}^{\nu} (g_i(x - a) - h_i(y - b))^{\mu_i}$$

то существует такое квадратичное преобразование плоскости в себя, при котором кривая переходит в кривую, на которой можно указать  $\nu$  точек порядков не выше  $\mu_1, \dots, \mu_\nu$ , малые окрестности которых находятся во взаимно однозначном соответствии с некоторой окрестностью точки  $(a, b)$ .

Если все множители  $(x - a, y - b)_\mu$  простые, то все точки кривой  $f(x, y) = 0$ , лежащие в некоторой малой окрестности точки  $(a, b)$ , можно представить как объединение прообразов окрестностей  $\mu$  простых точек преобразованной кривой. Коль скоро последние описываются рядами, выписанными в пред. разделе, а преобразование квадратичное, окрестность точки  $(a, b)$  описывается  $\mu$  различными дугами

$$x = a + t\mathfrak{P}_{1,i}(t), \quad y = b + t\mathfrak{P}_{2,i}(t), \quad |t| < r, \quad i = 1, \dots, \mu;$$

но обратное преобразование дается как

$$t = q\xi + p(\eta - a_i) = \frac{quv + p(v - a_iv)}{v} = \frac{Px + Qy}{\alpha(x - a) + \beta(y - b)},$$

то есть не линейной, но дробно-линейной функцией.

Если среди множителей  $(x - a, y - b)_\mu$  имеются кратные, то, применяя к каждой из этих точек преобразованной кривой ту же процедуру, вновь понизим порядок и в итоге за несколько шагов придем к тому же выводу: окрестность точки  $(a, b)$  описывается несколькими различными дугами

$$x = a + t\mathfrak{P}_{1,i}(t), \quad y = b + t\mathfrak{P}_{2,i}(t), \quad |t| < r, \quad i = 1, \dots;$$

но обратное преобразование дается как

$$t = T_i(x, y),$$

где  $T_i$  — некоторая рациональная функция.

Остается разобраться со случаем, когда ряд Тейлора для уравнения исходной кривой в точке  $(a, b)$  или уравнения полученной на некотором шаге преобразованной кривой в интересующей нас точке начинается с членов, которые можно записать как некоторую степень линейной функции, и последующие квадратичные преобразования не меняют ситуацию. Это означает, что имеется уравнение вида

$$F(\xi, \eta) = (h\xi - g\eta)^\mu + (\xi, \eta)_{\mu+1} + \dots = 0;$$

квадратичная подстановка

$$\xi = (g + \alpha\eta_1)\xi_1, \quad \eta_{r-1} = (h + \beta\eta_1)\xi_1$$

дает

$$F(\xi, \eta) = \xi_1^\mu F_1(\xi_1, \eta_1),$$

где полином

$$F_1(\xi_1, \eta_1) = C\eta_1^\mu + \xi_1(g + \alpha\eta_1, h + \beta\eta_1)_{\mu+1} + \dots, \quad (C \neq 0)$$

по предположению, опять имеет ту же особенность, то есть

$$F_1(\xi, \eta) = (h_1\xi - g_1\eta)^\mu + (\xi, \eta)'_{\mu+1} + \dots = 0 \quad (g_1 \neq 0);$$

и так  $r$  раз подряд. Но тогда

$$\xi_{r-1} = (g_{r-1} + \alpha_{r-1}\eta_r)\xi_r, \quad \eta_{r-1} = (h_{r-1} + \beta_{r-1}\eta_r)\xi_r$$

и далее,

$$\xi_{r-2} = \xi_r(g_{r-1}g_{r-2} + \dots), \quad \eta_{r-2} = \xi_r(g_{r-1}h_{r-2} + \dots)$$

...

$$\xi_1 = \xi_r(g_{r-1}g_{r-2} \dots g_1 + \dots), \quad \eta_1 = \xi_r(g_{r-1} \dots g_2 h_1 + \dots)$$

$$\xi = \xi_r(g_{r-1}g_{r-2} \dots g_1 g + \dots), \quad \eta = \xi_r(g_{r-1} \dots g_1 h + \dots)$$

причем  $g_{r-1}g_{r-2} \dots g_1g \neq 0$ .

Как уже отмечалось выше,  $F(\xi, \eta) = 0$  и  $\frac{\partial F}{\partial \eta} = 0$  могут быть совместны только при конечном наборе значений  $\xi$ , который мы исключим из рассматриваемой окрестности. Значит, их результат  $R(\xi)$  не исчезает тождественно, то есть

$$R(\xi) = \xi^\lambda(c_0 + c_1\xi + \dots),$$

где  $\lambda > 0$ , коль скоро точка  $(0, 0)$  особая. Подставляя сюда выражения  $\xi$  через  $\xi_r$  и  $\eta_r$ , имеем

$$R(\xi) = \xi_r^\lambda R_0(\xi_r, \eta_r),$$

причем  $R_0(0, 0) \neq 0$ .

Этот результат можно вычислить еще и другим способом. Вспомним, что существуют целые рациональные функции  $P(\xi, \eta)$  и  $Q(\xi, \eta)$ , такие, что

$$P(\xi, \eta)F(\xi, \eta) + Q(\xi, \eta)\frac{\partial F}{\partial \eta} = R(\xi)$$

Подставим сюда

$$F(\xi, \eta) = \xi_1^\mu F_1(\xi_1, \eta_1) = \dots = (\xi_1 \dots \xi_r)^\mu F_r(\xi_r, \eta_r),$$

и выражение

$$\frac{\partial F}{\partial \eta}$$

через  $x_r$  и  $\eta_r$ . Для нахождения последнего, заметим, что с одной стороны

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_1} = \frac{\partial F}{\partial \xi}(g + \alpha\eta_1) + \frac{\partial F}{\partial \eta}(h + \beta\eta_1),$$

а с другой

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_1} = \mu\xi_1^{\mu-1}F_1(\xi_1, \eta_1) + \xi_1^\mu \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1},$$

поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial \xi}(g + \alpha\eta_1) + \frac{\partial F}{\partial \eta}(h + \beta\eta_1) = \mu\xi_1^{\mu-1}F_1(\xi_1, \eta_1) + \xi_1^\mu \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1}$$

Аналогично, с одной стороны

$$\frac{\partial F}{\partial \eta_1} = \frac{\partial F}{\partial \xi}\alpha\xi_1 + \frac{\partial F}{\partial \eta}\beta\xi_1,$$

а с другой

$$\frac{\partial F}{\partial \eta_1} = \xi_1^\mu \frac{\partial F_1}{\partial \eta_1},$$

поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} \alpha + \frac{\partial F}{\partial \eta} \beta = \xi_1^{\mu-1} \frac{\partial F_1}{\partial \eta_1}.$$

Обращая эти равенства, видим, что

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \xi_1^{\mu-1} G(\xi_1, \mu_1),$$

где  $G$  — целая рациональная функция. Применяя те же размышления  $r$  раз, придем к

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = (\xi_1 \dots \xi_r)^{\mu-1} G(\xi_r, \mu_r)$$

Подставляя это в выражения для результата, получим

$$R(\xi) = (\xi_1 \dots \xi_r)^{\mu-1} \{ \xi_1 \dots \xi_r F_r P + GQ \} = (\xi_r)^{r(\mu-1)} \mathfrak{P}(\xi_r, \eta_r)$$

Сравнивая это с предыдущим выражением для результата имеем  $r(\mu - 1) \leq \lambda$ . Значит, величина  $r$  ограничена величинами  $\mu$  и  $\lambda$ , зависящими только от  $f(x, y) = 0$ , и рано или поздно указанная процедура обязательно понизит порядок особенности.

Для того, чтобы теорема об униформизации сохранила прежний вид, условимся считать, что особая точка указанного вида — это  $K$  особых точек с окрестностями  $U_k$ . Тогда можно утверждать следующее:

**Теорема 2.3.** Для любой точки  $(a, b)$  кривой  $f(x, y) = 0$  найдется такая рациональная функция  $T(x, y)$ , что соотношение  $t = T(x, y)$  задает взаимно однозначное и биголоморфное соответствие между точками малой окрестности точки  $(a, b)$  и единичным кругом  $K_0$  комплексной плоскости  $t$ .

Отметим еще, что выбор униформизирующей переменной определен с точностью до конформного преобразования круга  $K_0$  на себя, сохраняющего неподвижным начало координат. Разумеется, такое преобразование  $\tau =$

$F(t)$  не может иметь производную, равную нулю, поэтому оно неизбежно является сходящимся в  $K_0$  рядом вида

$$\tau = c_1 t + c_2 t^2 + \dots,$$

где  $c_1 \neq 0$ .

## 2.4 Бесконечно удаленные точки и их окрестности

Поскольку простейшие преобразования, напр.,

$$x' = 1/x, \quad y' = y$$

не переводят окрестность точки с  $x = 0$  в окрестность некоторой конечной точки, удобно добавить конечным точкам  $(a, b)$  бесконечно удаленные точки: напр., точка  $(a, \infty)$  принадлежит кривой, если существует последовательность конечных точек кривой  $(a_n, b_n)$ , такая, что  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow \infty$ .

Окрестность точки  $(a, \infty)$  введем как открытое односвязное множество, содержащее

$$|x - a| < \delta, \quad |1/y| < \delta.$$

Нетрудно заметить, что точка  $(a, \infty)$  принадлежит кривой тогда и только тогда, когда точка  $(a, 0)$  принадлежит кривой  $F(x, z) \equiv f(x, 1/z)z^n = 0$ . Более того, между окрестностями этой точки и бесконечно удаленной существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому теоремы (2.3) сразу приводит к тому, что окрестность бесконечно удаленной точки  $(a, \infty)$  может быть представлена как

$$x = \mathfrak{P}(t), \quad y = 1/\mathfrak{P}(t) = P(t).$$

## 2.5 Локальная униформизация эллиптической кривой

Под эллиптической кривой понимаю кривую

$$y^2 = P(x)$$

где  $P(x)$  — полином 3-ей или 4-ой степени. Поскольку кривая

$$y^2 = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

сводится (взаимно однозначной) заменой

$$x = \frac{1}{x'} + \alpha, \quad y = -\frac{y'}{(x')^2}$$

к кривой

$$y^2 = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

в дальнейшем мы будем рассматривать случай полинома третьей степени.

Пусть нули полинома  $e_1, e_2, e_3$  все различны. В качестве окрестности точки  $(a, \sqrt{P(a)})$  возьмем множество

$$|x - a| < \delta, \quad y^2 = P(x)$$

При  $a \neq e_i$  это множество может быть представлено в виде

$$x = a + t, \quad y = \sqrt{P(a+t)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

где  $t$  меняется в круге  $|t| \leq \min |a - e_i| = \delta$ . В случае  $a = e_1$  подставим  $x = e_1 + t^2$  в

$$y = \sqrt{P(x)} = \sqrt{t^2(e_1 - e_2 + t^2)(e_1 - e_3 + t^2)} = \pm t\mathfrak{P}(t)$$

Это означает, что пара функций

$$x(t) = e_1 + t^2, \quad y(t) = t\mathfrak{P}(t)$$

описывает всю рассматриваемую окрестность. В самом деле, пусть  $(x_1, y_1)$  — произвольная точка из рассматриваемой окрестности. Взяв одно из двух значений  $t_1 = \pm\sqrt{x_1 - e_1}$  и вычислив  $(x(t_1), y(t_1))$ , получим точку  $(x_1, y_2)$ , лежащую на кривой  $y^2 = P(x)$ . Поэтому  $y_2$  или равен  $y_1$ , или  $-y_1$ . Поменяв выбор корня при вычислении  $t_1$  мы и во втором случае получим  $y(t_1) = y_1$ . Поэтому любая точка окрестности представима в виде  $(x(t), y(t))$ , при этом выбор  $t$  предрешен однозначно. Таким образом,  $(e_i, 0)$  — особая точка.

Если  $x$  стремиться к бесконечности, то таково и  $y$ , и наоборот. Поэтому все бесконечно удаленные точки имеют вид  $(\infty, \infty)$ . Подставим  $x = 1/t^2$  в

$$y = \sqrt{P(x)} = \sqrt{(1 - t^2 e_1)(1 - t^2 e_2)(1 - t^2 e_3)/t^6} = t^{-3} \left(1 - \frac{e_1 + e_2 + e_3}{2} t^2 + t^4 \mathfrak{P}(t)\right)$$

Значит, при всех достаточно больших  $x$  все соответствующие  $y$  описываются так

$$y = t^{-3} \left(1 - \frac{e_1 + e_2 + e_3}{2} t^2 + t^4 \mathfrak{P}(t)\right), \quad \text{где } x = t^{-2}$$

Значит, у эллиптической кривой существует одна бесконечно удаленная точка.

## Глава 3

# Теория главной функции

При построении теории абелевых интегралов так или иначе стремятся следовать аналогии, существующей между рациональными функциями одного  $x$  и рациональными функциями на кривой. Поскольку аналогия не полная, то здесь возможны различные подходы. Мы последуем за Вейерштрассом, который положил в основу обобщение теории элементарных дробей.

### 3.1 Рациональные функции одной переменной и пары $(xy)$

Для вейерштрассовской теории алгебраических функций существенна аналогия, которую можно проследить между просто рациональными функциями  $R(x)$  и рациональными функциями  $R(xy)$  на алгебраической кривой. Первейшая теорема теории рациональных функций гласит: *рациональная функция принимает любое заданное значение  $a$  с учетом кратности  $t$  раз, причем число  $t$  ( $t$ .н. степень ( $grad$ ) рациональной функции) не зависит от  $a$* . Для распространения этой теоремы на рациональные функции на алгебраической кривой нужно ввести понятие кратности.

**Определение 3.1.** Говорят, что рациональная функция  $R(xy)$  принимает значение  $r$  кратности  $s$  в точке  $(a, b)$  алгебраической кривой  $f(x, y) = 0$ , если при подстановке пары функция  $(x_t, y_t)$ , униформизирующей окрестность

точки  $(a, b)$  в  $R(x, y)$  получим

$$R(x_t, y_t) = r + c_1 t^s + \dots$$

где  $c_1 \neq 0$ . Рациональная функция  $R(x, y)$  обращается в точке  $(a, b)$  в бесконечность порядка  $s$ , если при подставке пары функция  $(x_t, y_t)$ , униформизирующей окрестность точки  $(a, b)$  в  $R(x, y)$  получим

$$R(x_t, y_t) = c_1 t^{-s} + \dots$$

При этом, разумеется, не важно, представляет ли  $(x_t, y_t)$  элемент, центр которого конечен или бесконечен.

Мы будем предполагать далее, что кривая  $f(x, y) = 0$  неприводима, тогда не может быть нулей бесконечной кратности, поскольку это означало бы, что  $R(x, y)$  тождественно равно  $r$  в окрестности некоторой точки кривой. Иными словами, уравнения

$$R(x, y) = r, \quad f(x, y) = 0$$

имели бы бесконечно много совместных решений. Если кривая неприводима, это означает, что  $R(x, y) - r$  делится на  $f(x, y)$ , то есть  $R(x, y) = r + f(x, y)\Phi(x, y)$ . Понятно, что такую функцию пары мы считаем просто константой.

Пусть функция  $R(xy)$  принимает значение  $r$  в  $\sigma$  точках  $(x_1, y_1), \dots$  с кратностями  $s_1, \dots, s_\sigma$ . Выясним, в скольких точках функция  $R(xy)$  принимает значение  $r + \varepsilon$ , если  $\varepsilon$  меняется вдоль произвольной кривой на  $\varepsilon$ -плоскости. Если  $(x_t, y_t)$  описывает окрестность одной из этих точек, скажем  $(x_1, y_1)$ , то

$$R(x_t, y_t) = r + c_1 t^{s_1} + \dots$$

Уравнение

$$c_1 t^{s_1} + \dots = \varepsilon$$

или

$$c_1 t(1 + \mathfrak{P}(t)) = \sqrt[s_1]{\varepsilon}$$

имеет при достаточно малых  $|\varepsilon|$  в точности  $s_1$  корень и все они даются одним выражением

$$t = \Re(\sqrt[s_1]{\varepsilon})$$

Следовательно,  $R(xy)$  принимает значение  $r + \varepsilon$  в  $s = s_1 + s_2 + \dots$  различных точках с кратностью 1.

Допустим, что при некотором  $\varepsilon = \varepsilon_0$  число таких точек увеличивается, что происходит скачком. Это может произойти двумя способами: или при  $\varepsilon_0$  имелось  $s$  точек, а при всех больших (в смысле положения на кривой)  $\varepsilon$  стало  $s + 1$ , или при всех  $\varepsilon$ , меньших  $\varepsilon_0$  было  $s$  точек, а при  $\varepsilon_0$  их стало  $s + 1$ . И то, и другое невозможно, поскольку в силу доказанного в окрестности точки  $\varepsilon = \varepsilon_0$  имеется одно и тоже число нулей уравнения  $R(xy) = r + \varepsilon$ . Таким образом, *число точек, в которых  $R(xy)$  имеет значение  $r$ , с учетом кратности не зависит от выбора  $r$ . Это число называют степенью (grad) рациональной функции  $R(xy)$ .*

Второе важнейшее предложение теории рациональных функций одной переменной состоит в возможности разложение произвольной функции на элементарные дроби. Один из способов его доказательства опирается на теорему о вычетах: если  $F(x)$  — рациональная функция, то

$$[F(1/t)]_t = \sum [F(a_\nu + t)]_{t-1}, \quad (3.1)$$

где  $a_\nu$  — все полюса  $F(x)$ .

Сказанное является переформулировкой теоремы Коши. В самом деле, пусть  $\mathfrak{C}$  — контур на плоскости  $x$ , содержащий все точки  $a_\nu$  внутри себя, то по теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} F(x) dx = \sum [F(a_\nu + t)]_{t-1}$$

а с другой стороны

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} F(x) dx = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}'} F(1/y) \frac{dy}{y^2}$$

где  $\mathfrak{C}'$  — контур, получающийся из  $\mathfrak{C}$  после замены  $x$  на  $y$ . Так как контур  $\mathfrak{C}$  обходит  $x = 0$  по часовой стрелки,  $\mathfrak{C}'$  обходит  $y = 0 = 1/\infty$  против часовой стрелки, поэтому последний интеграл равен

$$+[F(1/t)t^2]_{t^{-1}} = [F(1/t)]_t$$

Объединяя два полученных выражения, получим доказываемое (3.1).

Соотношение (3.1) можно записать еще так

$$\sum [F(x_t) \frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}} = 0, \quad (3.2)$$

где  $x_t$  пробегает все элементы "кривой"  $x = y$ , в том числе и бесконечно удаленный. В самом деле, число членов в этой сумме конечно, и более того, вклад в сумму дают лишь элементы с центром в  $x = a_\nu$ , то есть в полюсе  $F(x)$ , и, быть может, бесконечно удаленный элемент. Элементы с центром в  $x = a_\nu$  имеют вид

$$x_t = a_\nu + t,$$

а бесконечно удаленный элемент

$$x_t = t^{-1}.$$

Подставляя эти выражения в (3.2), получим в точности (3.1).

Замечательно то, что соотношение (3.2) прямо переносится на случай произвольной алгебраической кривой:

**Теорема 3.1.** Для любой рациональной функции  $F(xy)$  на неприводимой кривой  $f(x, y) = 0$  справедливо соотношение

$$\sum [F(x_t y_t) \frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}} = 0, \quad (3.3)$$

где  $(x_t, y_t)$  пробегает все элементы кривой, в том числе и бесконечно удаленные.

Если  $(x_t y_t)$  описывают окрестность точки  $(ab)$ , то число

$$[F(x_t y_t) \frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}}$$

независим от выбора униформизирующей переменной  $t$  и называется вычетом функции  $F(x_t y_t)$  в точке  $(ab)$ . Теорема, стало быть, утверждает, что сумма вычетов рациональной функции пары  $(xy)$  равна нулю.

*Доказательство.* В выражении

$$F(x_t y_t) \frac{dx_t}{dt}$$

отрицательные степени  $t$  могут встретиться лишь в двух случаях: когда центр  $(x_t, y_t)$  — полюс  $F(xy)$  и когда производная  $x_t$  по  $t$  содержит отрицательные степени. Последнее возможно только при бесконечно удаленных элементов с центром  $x = \infty$ , число которых конечно. Значит, написанная сумма конечна.

Пусть  $a_1, \dots, a_m, \infty$  — все значения  $x$ , при которых  $F(x, y)$  обращается в бесконечность хотя бы при одном возможном выборе  $y$ .

Обозначая вновь как  $n$  степень  $f(x, y)$  по  $y$ , видим, что значению  $x = a_\nu$  отвечает  $n$  в общем различных значений  $y = b_\nu^{(k)}$ , то центр вида  $(a_\nu, b)$  имеют  $n$  неэквивалентных элементов вида

$$x_t = a_\nu + t, \quad y_t = P_k(t), \quad k = 1, \dots, n.$$

Тогда сумма

$$\sum [F(x_t y_t) \frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}}$$

по этим  $n$  элементам может быть перепимана так

$$[\sum_k F(a_\nu + t, P_k(t))]_{t^{-1}}$$

Но это ни что иное, как вычет функции

$$F(x) = \sum_k F(x, y^{(k)})$$

в точке  $x = a_\nu$ , причем эта функция является рациональной функцией одного  $x$ , поскольку она зависит от корней  $f(x, y) = 0$  симметричным образом.

Если же значению  $x = a_\nu$  отвечают кратные корни  $f(a_\nu, y) = 0$ , то все сказанное остается в силе. В самом деле, рассмотрим вычет функции

$$F(x) = \sum_{k=1}^n F(x, y^{(k)})$$

Теперь число  $k$  элементов вида  $(a_\nu, b)$  меньше  $n$  и они имеют вид

$$x_t^1 = a_\nu + t^{\sigma_1}, \quad y_t^1 = P_1(t), \dots$$

При  $\tau \neq 0$  одному значению  $x = a_\nu + \tau$  отвечают  $n$  различных значений  $y$ . С другой стороны заданному  $x_t^1 = a_\nu + \tau$  отвечает  $\sigma_1$  различных значений  $t$ , а значит,  $\sigma_1$  значений  $y_t^1$ , причем все эти значения получаются, если в выражении

$$P_1(\sqrt[\sigma_1]{\tau})$$

подставить  $\sigma_1$  значений корня  $\sqrt[\sigma_1]{\tau}$ . Эти значения различны, поскольку соответствие между точками алгебраической кривой и  $t$  взаимно однозначное. Прodelывая то же с остальными  $k - 1$  парами функций, получим  $\sigma_1 + \dots + \sigma_k$  различных значений  $y$ . Если  $\sigma_1 + \dots + \sigma_k < n$ , то имеются еще точки кривой  $(x, y(x))$  при любом  $x$ , сколь угодно близком к  $a_\nu$ . Выделяя последовательность  $x_n$ , сходящуюся к  $a_\nu$ , так, чтобы  $y(x_n)$  имело конечный или бесконечный предел, получим еще одну неучтенную точку кривой вида  $(a_\nu, y)$ , что невозможно. Поэтому  $\sigma_1 + \dots + \sigma_k = n$  и вычет  $F(x)$  равен

$$\sum_{r=1}^k \sum [F(a_\nu + \tau, P_r(\sqrt[\sigma_r]{\tau}))]_{\tau^{-1}}$$

где внутренняя сумма берется по всем возможным значениям корня  $\sqrt[\sigma_r]{\tau}$ . Но выражение

$$\sum [F(a_\nu + \tau, P_r(\sqrt[\sigma_r]{\tau}))]_{\tau^{-1}} = \sigma_r [F(a_\nu + t^{\sigma_r}, P_r(t))]_{t^{-\sigma_r}},$$

которое в свою очередь равно

$$[F(a_\nu + t^{\sigma_r}, P_r(t)) \frac{dt^{\sigma_r}}{dt}]_{t^{-\sigma_r}}.$$

Поэтому вычет  $F(x)$  в точке  $x = a_\nu$  равен вновь

$$\sum [F(x_t y_t) \frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}}$$

по элементам с центрами вида  $(a_\nu, b)$ .

Применяя преобразование  $z = 1/x$  совершенно аналогично обнаружим, что сказанное верно и для  $a = \infty$ . Поэтому доказываемое соотношение сразу следует из (3.1).  $\square$

## 3.2 Главная функция

Используя соотношение (3.2) нетрудно разложить любую рациональную функцию на элементарные дроби

$$H(x, x') = \frac{1}{x' - x} - \frac{1}{x' - x_0},$$

где  $x_0$  — некоторое фиксированное число (обычно берут  $x_0 = \infty$ ). Тогда

$$\sum [F(x_t) H(x, x_t) \frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}} = 0$$

или

$$F(x) - F(x_0) = - \sum' [F(x_t) H(x, x_t) \frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}}$$

где суммирование ведется по всем полюсам  $F(x)$ . Если все полюса  $F$  простые, то

$$F(x) - F(x_0) = \sum_{k=1}^m A_k H(x, a_k) \quad (3.4)$$

что и выражает разложение  $F$  на элементарные дроби, а если у  $F(x)$  имеются кратные полюса, то в это выражение войдут также производные  $H(x)$ .

С точки зрения теории функций элементарная дробь — рациональная функция, обращающаяся в бесконечность первого порядка ( $\infty^1$ ) лишь в одной точке  $x'$ . Прямым аналогом такой функции в случае рациональной функции пары  $(xy)$  будет рациональная функция  $F(xy, x'y')$ , которая обращается в бесконечность в одной заданной точке  $(x'y')$ , причем с порядком,

равным единице. Попытка построения такой функции приведет нас к центральному объекту теории абелевых интегралов — главной функции.

Пусть  $f$  — полином степени  $n$  по  $y$  и  $m$  — по  $x$ . Мы можем построить функцию, обращающуюся в бесконечность в заданной точке  $(x', y')$  и в еще  $(m-1)n$  точках. При этом мы будем пока предполагать, что точка  $(x', y')$  — регулярная точка кривой и  $f(x'y')_2 \neq 0$ .

Функция

$$f(xy, y') = \frac{f(x, y')}{y - y'}$$

равна

$$\begin{aligned} \frac{f(x, y') - f(x, y)}{y - y'} &= f_0(x) \frac{y'^n - y^n}{y' - y} + f_1(x) \frac{y'^{n-1} - y^{n-1}}{y' - y} + \cdots + f_{n-1}(x) = \\ &= f_0(x)y'^{n-1} + f_1(x)y'^{n-2} + \cdots + f(x, y), \end{aligned}$$

где  $f_k$  — некоторые полиномы от своих аргументов, то есть не обращается в бесконечность ни при каком конечном  $x$ . Раз точка  $(x', y')$  неособенная, то, во-первых, уравнение  $f(x', z) = 0$  имеет ровно  $n$  различных корней  $z_k$ , один из которых мы обозначили как  $y'$ , а во-вторых, окрестность точки  $(x', y')$  дается как

$$x_t = x' + t, \quad y_t = y' + t\mathfrak{P}(t)$$

Поскольку функция  $f(xy, y')$  не имеет особенностей в конечных точках, то

$$f(x_t y_t, y') = \frac{f(x, y') - f(x, y)}{y' - y} \Big|_{x=x', y=y'} + t\mathfrak{P}(t) = f(x'y')_2 + t\mathfrak{P}(t),$$

откуда

$$\frac{f(x_t y_t, y')}{x' - x_t} = -f(x'y')_2 t^{-1} + \mathfrak{P}(t).$$

Это означает, что функция

$$\frac{f(xy, y')}{x' - x}$$

имеет в точке  $(x', y')$  полюс первого порядка. Она не обращается в бесконечность ни при  $x = x'$ , а  $y$ , равном другому корню  $f(x', z) = 0$ , ни при каком либо другом конечном  $x$ . Чтобы избежать полюсов в бесконечно

удаленных точках рассмотрим

$$F(xy, x'y') = \frac{f(xy, y') (x' - a_1) \dots (x' - a_{m-1})}{(x' - x) (x - a_1) \dots (x - a_{m-1})} \quad (3.5)$$

Эта функция обращается в бесконечность кратности 1 в точке  $(x'y')$  и еще в  $l = (m-1)n$  точках  $x = a_k$ . Поделив ее на  $f(x', y')_2 \neq 0$ , получим функцию с вычетом, равным 1 в точке  $(x', y')$ .

Обозначим точки  $x = a_k$  как  $(a_1, b_1), \dots, (a_l, b_l)$ . Предположим, что существует функция  $G_1(x, y)$ , обращающаяся в бесконечность первого порядка разве только в этих точках, тогда можно подобрать константу  $C_1$  так, чтобы  $F(xy, x'y') - C_1 G_1(x, y)$  обращалась в бесконечность только при  $(x'y')$  и еще при  $l-1$  точке. При этом  $C_1$  зависит от  $(x'y')$  и, именно, является целой рациональной функцией от этой точки, например, если мы уничтожаем полюс  $(a_1, b_1)$ ,

$$C_1 = f(a_1 b_1, y') \frac{(x' - a_1) \dots (x' - a_{m-1})}{(a_1 - a_1) \dots (a_1 - a_{m-1})}. \quad (3.6)$$

Применяя к  $F(xy, x'y') - C_1 G_1(x, y)$  те же размышления, мы в итоге понизим число  $l$  до некоторого числа  $\rho$  точек  $(a_k, b_k)$ , для которых не существует рациональной функции, обращающейся в бесконечность первого порядка разве только в этих точках.

Уклонившись пока от вопроса, может ли  $\rho \neq 0$ , условимся о следующем.

**Определение 3.2.** Рациональную функцию  $H(xy, x'y')$  называют главной, если она обращается в  $\infty^1$  в произвольной заданной точке  $(x'y')$  с вычетом  $-1$ , и еще в некоторых точках  $(a_1, b_1), \dots, (a_\rho, b_\rho)$ , причем не существует функции степени  $\rho$  конечной при всех точках, отличных от этих  $(a_1 b_1), \dots, (a_\rho b_\rho)$ .

Поэтому предыдущей результат можно сформулировать так:

**Теорема 3.2.** Для любой заданной неособенной точки  $(x', y')$  можно построить главную функцию. По построению эта функция имеет вид

$$H(xy, x'y') = \left[ \frac{f(xy, y') (x' - a_1) \dots (x' - a_{m-1})}{(x' - x) (x - a_1) \dots (x - a_{m-1})} + \sum C_k(x'y') G_k(x, y) \right] \frac{1}{f(x', y')_2}, \quad (3.7)$$

где  $C_1, \dots$  даются выражениями (3.6).

### 3.3 Разложение в ряд для главной функции

Вспоминая происхождение функций, фигурирующих в (3.7), видим, что главная функция зависит и от  $(x'y')$  рационально. Более того, поскольку  $C_k$  — целые, то главная функция как функция  $(x'y')$  она имеет вид

$$H(xy, x'y') = \frac{E(x'y')}{(x - x')f(x', y')_2}$$

где  $E(x'y')$  — целая рациональная функция  $(x'y')$ , коэффициенты которой зависят от  $(xy)$  рационально. Это позволяет рассматривать главную функцию как рациональную функцию двух аргументов  $(xy)$  и  $(x'y')$ . При этом для разложения по главным функциям произвольной рациональной функции на основании теоремы о вычетах важно знать не поведение  $H(xy, x_\tau y_\tau)$ , а "дифференциала"  $H(xy, x_\tau y_\tau)dx_\tau$ . Поэтому наша ближайшая задача состоит в том, чтобы разложить выражение

$$H(x_t y_t, x_\tau y_\tau) \frac{dx_\tau}{d\tau}$$

в степенной ряд по  $t$  и  $\tau$ .

Пусть пары функций  $(x_t y_t)$  описывает окрестность некоторой точки  $(ab)$ , а пара  $(x_\tau y_\tau)$  — некоторой точки  $(a'b')$ . При этом мы допускаем, что эти точки могут быть особыми, или бесконечно удаленными, или даже совпадать с друг другом. Выражение (3.7) состоит из слагаемого вида

$$\frac{f(xy, y') (x' - a_1) \dots (x' - a_{m-1})}{(x' - x) (x - a_1) \dots (x - a_{m-1})} \frac{1}{f(x', y')_2}, \quad (3.8)$$

и слагаемых вида

$$C_k(x'y') G_k(x, y) \frac{1}{f(x', y')_2}, \quad (3.9)$$

Подстановка во второе слагаемое  $(xy) = (x_t y_t)$  и  $(x'y') = (x_\tau y_\tau)$  и умножение на  $\frac{dx_\tau}{d\tau}$ , приведет к выражению вида

$$P(t, \tau),$$

то есть ряду по целым степеням  $t$  и  $\tau$ , содержащим быть может конечное число отрицательных степеней.

Если величины  $a \neq a'$  и конечны, то

$$\frac{1}{x_\tau - x_t} = \frac{1}{a' - a + c_1 t + c_2 \tau + \dots} = \mathfrak{P}(t, \tau)$$

и значит, первое слагаемое тоже имеет вид  $P(t, \tau)$ . Если величина  $a = \infty$ , а  $a'$  — конечна, тогда

$$\frac{1}{x_\tau - x_t} = \frac{1}{x_t} + \frac{x_\tau}{x_t^2} = P(t, \tau)$$

и аналогично при  $a' = \infty$ , а  $a$  — конечна. Наконец, если значения  $a$  и  $a'$  совпадают и конечны, то

$$x_t = a + t^\mu, \quad x_\tau = a + t^\nu$$

и поэтому

$$\frac{1}{x_\tau - x_t} = \frac{1}{\tau^\mu - t^\nu}$$

и все первое слагаемое имеет вид

$$\frac{P(t, \tau)}{\tau^\mu - t^\nu}$$

а если величины  $a$  и  $a'$  обе бесконечно велики, то

$$\frac{1}{x_\tau - x_t} = -\frac{1}{\frac{1}{x_\tau} - \frac{1}{x_t}} \frac{1}{x_t x_\tau}$$

что возвращает нас к рассмотренным выше случаям, поскольку ряды имеют вид

$$x_t^{-1} = P(t).$$

Итак, в любом случае верно

$$H(x_t y_t, x_\tau y_\tau) \frac{dx_\tau}{d\tau} = \varepsilon \frac{1}{\tau^\mu - t^\nu} P_1(t, \tau) + P(t, \tau) \quad (3.10)$$

где  $\varepsilon = 1$ , если  $a$  и  $a'$  совпадают, и равно нулю в противном случае.

С другой стороны, даже если  $(ab)$  особая или бесконечно удаленная точка, всегда можно считать, что  $(x_t y_t)$  и  $(x_\tau y_\tau)$  при  $t \neq 0$  и  $\tau \neq 0$  — неособые,

конечные и отличные от  $(a_1b_1), \dots, (a_\rho b_\rho)$ . Поэтому при некотором малом фиксированном  $\tau$  функция  $H(xy, x_\tau y_\tau)$  является главной, а, значит, эта функция имеет полюса только в точке  $(x_\tau y_\tau)$  и точках  $(a_1b_1), \dots, (a_\rho b_\rho)$ . Поэтому

$$H(xy, x_\tau y_\tau) \frac{dx_\tau}{d\tau}$$

неограниченна лишь тогда, когда  $(x_t y_t) = (x_\tau y_\tau)$  или  $(x_t y_t) = (a_\alpha b_\alpha)$ .

Если пары  $(x_t y_t)$  и  $(x_\tau y_\tau)$  различны, то существует такая константа  $C$ , независимая от  $\tau$ , что при всех  $|t| < C$  равенство  $(x_t y_t) = (x_\tau y_\tau)$  невозможно. Если центр  $(x_t y_t)$  отличен от  $(a_1b_1), \dots$ , то при всех малых  $t$  невозможно и  $(x_t y_t) = (a_\alpha b_\alpha)$ . Поэтому выражение

$$H(xy, x_\tau y_\tau) \frac{dx_\tau}{d\tau}$$

не может обратиться в бесконечность при всех  $|t| < C$  и фиксированном  $\tau$ .

Это означает, что в соотношении (3.10) при  $\varepsilon = 0$  ряд  $P(t, \tau)$  не может содержать отрицательных степеней  $t$ . Если же  $\varepsilon = 1$ , то ряд  $P_1(t, \tau)$  должен делиться на  $t^\mu - \tau^\nu$ . В противном случае, в выражении (3.10) первый член обращается в бесконечность при  $t = \sqrt[\mu]{\tau^\nu}$ , а второй —  $P(t, \tau)$  — разве только при  $t = 0$ . При достаточно малых  $\tau$  эти полюса попадают в область  $|t| < C$ , что невозможно. Значит, и в случае  $\varepsilon = 1$  ряд (3.10) на самом деле имеет вид  $P(t, \tau)$ . При этом опять он не может содержать отрицательные степени  $t$ .

Если же  $(x_t y_t)$  и  $(x_\tau y_\tau)$  описывают окрестность одной и той же точки  $(ab) = (a'b')$ , то равенство  $(x_t y_t) = (x_\tau y_\tau)$  возможно, но лишь тогда, когда  $t = \tau$ . Значит, выражение

$$H(xy, x_\tau y_\tau) \frac{dx_\tau}{d\tau}$$

как функция малых  $t$  имеет простой полюс при  $t = \tau$  и более ни где. С другой стороны в выражении (3.10) в данном случае  $\varepsilon = 1$  и  $\mu = \nu$ . Поскольку ряд  $P(t, \tau)$  полюса  $t = \tau$  дать не может,  $P_1(t, \tau)$  не делится на множитель  $t - \tau$  полинома  $t^\nu - \tau^\nu$ , но делится на все прочие его множители:

$$\frac{P_1(t, \tau)}{t^\nu - \tau^\nu} = \frac{P_2(t, \tau)}{\tau - t}$$

Далее, окрестность точки  $(x_\tau y_\tau)$  можно представить в виде переразложения  $(x_t y_t)$  по степеням  $t' = t - \tau$ . При этом

$$\left. \frac{dx_t}{dt} \right|_{t=\tau} = \frac{dx_\tau}{d\tau}$$

и поэтому вычет

$$\left[ H(x_{t'} y_{t'}, x_\tau y_\tau) \frac{dx_{t'}}{dt'} \right]_{t'=\tau}$$

равен  $-P_2(\tau, \tau)$ , а по определению главной функции он равен  $-1$ , то есть  $P_2(\tau, \tau) \equiv 1$ . Поэтому

$$\frac{P_1(t, \tau)}{t^\nu - \tau^\nu} = \frac{1 + \mathfrak{P}_1(\tau)(t - \tau) + \dots}{t - \tau}$$

и

$$H(x_t y_t, x_\tau y_\tau) \frac{dx_\tau}{d\tau} = \frac{1}{t - \tau} + \mathfrak{P}(t, \tau)$$

где ряд  $P(t, \tau)$  не может иметь отрицательных степеней  $t$ .

Если  $(x_t y_t)$  описывает окрестность одной из точек  $(a_1 b_1)$ , то все сказанное остается в силе, только ряд  $P(t, \tau)$  в этом случае содержит отрицательную степень  $t^{-1}$ , поскольку выражение (3.10) должно иметь простой полюс при  $t = 0$ . Тем самым доказано, что

$$H(x_t y_t, x_\tau y_\tau) \frac{dx_\tau}{d\tau} = \varepsilon \frac{1}{\tau - t} + P(t, \tau)$$

где  $P(t, \tau)$  имеет полюса только в точках  $(a_1 b_1), \dots, (a_\rho b_\rho)$  и при том первого порядка.

Для исследования зависимости ряда  $P(t, \tau)$  от  $\tau$ , заметим, что выражение

$$F_k(xy) = \left[ H(xy, x_\tau y_\tau) \frac{dx_\tau}{d\tau} \right]_{\tau^{-k}}$$

как функция пары  $(xy)$  является рациональной, если выпустить значение  $(xy) = (a'b')$ . В самом деле, из выражение (3.7) видно  $F_k(xy)$  есть сумма функций  $G_p(x, y)$  с некоторыми числовыми коэффициентами и  $-k$ -ый коэффициент в разложении

$$\frac{1}{(x - a_1) \dots (x - a_{m-1})} \frac{f_0(xy) y_\tau^{n-1} + \dots + f_{n-1}(xy)}{(x_\tau - a_1) \dots (x_\tau - a_{m-1})} \frac{dx_\tau/d\tau}{f(x_\tau, y_\tau)_2}$$

по степеням  $\tau$ . Если  $(a'b')$  — конечная точка, то

$$\frac{1}{x - x_\tau} = \frac{1}{x - a'} \left( 1 + \frac{\tau}{x - a'} + \dots \right)$$

и коэффициенты этого ряда даются одним и тем же выражением при всех  $x \neq a'$ . То же верно и для любой бесконечно удаленной точки. Значит,  $F_k(xy)$  — рациональная функция. При  $x = a'$  доопределим ее соответствующим предельным значением.

Поскольку для любого  $t \neq 0$  верно

$$\frac{1}{\tau - t} = \frac{1}{t} \left( 1 - \frac{\tau}{t} + \dots \right)$$

можно утверждать, что

$$\left[ \frac{1}{\tau - t} \right]_{\tau^{-k}} = 0.$$

Значит, по только что доказанному

$$F_k(x_t y_t) = 0 + P(t)$$

где  $P(t)$  содержит отрицательные степени  $t$  только тогда, когда центр  $(x_t y_t)$  совпадет с одной из точек  $(a_1, b_1), \dots$ . Значит,  $F_k(xy)$  — рациональная функция, обращающаяся в  $\infty^1$  разве только в точках  $(a_1, b_1), \dots$ , что возможно лишь тогда, когда  $F_k(xy)$  не зависят от  $(xy)$ . Это означает, что в разложении

$$H(x_t y_t, x_\tau y_\tau) \frac{dx_\tau}{d\tau} = \varepsilon \frac{1}{\tau - t} + P(t, \tau)$$

коэффициенты при отрицательных степенях  $\tau$  суть числа, которые не зависят ни от  $t$ , ни даже от выбора центра  $(a, b)$ . Но тогда, взяв произвольный элемент  $x_\gamma y_\gamma$ , будем иметь

$$(H(x_t y_t, x_\tau y_\tau) - H(x_\gamma y_\gamma, x_\tau y_\tau)) \frac{dx_\tau}{d\tau} = \varepsilon \frac{1}{\tau - t} - \varepsilon'' \frac{1}{\tau - \gamma} + \mathfrak{P}(t, \tau, \gamma).$$

Полагая  $\gamma = 0$  и замечая, что разность

$$\bar{H}(xy, x'y') = H(xy, x'y') - H(x''y'', x'y')$$

сама является главной функцией, получаем:

**Теорема 3.3.** Существует главная функция  $H(xy, x'y')$ , которая обращается в нуль в заданной точке  $(xy) = (x''y'')$  и при этом для справедливо разложение

$$H(x_t y_t, x_\tau y_\tau) \frac{dx_\tau}{d\tau} = \varepsilon \frac{1}{\tau - t} + P(t, \tau)$$

где  $\varepsilon$  равно единице, если пары  $(x_t y_t)$  и  $(x_\tau y_\tau)$  совпадают, ряд  $P(t, \tau)$  содержит отрицательные степени  $t$  только тогда, когда центр  $(x_t y_t)$  совпадает с одной из точек  $(a_1 b_1), \dots$  и содержит отрицательные степени  $\tau$  только тогда, когда центр  $(x_\tau y_\tau)$  совпадает с  $(x''y'')$ . При этом в него входит лишь  $-1$ -ая степени и точку  $(x''y'')$  можно выбрать произвольным образом.

### 3.4 Жанр алгебраической кривой

Построенная выше главная функция  $H(xy, x'y')$  имеет  $\rho + 1$  простой полюс. Допустим, что  $H'(xy, x'y')$  другая главная функция, которая обращается в  $\infty^1$  в  $(x'y')$  и еще в  $\rho'$  точках  $(a'_1 b'_1), \dots, (a'_{\rho'} b'_{\rho'})$ . Выясним, может ли  $\rho'$  отличаться от  $\rho$ . Допустим, что  $\rho' > \rho$ . Среди точек  $(a_1 b_1), \dots, (a_\rho b_\rho)$  и  $(a'_1 b'_1), \dots, (a'_{\rho'} b'_{\rho'})$  могут быть равные. Будем считать, что совпадают только первые  $r$  точек. Тогда функция

$$F(xy) = \sum_{i=r+1}^{\rho'} C_i H(xy, a'_i b'_i)$$

при любых постоянных  $C_i$  обращается в бесконечность только в точках  $(a'_1 b'_1), \dots, (a'_{\rho'} b'_{\rho'})$  и еще раз в точках  $(a_{r+1} b_{r+1}), \dots, (a_\rho b_\rho)$ . При этом все особенности являются полюсами первого порядка. Только константы  $C_i$  можно подобрать так, чтобы  $F(xy)$  не имела полюсов в точках  $(a_{r+1} b_{r+1}), \dots, (a_\rho b_\rho)$ . В самом деле, обозначая

$$[H(x_t y_t, ab)]_{t-1} = H(ab)_i$$

в случае, когда  $(x_t y_t)$  описывает окрестности точки  $(a_i b_i)$ , условие обращения вычета  $F(xy)$  в точке  $(a_i b_i)$  в нуль можно записать как

$$\sum_{j=r+1}^{\rho'} C_j H(a'_j b'_j)_i = 0$$

Значит, определяя  $\rho' - r$  констант  $C_i$  из  $\rho - r$  однородных линейных уравнений

$$\sum_{j=r+1}^{\rho'} C_j H(a'_j b'_j)_i = 0 \quad (i = r + 1, \dots, \rho),$$

что всегда возможно, поскольку число неизвестных меньше числа уравнений, мы получим функцию  $F(xy)$  обращающуюся в  $\infty^1$  только в  $\rho'$  точках  $(a'_1 b'_1), \dots, (a'_{\rho'} b'_{\rho'})$ , что невозможно. Значит,  $\rho' \leq \rho$ . Меняя главные функции ролями, покажем невозможность и  $\rho > \rho'$ . Поэтому число  $\rho$  не зависит от выбора точек  $a^{(1)}, \dots$  при построении главной функции.

Теорема (3.3) позволяет охарактеризовать число  $\rho$  и по другому. Пусть  $F(xy)$  — рациональная функция и все ее полюса — точки  $(x_1 y_1), \dots, (x_r y_r)$  — ее простые полюса. Возьмем главную функцию, для которой точки  $(a_1 b_1), \dots$  и  $(x'' y'')$ , возникших при построении этой функции, отличны от полюсов  $F(xy)$ . Тогда в силу теоремы о вычете

$$\sum [F(x_t y_t) H(xy, x_t y_t) \frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}} = 0$$

Слагаемые этой суммы отличны от нуля только тогда, когда  $(x_t y_t)$  описывает окрестность точек  $(x_1 y_1), \dots, (x_r y_r)$  или точек  $(xy)$  и  $(x'' y'')$ . При этом член суммы, отвечающий паре  $(x_t y_t)$ , описывающей окрестность  $(x_i y_i)$ , равен

$$H(xy, x_i y_i) C_i,$$

где  $C_i$  — вычет  $F(xy)$  в точке  $(x_i y_i)$ , член отвечающий паре  $(x_t y_t)$ , описывающей окрестность  $(xy)$ , равен

$$F(xy)$$

наконец, член, отвечающий паре  $(x_t y_t)$ , описывающей окрестность  $(x'' y'')$ , равен

$$-F(x'' y'').$$

Поэтому, если существует рациональная функция, все полюса которой — точки  $(x_1 y_1), \dots, (x_r y_r)$  — простые, то она представима в виде

$$F(xy) = C_0 + \sum_{i=1}^r C_i H(xy, x_i y_i),$$

где  $C_i$  — некоторые константы.

Наоборот, пусть заданы точки  $(x_1 y_1), \dots, (x_r y_r)$  и требуется построить функцию  $F(xy)$ , имеющую простые полюса только в этих точках, а кроме них всюду конечную. По предыдущему, мы вынуждены искать ее в виде

$$F(xy) = C_0 + \sum_{i=1}^r C_i H(xy, x_i y_i),$$

где константы  $C_i$  нужно подчинить  $\rho$  условиям необращения в бесконечность при  $(xy) = (a_i b_i)$ . Эти условия запишем так

$$\sum H(x_1 y_1)_i C_i = 0, \dots, \sum H(x_r y_r)_i C_i = 0$$

Таким образом, искомая функция существует тогда и только тогда, когда

$$\text{rang} \begin{pmatrix} H(x_1 y_1)_1 & \dots & H(x_r y_r)_\rho \\ \dots & \dots & \dots \\ H(x_1 y_1)_1 & \dots & H(x_r y_r)_\rho \end{pmatrix} \leq \rho \quad (3.11)$$

Если  $r > \rho$ , то такая функция всегда существует, если же  $r \leq \rho$ , то такая функция существует лишь тогда, когда  $(x_1 y_1), \dots$  удовлетворяют некоторым алгебраическим соотношениям, а именно условию обращению в нуль миноров выписанной матрицы. Эти соотношения не есть тривиальные тождества, поскольку если взять за  $(x_1 y_1), \dots$  полюса какой либо главной функции, то нельзя найти подходящую функцию  $F(xy)$ .

Сказанное позволяет охарактеризовать число  $\rho$  так: если задано  $r$  произвольных точек  $(x_1 y_1), \dots, (x_r y_r)$  и  $r > \rho$  то всегда существует функция,

имеющая простые полюса разве что в этих точках и кроме них всюду конечная, если же число  $r \leq \rho$ , то такая функция существует лишь тогда, когда заданные точки удовлетворяют некоторым алгебраическим соотношениям. Теперь совсем понятно, что число  $\rho$  характеризует свойства самой алгебраической кривой  $f(x, y) = 0$ . Его называют *жанром* кривой.<sup>1</sup>

### 3.5 Построение рациональной функции с заданными полюсами

Построение функции с полюсами предписанных порядков не многим сложнее. Построим сначала функцию, обращающуюся в точке  $(a, b)$  в бесконечность заданного порядка. Пусть пара  $(x_\tau, y_\tau)$  — описывает окрестность точки  $(a, b)$ . Зная главную функцию  $H(xy, x'y')$ , можно найти коэффициенты разложения

$$H(xy, x_\tau y_\tau) \frac{dx_\tau}{d\tau} = - \sum_{n=0}^{\infty} H(xy, ab)_n \tau^n, \quad (3.12)$$

полагая  $(x, y)$  — произвольной точкой кривой. Коэффициенты  $H(xy, ab)_m$  являются рациональными функциями своих аргументов. Подставляя в (3.12) вместо  $(x, y)$  пару  $(x_t, y_t)$  имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} H(x_t y_t, ab)_n \tau^n = -H(xy, x_\tau y_\tau) \frac{dx_\tau}{d\tau} = \frac{\varepsilon}{t - \tau} + P(t, \tau)$$

---

<sup>1</sup>Вейерштрасс называет это число рангом (Rang). В начале 20 века большинство немецких авторов называли его родом (Geschlecht), французские и итальянские авторы — жанром (genre и genere соответственно), затем утвердилось англоязычное genus. К несчастью, в русской литературе этот термин традиционно переводится как род, то есть также как род (Art) абелева интеграла, что приводит к путанице.

Теорема Римана-Роха является двойственным к сделанному утверждению и сразу следует из теоремы о базисном миноре: совокупность всех функций обращающихся в бесконечность разве лишь в заданных  $r$  точках  $(x_1, y_1), \dots$  зависит от  $r + 1 - i$  параметров, где  $i$  — число параметров, от которых зависит множество кривых вида

$$\sum_{j=1}^{\rho} C'_j H(x, y)_j = 0,$$

проходящих через точки  $(x_1, y_1), \dots$

в обозначениях теоремы 3.3. Отсюда, разлагая по  $\tau$  при фиксированном  $t$ , имеем

$$H(x_t y_t, ab)_n = \varepsilon t^{-(n+1)} + P(t),$$

Иными словами,  $H(xy, ab)_n$  как функция  $(x, y)$  имеет полюс  $n + 1$  порядка в точке  $(a, b)$  и еще  $\rho$  простых полюсов  $(a_i, b_i)$ , а в прочих точках конечна.

Пусть даны точки  $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$  и натуральные числа  $r_1, \dots, r_m$  и требуется построить все рациональные функции, которые обращаются в бесконечность только в точках  $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$  с порядками  $r_1, \dots, r_m$ , а в прочих точках принимают конечные значения.

Допустим, что одна такая функция существует и обозначим ее как  $F(xy)$ . Будем считать, что  $(x_i, y_i)$  отличны от особенностей  $(a_j, b_j)$  используемой главной функции, что не ограничивает общности рассмотрения. Тогда можно подобрать константы  $C_{i,j}$  так, что выражение

$$F(xy) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{r_i} C_{i,j} H(xy, x_i y_i)_j$$

имеет простые полюса разве лишь в точках  $(a_k, b_k)$ , а следовательно равно константе. Значит, все искомые функции неизбежно имеют вид

$$F(xy) = C_0 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{r_i} C_{i,j} H(xy, x_i y_i)_j.$$

Обратно: любое такое выражение является искомой функцией тогда и только тогда, когда это выражение не имеет простых полюсов в  $(a_k, b_k)$ , то есть

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{r_i} C_{i,j} \left[ H(x_t^{(k)} y_t^{(k)}, x_i y_i)_j \right]_{t^{-1}} = 0, \quad (k = 1, \dots, \rho)$$

где  $(x_t^{(k)}, y_t^{(k)})$  описывает окрестность точки  $(a_k, b_k)$ .

### 3.6 Главная функция для эллиптической кривой

Найдем теперь явное выражение для главной функции эллиптической кривой

$$y^2 = x^3 + g_1x + g_2,$$

которая, как мы знаем, неприводима, и локальная параметризация для которой уже была построена явно.

Рассмотрим вновь выражение, которое было использовано выше для построения главной функции:

$$H(xy, x'y') = \frac{1}{2y'} \frac{y' + y}{x' - x}$$

Эта выражение как функция  $(xy)$  конечна во всех точках кривой, кроме  $(x'y')$  и  $(\infty, \infty)$ . Если точка  $(x'y')$  — неособая и конечная, то ее окрестность описывается парой  $(x'_t y'_t)$  и верно

$$y' + y'_t = 2y' + t\mathfrak{P}(t), \quad x' - x'_t = -t$$

Поэтому

$$H(x_t y_t, x' y') = -t^{-1} + \mathfrak{P}(t).$$

Если  $(x'y')$  совпадает с  $(e_i, 0)$ , то

$$y' + y'_t = t\mathfrak{P}(t), \quad x' - x'_t = -t^2$$

Поэтому опять

$$H(x_t y_t, x' y') = -t^{-1} + \mathfrak{P}(t),$$

то есть  $H$  имеет в точке  $(x'y')$  простой полюс с вычетом  $-1$ . Но эта функция имеет еще один полюс — бесконечно удаленную точку. В самом деле, подставив

$$x_t = t^{-2}, \quad y_t = t^{-3}(1 + t\mathfrak{P}(t)),$$

имеем

$$H(x_t y_t, x' y') = \frac{1}{2y'} \frac{y' + t^{-3} + \dots}{x' - t^{-2} + \dots} = \frac{1}{2y'} t^{-1} - \frac{2x' + (e_1 + e_2 + e_3)}{y'} t + \dots \quad (3.13)$$

Таким образом, при функция  $H(xy, x'y')$  имеет два простых полюса.

Изучим теперь разложения

$$H(xy, x_t'y_t') \frac{dx_t'}{dt} = \frac{dx_t' y_t' + y}{2y_t' dt x_t' - x}$$

в полной аналогии с тем, как мы делали это для главной функции. Это выражение обращается в бесконечность разве лишь в тех точках, где  $y' = 0$ , то есть при  $x' = e_i$ , при  $x' = x$  и при  $x' = \infty$ . Но на самом деле

$$\frac{dx_t}{y_t} = -\frac{dy_t}{P(x_t)}$$

поэтому элементы с центром в  $(e_i, 0)$  отрицательных степеней не доставляют. Элемент с центром в  $(x, -y)$  тоже не доставляет таких степеней, поскольку

$$\frac{y_t' + y}{x_t' - x} = \frac{c't + \dots}{t} = \mathfrak{P}(t)$$

С другой стороны элемент с центром  $(x, y)$ , то есть  $x_t = x+t$ ,  $y_t = y+t\mathfrak{P}(t)$ , доставляет отрицательные степени:

$$H(xy, x_t y_t) \frac{dx_t}{dt} = \frac{1}{2y + \dots} \frac{2y + \dots}{t} = t^{-1} + \dots$$

Если  $(xy)$  совпадет с одной из особых точек  $(e_i 0)$ , то указанное соотношение остается в силе. Элемент с центром в  $(\infty, \infty)$  тоже доставляет отрицательные степени:

$$H(xy, x_t'y_t') \frac{dx_t'}{dt} = -t^{-1} + \dots$$

Таким образом, дифференциал  $H(xy, x'y')dx'$  разлагается в точности такие же ряды, как и дифференциал главной функцией.

Мы могли бы назвать  $H(xy, x'y')$  главной, если бы удалось доказать, что число точек, в которых она еще имеет полюса минимально. В данном случае это означает, что так построенная функция будет главной, если не существует рациональной функции, имеющей полюс ровно в одной предписанной точке.

Но несуществование такой функции следует из теоремы о вычетах. Пусть теперь  $F(xy)$  — рациональная функция, имеющая простой полюс

в точке  $(a, b)$ , тогда

$$\sum [H(xy, x_t y_t) F(x_t y_t) \frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}} = 0,$$

или

$$F(xy) - F(\infty, \infty) + fH(xy, ab) = 0$$

где

$$f = [F(x_t y_t) \frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}}$$

при  $(x_t y_t)$  описывающем окрестность  $(ab)$ . Но тогда  $F(xy)$  имеет те же полюса, что и  $H(xy, ab)$ , то есть два полюса, что невозможно. Поэтому функции с одним полюсом не существует, жанр эллиптической кривой равен 1, а  $H(xy, x' y')$  — главная функция.

В общем случае построение главной функции опирается на следующее соображение. Мы знаем, что

$$H(xy, x' y') = \frac{E(x' y')}{(x - x') f(x', y')_2}$$

где  $E(x' y')$  — целая рациональная функция  $(x' y')$ , коэффициенты которой зависят от  $(xy)$  рационально. Поэтому мы можем подобрать коэффициенты  $E(x' y')$  так, чтобы

$$H(xy, x_\tau y_\tau) \frac{dx_\tau}{d\tau} = \varepsilon \tau^{-1} + gP(\tau)$$

где  $\varepsilon$  равно 1,  $-1$  или нулю в зависимости от того, совпадает центра  $(x_\tau y_\tau)$  с  $(xy)$ ,  $(x_0 y_0)$  (в которой  $H(x_0 y_0, x' y') = 0$ ) или нет. Теорема о главной функции гарантирует существование решения, а теорема о вычете сразу укажет, как выше в случае эллиптической кривой, что любая главная функция линейно выражается через построенную.

### 3.7 Соотношение между $\frac{d}{dx} H(xy, x' y')$ и $\frac{d}{dx'} H(x' y', xy)$

В простейшем случае кривой  $y = x$  главная функция равна

$$H(x, x') = \frac{1}{x' - x} - \frac{1}{x' - x_0}$$

и поэтому

$$\frac{d}{dx}H(x, x') = \frac{d}{dx'}H(x', x)$$

Это соотношение можно обобщить на случай произвольной кривой и при этом вся теория абелевых интегралов получается прямым следствием этого соотношения<sup>2</sup>.

Пусть  $H(xy, x'y')$  — главная функция, обращающаяся в  $\infty^1$  в точке  $(x'y')$  и в неособых точках  $(a_1b_1), \dots, (a_\rho b_\rho)$ . До сего момента мы избегали рассмотрения окрестностей точек  $(a_i b_i)$ . Поскольку в этих точках  $H(xy, x'y')$  имеет полюс первого порядка как функция первого аргумента (хотя бы при некоторых значениях  $(x'y')$ , а значит, и при почти всех), то справедливо разложение

$$H(x_t^i y_t^i, x'y') = H(x'y')_i t^{-1} + C(x'y') - H'(x'y')_i t + \dots \quad (3.14)$$

где  $x_t^i y_t^i$  описывает окрестность точки  $(a_i b_i)$ , а  $H(x'y')_i, \dots$  — рациональные функции своих аргументов.

**Теорема 3.4.** Справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_1}H(x_1 y_1, x_2 y_2) - \frac{d}{dx_2}H(x_2 y_2, x_1 y_1) = \\ = \sum_{i=1}^{\rho} H(x_2 y_2)_i H'(x_1 y_1)_i - H(x_1 y_1)_i H'(x_2 y_2)_i \end{aligned} \quad (3.15)$$

при всех возможных значениях аргументов. Здесь под дифференцирование по  $x$  понимается дифференцирование функции, в которую вместо  $y$  поставлена функция  $y(x)$

*Доказательство.* Поскольку для доказательства соотношения (3.15) достаточно установить его на непрерывном множестве точек, а далее воспользоваться принципом продолжения равенств, то можно считать, что  $(x_1 y_1)$  и  $(x_2 y_2)$  — неособые. Применим теорему 3.1 к функции

$$F(xy) = H(xy, x_2 y_2) \frac{d}{dx} H(xy, x_1 y_1)$$

---

<sup>2</sup>Тихомандрицкий в его нахождении видел главное достижение Вейерштрасса

Тогда

$$\sum [H(x_t y_t, x_2 y_2) \frac{d}{dt} H(x_t y_t, x_1 y_1)]_{t^{-1}} = 0 \quad (3.16)$$

где суммирование распространяется на все элементы  $(x_t y_t)$ , при которых член с  $t^{-1}$  может встретиться, то есть на элементы с центрами в точках  $(x_1 y_1), (x_2 y_2), (a_1 b_1), \dots, (a_\rho b_\rho)$ . Но если

$$x_t = x_1 + t, \quad y_t = y_1 + t\mathfrak{P}(t),$$

то

$$\begin{aligned} H(x_t y_t, x_1 y_1) &= -t^{-1} + \mathfrak{P}(t), \\ \frac{d}{dt} H(x_t y_t, x_1 y_1) &= t^{-2} + \mathfrak{P}(t), \\ H(x_t y_t, x_2 y_2) &= H(x_1 y_1, x_2 y_2) + t \frac{d}{dx_1} H(x_1 y_1, x_2 y_2) + \dots \end{aligned}$$

Поэтому коэффициент при  $t^{-1}$ , фигурирующей в сумме, есть

$$\frac{d}{dx_1} H(x_1 y_1, x_2 y_2).$$

Аналогично при

$$x_t = x_2 + t, \quad y_t = y_2 + t\mathfrak{P}(t)$$

имеем

$$\begin{aligned} H(x_t y_t, x_1 y_1) &= H(x_2 y_2, x_1 y_1) + t \frac{d}{dx_2} H(x_2 y_2, x_1 y_1) + \dots, \\ \frac{d}{dt} H(x_t y_t, x_1 y_1) &= \frac{d}{dx_2} H(x_2 y_2, x_1 y_1) + \dots, \\ H(x_t y_t, x_2 y_2) &= -t^{-1} + \mathfrak{P}(t). \end{aligned}$$

Поэтому коэффициент при  $t^{-1}$ , фигурирующей в сумме, есть

$$-\frac{d}{dx_2} H(x_1 y_1, x_2 y_2).$$

Наконец, при

$$x_t = x_t^i = a_i + t, \quad y_t = y_t^i = b_i + t\mathfrak{P}(t)$$

из (3.14) имеем

$$\begin{aligned}H(x_t y_t, x_1 y_1) &= H(x_1 y_1)_i t^{-1} + C(x_1 y_1) - H'(x_1 y_1)_i t + \dots, \\ \frac{d}{dt} H(x_t y_t, x_1 y_1) &= -t^{-2} H(x_1 y_1)_i - H'(x_1 y_1)_i + \dots, \\ H(x_t y_t, x_2 y_2) &= H(x_2 y_2)_i t^{-1} + C(x_2 y_2) - H'(x_2 y_2)_i t + \dots.\end{aligned}$$

Поэтому член с  $t^{-1}$  имеет коэффициент

$$H(x_1 y_1)_i H'(x_2 y_2)_i - H(x_2 y_2)_i H'(x_1 y_1)_i$$

Подставляя в сумму (3.16) найденные коэффициенты и приравнявая ее нулю получим (3.15). □

## Глава 4

# Абелевы интегралы

### 4.1 Абелевы интегралы как функции верхнего предела

Изучив свойства алгебраической функции  $R(xy) = R(x, y(x))$ , обратимся к интегралам от нее

$$\int_{x_0}^x R(x, y(x)) dx.$$

Такие интегралы называют абелевыми. Знак интеграла будем понимать в следующем смысле. Пусть  $\mathfrak{C}$  кривая, соединяющая точки  $x_0$  и  $x$  и  $y_0$  один из корней  $f(x_0, y) = 0$ . Возьмем в качестве  $y(x)$  элемент  $y = y_0 + c(x - x_0) + \dots$  и его продолжения вдоль  $\mathfrak{C}$ . Тогда  $R(x, y(x)) = f(x)$  будет однозначной функцией вдоль  $\mathfrak{C}$ , имеющей, быть может, алгебраические особенности. Теперь интеграл вводится обычным способом. Бросается в глаза, однако, что абелев интеграл зависит не только от пути, но и от значения  $y_0$ . Поэтому удобно писать

$$\int_{(x_0 y_0)}^{(xy)} R(xy) dx.$$

То, что выбор пути  $\mathfrak{C}$  определяет значение  $y$  в точке  $x$  не страшно, поскольку путь мы не указываем. Следует лишь заметить, что точки  $x_0$  и  $x$  всегда можно соединить так, чтобы от заданного корня  $y_0$  прийти к заданному

корню  $y$ , поскольку кривая  $f(x, y) = 0$  неприводима.

При избранном способе записи, абелев интеграл является функцией пары  $(xy)$ , но функцией, вообще говоря, неоднозначной: даже если продолжение  $y = y_0 + c(x - x_0) + \dots$  вдоль двух различных путей приводит к одному и тому же значению  $y(x)$ , абелевы интегралы, вычисленные по этим путям не обязаны совпадать. Ясно, что абелев интеграл будет однозначной функцией от  $(xy)$  лишь тогда, когда интеграл по любому замкнутому контуру  $\mathfrak{C}$ , продолжение вдоль которого  $y(x)$  возвращается к исходному элементу, равен нулю.

Мы будем придерживаться такой терминологии. Контур  $\mathfrak{C}$ , замкнутый как контур на  $x$ -плоскости, и проходящий через точку  $(x_0, y_0)$ , будем называть замкнутым, если продолжение вдоль него элемента аналитической функции  $y(x) = y_0 + (x - x_0)\mathfrak{P}(x - x_0)$  возвращается к исходному элементу. Абелев интеграл, вычисленный по такому контуру будем называть периодом интеграла.

Такое название происходит от того, что абелев интеграл

$$\int_{(0,1)}^{(x,\sqrt{1-x^2})} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arcsin}(x)$$

не однозначен как функция  $x$ , но является обратной функцией к однозначной — именно, к  $\sin(J)$ . Поэтому его значения при фиксированных  $(x, \sqrt{1-x^2})$  могут отличаться на период синуса, то есть на  $2\pi$ . Это можно видеть и непосредственно:

$$\int_{|x|=1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\pi$$

Поэтому то интеграл по замкнутому контуру называют периодом.

Важность изучения периодов вполне проясняет следующая

**Теорема 4.1.** Если у абелева интеграла нет отличных от нуля периодов, то он является рациональной функцией на кривой  $f(x, y) = 0$ , и наоборот.

Доказательство опирается на возможность классифицировать особые точки абелева интеграла так же, как полюса  $F(xy)$ . Возьмем произвольный элемент  $(x_t y_t)$  с центром  $(a'b')$  и рассмотрим интеграл

$$J = \int_{(ab)}^{(x_t y_t)} F(xy) dx,$$

взятый вдоль произвольного, но фиксированного пути  $(ab) \dots (a'b')$  и затем по отрезку от  $a'$  до  $x_t$ . Разумеется, при малых  $t$  этот отрезок можно как угодно деформировать. Замена переменной с  $x$  на  $t$ , дает

$$J = \int_{(ab)}^{(a'b')} F(xy) dx + \int_0^t F(x_t y_t) \frac{dx_t}{dt} dt$$

Поскольку

$$F(x_t, y_t) \frac{dx_t}{dt} = P(t)$$

и отрицательные степени фигурируют в это выражении только если  $(a'b')$  — полюс  $F(xy)$ , то

$$J(x_t y_t) = c_{-1} \ln(t) + P(t)$$

Это мы выразим так: абелев интеграл в окрестности любой точки, отличной от полюса подынтегральной функции, является регулярной функцией локального параметра  $t$ , а в окрестности полюса имеет особенность типа полюса и  $\ln(t)$ . Значит, как и интеграл от рациональной функции. Абелев интеграл имеет рационально-логарифмические особенности и только конечном числе точек.

Обратимся теперь к доказательству теоремы 4.1. Если в разложении  $F(x_t y_t) \frac{dx_t}{dt}$  в окрестности одной из точек имеется член  $c_{-1} t^{-1}$ , то абелев интеграл имеет период  $2\pi i c_{-1}$ . Значит, для того, чтобы абелев интеграл не был бесконечнозначным, необходимо, чтобы

$$[F(x_t y_t) \frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}} = 0$$

Поэтому абелев интеграл, не имеющий периодов, является не только однозначной функцией точки  $(xy)$ , но и может быть разложен в ряд по целым степеням локального параметра. Теперь утверждение теоремы 4.1 сразу следует из следующей

**Теорема 4.2.** Если  $z$  — однозначная функция точки  $(xy)$  кривой  $f(x, y) = 0$ , которая может быть разложена в ряд по целым степеням локального параметра в окрестности любой точки, причем лишь конечное число элементов содержит отрицательные степени и лишь в конечном числе. Тогда  $z$  — рациональная функция на кривой.

*Доказательство.* Пусть  $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$  — корни  $f(x, y) = 0$ , а  $z^{(1)}, \dots, z^{(n)}$  — значения  $z$ , отвечающие точкам  $(xy^{(1)}), \dots, (xy^{(n)})$ . Используя интерполяционную формулу Лагранжа, имеем

$$z = \sum_{i=1}^n \frac{z^{(i)} G(y)}{(y - y^{(i)}) G'(y^{(i)})},$$

где

$$G(y) = \prod_{k=1}^n (y - y^{(k)}).$$

Правая часть может быть представлена в виде

$$z = R_0 + R_1 y + \dots + R_{n-1} y^{n-1}$$

Коэффициенты  $R_0, R_1, \dots$  являются симметричными функциями  $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$ , так как не меняются при перестановке  $y^{(\alpha)}$  на  $y^{(\beta)}$  и  $z^{(\alpha)}$  на  $z^{(\beta)}$ . Поэтому эти коэффициенты являются однозначными функциями одного  $x$ .

То, что может быть разложена в ряд по целым степеням локального параметра в окрестности любой точки, означает, что эти коэффициенты могут иметь только алгебраические особые точки. В силу только что доказанной однозначности, они имеют только полюса и только в конечном числе, то есть являются рациональными функциями. Таким образом, мы

представили  $z$  в виде

$$z = R_0 + R_1y + \dots + R_{n-1}y^{n-1},$$

где  $R_k(x)$  — рациональные функции. □

## 4.2 Разложение произвольного интеграла на интегралы трех родов

В предыдущей главе мы видели, что произвольную функцию  $F(xy)$ , имеющую только простые полюса, можно разложить по главным функциям. Обобщение сказанного на случай функций с кратными полюсами приводит к необходимости изучения производных главной функции. Однако для нужд теории абелевых интегралов нужно не совсем это — нужно разложить не саму функцию, а интеграл

$$\int F(xy)dx$$

Случай рациональной функции указывает, что в отсутствие в  $F(x)$  кратных полюсов она является суммой главных функций вида  $H(ab, xy)$ , а их появление приводит к появлению в выражении для

$$\int F(x)dx$$

рациональной функции. Поэтому мы попытаемся представить  $F(x)$  как линейную комбинацию главных функций и производной некоторой рациональной функции. При этом соотношение (3.15) будет играть роль дифференцирования по частям.

Пусть  $F(xy)$  — произвольная функция и пусть  $(x_1y_1), \dots, (x_ry_r)$  — те точки, в окрестности которых

$$F(x_t y_t) \frac{dx_t}{dt}$$

имеет отрицательные степени, то есть

$$F(x_t y_t) \frac{dx_t}{dt} = c_\nu t^{-1} + \sum_{\lambda} \lambda c_{\nu, \lambda} t^{\lambda-1} \quad (4.1)$$

Допустим пока, что  $(xy)$  — неособенная точка. Из теоремы 3.1 следует, что

$$\sum [F(x_t y_t) H(x_t y_t, xy) \frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}} = 0 \quad (4.2)$$

Сумма пробегает все элементы с центрами  $(xy), (x_1 y_1), \dots, (a_1 b_1), \dots$

Элемент

$$x_t = x + t, \quad y_t = y + t\mathfrak{P}(t)$$

дает

$$[F(x_t y_t) H(x_t y_t, xy) \frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}} = -F(xy).$$

Элемент с центром в  $(x_\nu y_\nu)$  имеет вид

$$x_t = P(t), \quad y = P(t)$$

Поскольку его центр отличен от  $(xy)$  и  $(a_1 b_1), \dots$ , в разложении

$$H(x_t y_t, xy)$$

присутствуют только положительные степени  $t$ , то есть

$$H(x_t y_t, xy) = \sum_{\lambda \geq 0} H^\lambda(x_\nu y_\nu, xy) t^\lambda$$

Значит,

$$[F(x_t y_t) H(x_t y_t, xy) \frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}} = c_\nu H(x_\nu y_\nu, xy) - \sum_{n > 0} n c_{\nu, -n} H^{(n)}(x_\nu y_\nu, xy),$$

где

$$n H^n(x_\nu y_\nu, xy) = \left[ \frac{d}{dt} H(x_t y_t, xy) \right]_{t^{n-1}}.$$

В силу соотношения (3.15),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(x_t y_t, xy) &= \frac{d}{dx} H(x_t y_t, xy) \frac{dx_t}{dt} + \\ &+ \sum_{i=1}^{\rho} H'(x_t y_t)_i \frac{dx_t}{dt} H(xy)_i - H(x_t y_t)_i \frac{dx_t}{dt} H'(xy)_i \end{aligned}$$

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned} n H^n(x_\nu y_\nu, xy) &= \frac{d}{dx} [H(xy, x_t y_t)]_{t^{n-1}} + \\ &+ \sum_{i=1}^{\rho} H(xy)_i [H'(x_t y_t)_i]_{t^{n-1}} - H'(xy)_i [H(x_t y_t)_i]_{t^{n-1}} \end{aligned}$$

и, следовательно, данный коэффициент можно представить в виде

$$c_\nu H(x_\nu y_\nu, xy) - \sum_{i=1}^{\rho} (g'_{\nu,i} H(xy)_i - g_{\nu,i} H'(xy)_i) + \frac{d}{dx} F_\nu(xy)$$

Наконец, члены в сумме (4.2), связанные с  $(a_i b_i)$ , равны

$$[F(x_t y_t) H(x_t y_t, xy) \frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}} = F(a_1 b_1) H(xy)_i$$

Подставляя в сумму (4.2) найденные коэффициенты и приравнявая ее нулю, придем к теореме

**Теорема 4.3.** Любой дифференциал  $F(xy)dx$  можно представить в виде

$$F(xy)dx = \sum_{\nu=1}^r c_\nu H(x_\nu y_\nu, xy) - \sum_{i=1}^{\rho} (g'_i H(xy)_i - g_i H'(xy)_i) + dR(xy), \quad (4.3)$$

Фигурирующие в этом выражении коэффициенты можно вычислить, приняв обозначения  $(x_t^\nu, y_t^\nu)$  — элемент, описывающий окрестность точки  $(x_\nu y_\nu)$ ,  $(x_t^i, y_t^i)$  — элемент, описывающий окрестность точки  $(a_i b_i)$ , по формулам

$$\begin{aligned} c_\nu &= [F(x_t^\nu y_t^\nu) \frac{dx_t^\nu}{dt}]_{t^{-1}} \\ &- n c_{\nu, -n} = [F(x_t^\nu y_t^\nu) \frac{dx_t^\nu}{dt}]_{t^{-n-1}} \\ c^{(i)} &= F(a_i b_i) \\ g_i &= \sum_{\nu=1}^r \sum_{n>0} c_{\nu, -n} [H(x_t^\nu y_t^\nu)_i \frac{dx_t^\nu}{dt}]_{t^{n-1}} \\ g'_i &= \sum_{\nu=1}^r \sum_{n>0} c_{\nu, -n} [H'(x_t^\nu y_t^\nu)_i \frac{dx_t^\nu}{dt}]_{t^{n-1}} - c^{(i)} \end{aligned}$$

а функция

$$R(xy) = - \sum_{\nu=1}^r \sum_{n>0} c_{\nu, -n} [H(xy, x_t^\nu y_t^\nu) \frac{dx_t^\nu}{dt}]_{t^{n-1}}$$

Теорема была доказана в предположении, что  $(xy)$  неособая точка, однако в силу принципа аналитического продолжения она верна и при особых  $(xy)$ .

Теорема 4.3 означает, что любой абелев интеграл может быть представлен в виде суммы интегралов вида

$$\int H(xy)_i dx, \int H'(xy)_i dx, \int H(ab, xy) dx \quad (4.4)$$

и интеграла от полного дифференциала, то есть рациональной функции. Поэтому можно утверждать, что с точностью до некоторой алгебраической функции любой абелев интеграл является линейной комбинацией абелевых интегралов трех родов в соответствии с определением.

**Определение 4.1.** Интегралы вида (4.4) называют (нормальными) интегралами первого, второго и третьего рода соответственно.

По определению функции  $H(xy)_i$  и  $H'(xy)_i$  получаются как коэффициенты разложения

$$H(x_t^i y_t^i, x_\tau' y_\tau') = H(x_\tau' y_\tau')_i t^{-1} + C(x_\tau' y_\tau') - H'(x_\tau' y_\tau')_i t + \dots,$$

где  $(x_t^i y_t^i)$  описывает окрестность точки  $(a_i b_i)$ , то есть

$$H(x_t^i y_t^i, x_\tau' y_\tau') \frac{dx_\tau'}{d\tau} = H(x_\tau' y_\tau')_i \frac{dx_\tau'}{d\tau} t^{-1} + C(x_\tau' y_\tau') \frac{dx_\tau'}{d\tau} - H'(x_\tau' y_\tau')_i \frac{dx_\tau'}{d\tau} t + t^2 \mathfrak{P}(t; \tau).$$

С другой стороны в силу теоремы 3.3

$$H(x_t^i y_t^i, x_\tau' y_\tau') \frac{dx_\tau'}{d\tau} = \frac{\varepsilon}{\tau - t} + \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{P}(\tau) t^{k-1},$$

где  $\varepsilon = 1$  только тогда, когда центры  $(x_t^i y_t^i)$  и  $(x_\tau' y_\tau')$  совпадают. Приравнивая оба соотношения, видим, что

$$H(x_\tau' y_\tau')_i \frac{dx_\tau'}{d\tau} t^{-1} + C(x_\tau' y_\tau') \frac{dx_\tau'}{d\tau} - H'(x_\tau' y_\tau')_i \frac{dx_\tau'}{d\tau} t = \frac{\varepsilon}{\tau - t} + \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{P}(\tau) t^{k-1}$$

при  $t \neq 0$ ,  $\tau \neq 0$  и  $\tau \neq t$ . В круге  $|t| < |\tau|$

$$\frac{1}{\tau - t} = \tau^{-1} \left( 1 + \frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{\tau^2} + \dots \right),$$

поэтому в правой части коэффициент при  $t^{-1}$  имеет вид

$$\mathfrak{P}(\tau)$$

а при  $t^1$  —

$$\varepsilon\tau^{-2} + \mathfrak{P}(\tau),$$

причем  $\varepsilon$  не равно нулю, только если  $(x'_\tau y'_\tau)$  описывает элемент с центром в  $(a_i b_i)$ . Сравнивая эти члены со стоящими в левой части, получаем

$$H(x'_\tau y'_\tau)_i \frac{dx'_\tau}{d\tau} = \mathfrak{P}(\tau), \quad H'(x'_\tau y'_\tau)_i \frac{dx'_\tau}{d\tau} = -\varepsilon\tau^{-2}\mathfrak{P}(\tau) \quad (4.5)$$

Переобозначая произвольный элемент  $(x'_\tau, y'_\tau)$  через  $(x_t y_t)$ , имеем

**Теорема 4.4.** При произвольном элементе  $(x_t y_t)$  справедливы разложения

$$\begin{aligned} H(x_t y_t)_i \frac{dx_t}{dt} &= \mathfrak{P}(t), \\ H'(x_t y_t)_i \frac{dx_t}{dt} &= -\frac{\varepsilon_i}{t^2} + \mathfrak{P}(t), \\ H(ab, x_t y_t) \frac{dx_t}{dt} &= \frac{\varepsilon}{t} + \mathfrak{P}(t), \end{aligned}$$

Здесь  $\varepsilon_i$  равно единице, если элемент описывает окрестность точки  $(a_i b_i)$ , и нуль в противном случае;  $\varepsilon$  равно единице, если элемент имеет центр в  $(ab)$ ,  $-1$ , если элемент имеет центр в  $(x_0 y_0)$ , и нуль во всех остальных случаях.

Иными словами, дифференциал первого рода не имеет полюсов, дифференциал второго рода имеет один полюс кратности два, а дифференциал третьего рода — два полюса кратности один.

### 4.3 Линейное пространство голоморфных дифференциалов

Голоморфность интегралов первого рода является весьма замечательным свойством, которое часто принимают за определения. Нам для дальнейшего существенно то, что если

$$F(xy)dx$$

не имеет подобно интегралу первого рода полюсов, то соответствующие ему коэффициенты

$$c_\nu = 0, \quad c_{\nu, -n} = 0$$

Поэтому

$$F(xy) = \sum_{i=1}^{\rho} g'_i H(xy)_i$$

Таким образом, множество всех дифференциалов без особенностей (голоморфных дифференциалов) образует линейное пространство размерности  $\rho$  с базисом  $H(xy)_1, \dots, H(xy)_\rho$ . Условимся для краткости называть каждый элемент этого множества голоморфным дифференциалом.

То, что  $H(xy)_1, \dots, H(xy)_\rho$  линейно независимы можно доказать так. Допустим, что

$$C_1 H(xy)_1 + \dots + C_\rho H(xy)_\rho = 0$$

при всех  $(xy)$ . Если среди  $C_j$  есть отличные от нуля, то, в частности, верно

$$\det(H(a_j b_j)_i) = 0$$

и, значит, существует функция с простыми полюсами в точках  $(a_1 b_1), \dots, (a_\rho b_\rho)$  и без других особенностей, отличная от константы. Но это невозможно.

Отсутствие особенностей — свойство довольно неожиданное, его можно сформулировать еще так: *интеграл*

$$\int_{(ab)}^{(xy)} H(x'y') dx'$$

между любыми (в том числе и бесконечно удаленными) двумя точками  $(ab)$  и  $(xy)$  конечен при некотором выборе пути.

Сказанное вполне очевидно, если точки  $a$  и  $x$  — конечные: на плоскости  $x'$  можно провести кривую конечной длины, выходящую из  $x' = a$  и идущую в  $x' = x$  таким образом, что неявная функция  $y(x)$  со значением  $y(a) = b$  продолжается вдоль нее до значения  $y(x) = y$ . Понятно, что написанный интеграл будет конечен, если брать его вдоль этой кривой. Если же расстояние между точками бесконечно велико, то следует сделать замену  $z = x^{-1}$ , при этом

$$H(1/z, y)_i d(1/z)$$

будет дифференциалом первого рода кривой  $f(1/z, y) = 0$ .

#### 4.4 Периоды интегралов первого и второго рода

При рассмотрении периодов абелевых интегралов удобно рассматривать сразу интегралы первого и второго рода. Именно, назовем совместной системой периодов столбец

$$\left( \int_{\mathfrak{C}} H(xy)_1 dx, \dots, \int_{\mathfrak{C}} H'(xy)_\rho dx \right)^T$$

где  $\mathfrak{C}$  — некоторый замкнутый контур, если хотя бы один его элемент отличен от нуля.

Поскольку интегралы первого рода не являются рациональными функциями, существует такой контур  $\mathfrak{C}$ , доставляющий неравную нулю совместную систему периодов

$$(2\omega_1, \dots, 2\eta_\rho)^T$$

Тогда функция

$$\int F(xy) dx = \int \sum_{i=1}^{\rho} (2\omega_i H'(xy)_1 - 2\eta_i H(xy)_i) dx$$

имеет особенности только при  $(a_1 b_1), \dots$  и при этом только полюса первого порядка. Если эта функция еще и однозначно зависит от  $(xy)$ , то она является рациональной функцией, обращающейся в бесконечность только в  $\rho$  точках. Поскольку такой функции не существует, выписанный интеграл многозначен. Значит, найдется контур  $\mathfrak{C}'$ , такой, что

$$\int_{\mathfrak{C}'} F(xy) dx \neq 0 \tag{4.6}$$

Замечательно то, что теорема 3.4 позволит вычислить этот интеграл. Из этой теоремы следует, что

$$\frac{d}{dx} \int_{\mathfrak{C}} H(xy, x'y') dx' = \sum_{i=1}^{\rho} 2\omega_i H'(xy)_i - 2\eta_i H(xy)_i = F(xy)$$

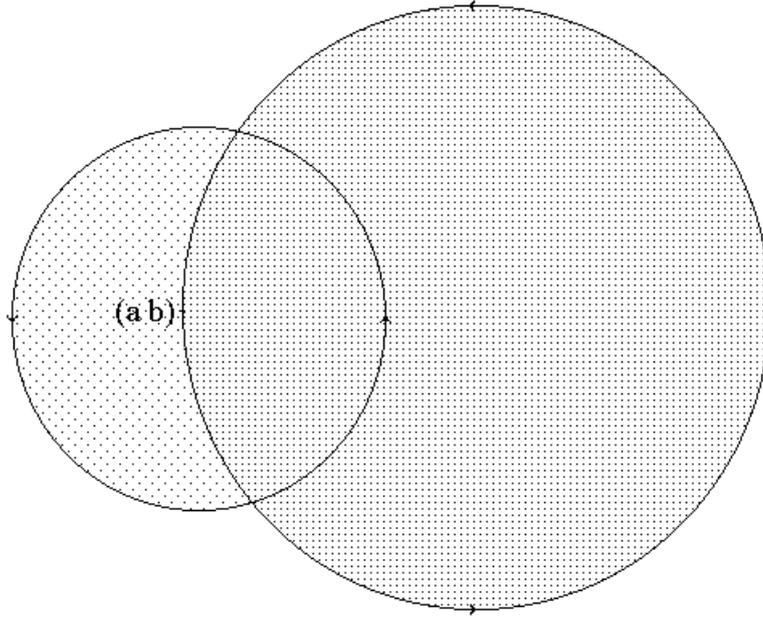


Рис. 4.1: К вычислению пределов  $\Omega(xy)$

то есть  $F(xy)$  является полным дифференциалом от функции

$$\Omega(xy) = \int_{\mathfrak{C}} H(xy, x'y') dx'$$

Кривая  $\mathfrak{C}$  является множеством особых точек для  $\Omega(xy)$ , но пределы внутри области, окруженной  $\mathfrak{C}$ , и снаружи существуют и не совпадают. Мы, разумеется, придерживаемся обычного соглашения о том, что область, находящаяся при обходе контура слева, считается лежащей внутри  $\mathfrak{C}$ .

В самом деле, пусть  $(a, b)$  — точка, лежащая на  $\mathfrak{C}$ , а  $\Omega^+(xy)$  и  $\Omega^-(xy)$  соответствующие пределы. Зададимся малым  $\varepsilon$  и окружим  $x = a_0$  кругом радиуса  $\varepsilon$ . Обозначим как  $\mathfrak{C}^+$  — контур, состоящей из дуги  $\mathfrak{C}$ , лежащей вне этого круга и дуги окружности лежащей вне контура  $\mathfrak{C}$ , аналогично, введем  $\mathfrak{C}^-$ , только возьмем дугу окружности, лежащую внутри  $\mathfrak{C}$ . Функция

$$\Omega^+(xy, \varepsilon) = \int_{\mathfrak{C}^+(\varepsilon)} H(xy, x'y') dx'$$

в силу теоремы Коши совпадает  $\Omega(xy)$  при всех  $(xy)$ , лежащих в  $\mathfrak{C}$ , поскольку

$$\Omega^+(xy, \varepsilon) - \Omega(xy) = \int_{\mathfrak{C}^+(\varepsilon) - \mathfrak{C}} H(xy, x'y') dx'$$

и область внутри контура  $\mathfrak{C}^+(\varepsilon) - \mathfrak{C}$  лежит вне  $\mathfrak{C}$  (на рис 4.1 она обозначена редкими точками), где подынтегральная функция не имеет особенностей в силу  $(xy) \neq (x'y')$ . Только

$$\Omega^+(xy, \varepsilon)$$

вполне определена в окрестности  $(ab)$ , и поэтому предел

$$\Omega^+(ab) = \Omega^+(ab, \varepsilon)$$

Аналогично,

$$\Omega^-(ab) = \Omega^-(ab, \varepsilon)$$

Значит, пределы действительно существуют, конечны, но их разность

$$\Omega^+(ab) - \Omega^-(ab) = \int_{|x'-a|=\varepsilon} H(ab, x'y') dx'$$

Поскольку в окрестности  $(ab)$  верно

$$H(ab, x_t y_t) = \frac{1}{t} + \mathfrak{P}(t) dt$$

то

$$[\Omega(ab)] = \Omega^+(ab) - \Omega^-(ab) = 2\pi i \quad (4.7)$$

Зная это, нетрудно вычислить периоды  $F(xy)$ . Для этого заметим, что особые точки  $F(xy)$  — суть  $(a_1 b_1), \dots$ , поэтому контур  $\mathfrak{C}'$  всегда можно слегка деформировать с тем, чтобы у него не было общих дуг с  $\mathfrak{C}$ , то есть всегда можно считать, что он пересекает  $\mathfrak{C}$  в конечном числе точек  $(x_1 y_1), \dots, (x_r y_r)$ . Использовать формулу Ньютона-Лейбница можно только на участках между точками пересечения. При этом мы имеем

$$\int_{\mathfrak{C}'} \frac{d}{dx} \int_{\mathfrak{C}} H(xy, x'y') dx' dx = - \sum \varepsilon_i [\Omega(x_i y_i)]$$

где  $\varepsilon_i$  принимает значение  $\pm 1$  в зависимости от того, идет ли контур  $\mathfrak{C}'$  внутрь  $\mathfrak{C}$  или во вне. В силу (4.7) это означает

$$\int_{\mathfrak{C}'} F(xy) dx = 2 - \pi i \sum \varepsilon_i$$

Вспоминая выражение для  $F(xy)$ , можем утверждать

**Теорема 4.5.** Если контур  $\mathfrak{C}'$  входит во внутрь  $\mathfrak{C}$   $m$  раз, а выходит из нее  $m'$  раз, то

$$\sum_{k=1}^{\rho} \eta_k \omega'_k - \omega_k \eta'_k = \frac{\pi i}{2} (m - m')$$

Поскольку существует контур  $\mathfrak{C}'$ , на котором

$$\int_{\mathfrak{C}'} F(xy) \neq 0,$$

число  $m$  не равно  $m'$ , то есть число точек, в которых  $\mathfrak{C}'$  входит в  $\mathfrak{C}$ , не совпадает с числом точек, в которых  $\mathfrak{C}'$  выходит из  $\mathfrak{C}$ . Поэтому можно построить из  $\mathfrak{C}'$  контур, который пересекает  $\mathfrak{C}$  ровно 1 раз. На рис. 4.2 показано, как это сделать на примере контура пересекающего  $\mathfrak{C}$  в трех точках. Подытоживая, можем утверждать следующее:

**Теорема 4.6.** Существуют два контура  $\mathfrak{C}$  и  $\mathfrak{C}'$ , пересекающиеся в одной точке.

Пара двух контуров, пересекающихся в одной точке, примечательно тем, что любой путь интегрирования  $\Gamma$  может быть заменен на другой  $\Gamma'$ , который не пересекает контура  $\mathfrak{C}$  и  $\mathfrak{C}'$  и при этом значение интегралов

$$\int_{\Gamma} H(xy)_1 dx, \dots, \int_{\Gamma} H'(xy)_\rho dx$$

меняется на

$$2m'\omega_1 - 2m\omega'_1, \dots, 2m'\eta_\rho + 2m\eta'_\rho$$

соответственно, где  $m$  и  $m'$  — целые числа.

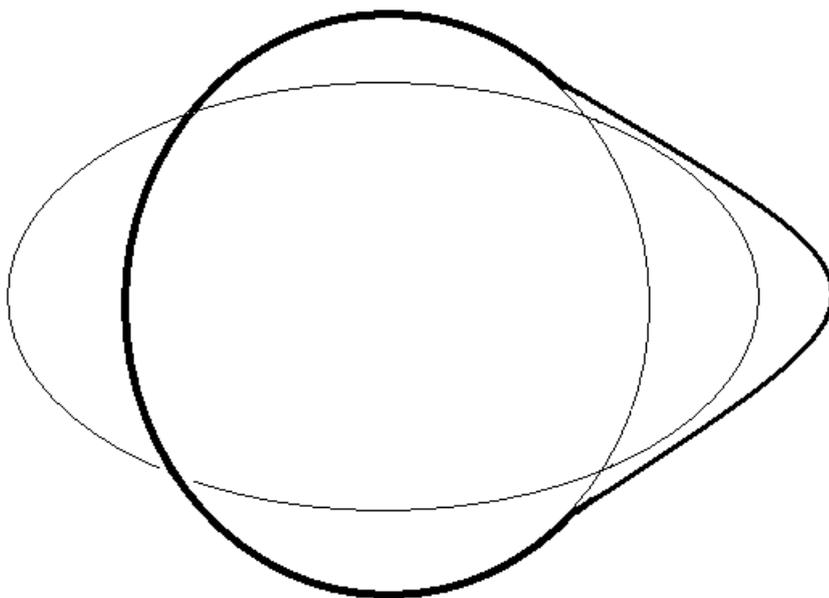


Рис. 4.2: К построению контура, пересекающего  $\mathfrak{C}$  в одной точке

Напр., пусть путь  $\Gamma$  входит во внутрь  $\mathfrak{C}$ . Возьмем точку вне  $\mathfrak{C}$  вблизи от точки пересечения и обойдем круг  $\mathfrak{C}'$  в обратном направлении так, как показано на рис. 4.3. Поскольку этот контур можно взять сколь угодно близким к  $\mathfrak{C}'$ , он уже не пересекает  $\mathfrak{C}$  и подходит к точке пересечения  $\Gamma$  и  $\mathfrak{C}$  с внутренней стороны. Интегралы поэтому новому пути отличаются от исходного на

$$-\int_{\mathfrak{C}'} H(xy)_1 dx = \omega'_1, \dots$$

то есть  $m = 1$ ,  $m' = 0$ .

Переобозначим первую пару контуров как  $\mathfrak{C}_1$  и  $\mathfrak{C}'_1$ . Поскольку в выражении

$$F(xy) = \sum_{i=1}^{\rho} c_i H'(xy)_i - c'_i H(xy)_i$$

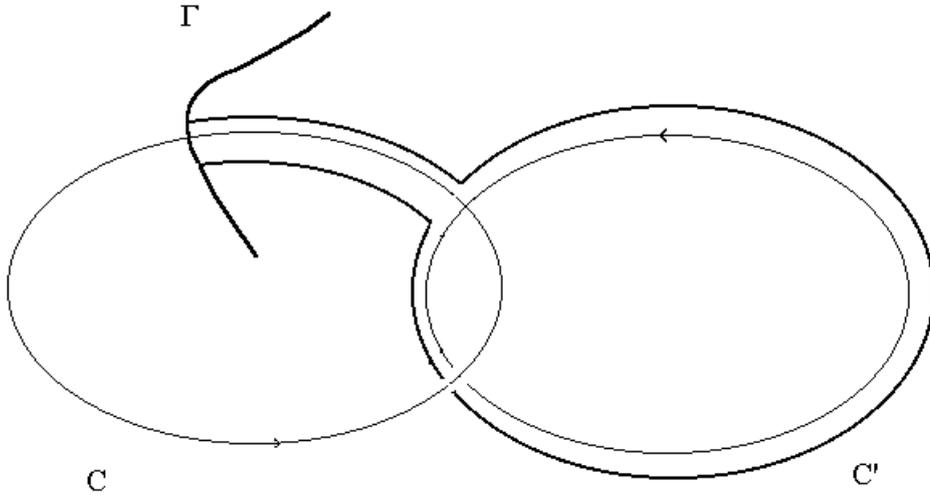


Рис. 4.3: К деформации пути интегрирования

всегда можно подобрать коэффициенты  $c_i, c'_i$  так, чтобы

$$\int_{C_1} F(xy) dx = \int_{C'_1} F(xy) dx = 0,$$

ведь эти условия эквивалентны системе двух линейных уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\rho} c_k \eta_{k,1} - c'_k \omega_{k,1} &= 0 \\ \sum_{k=1}^{\rho} c_k \eta'_{k,1} - c'_k \omega'_{k,1} &= 0 \end{aligned}$$

на  $2\rho$  неизвестные  $c_1, \dots, c'_\rho$ , которая всегда разрешима. Поскольку

$$\int F(xy) dx$$

все равно не может быть рациональной функцией, существует контур  $\Gamma$ , такой что

$$\int_{\Gamma} F(xy) dx \neq 0.$$

Его можно заметить на контур  $\mathfrak{C}_2$ , не пересекающий ни  $\mathfrak{C}_1$ , ни  $\mathfrak{C}'_1$ , при этом по только что доказанному

$$\int_{\mathfrak{C}_2} F(xy)dx = \int_{\Gamma} F(xy)dx \neq 0$$

Тем же способом, которым мы доказали существование  $\mathfrak{C}'_1$ , мы докажем существование контура  $\mathfrak{C}'_2$ , пересекающего  $\mathfrak{C}_2$  лишь в одной точке с  $\varepsilon = 1$ . При этом всегда можно заменить его на такой, который не пересекает ни  $\mathfrak{C}_1$ , ни  $\mathfrak{C}'_1$ .

Двигаясь так дальше, построим  $\rho$  пар контуров  $\mathfrak{C}_j$  и  $\mathfrak{C}'_j$ , таких, что  $\mathfrak{C}_j$  и  $\mathfrak{C}'_j$  пересекающиеся в одной точке, причем  $\mathfrak{C}'_j$  входит во внутрь  $\mathfrak{C}_j$ . Только теперь попытка подобрать коэффициенты в выражении

$$F(xy) = \sum_{i=1}^{\rho} c_i H'(xy)_i - c'_i H(xy)_i$$

так, чтобы

$$\int_{\mathfrak{C}_j} F(xy)dx = \int_{\mathfrak{C}'_j} F(xy)dx = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, \rho),$$

приведет к  $2\rho$  линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\rho} c_k \eta_{k,j} - c'_k \omega_{k,j} &= 0 \\ \sum_{k=1}^{\rho} c_k \eta'_{k,j} - c'_k \omega'_{k,j} &= 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

на  $2\rho$  неизвестные  $c_1, \dots, c'_\rho$ .

Запишем эту систему в матричном виде, полагая

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \dots & \omega_{1\rho} \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_{\rho 1} & \dots & \omega_{\rho\rho} \end{pmatrix}, \dots, \eta' = \begin{pmatrix} \eta'_{11} & \dots & \eta'_{1\rho} \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta'_{\rho 1} & \dots & \eta'_{\rho\rho} \end{pmatrix},$$

так

$$\begin{pmatrix} \omega & \omega' \\ \eta & \eta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c' \\ -c \end{pmatrix} = 0$$

Возникшая здесь матрица

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega & \omega' \\ \eta & \eta' \end{pmatrix}$$

имеет отличный от нуля определитель и поэтому система имеет только тривиальное решение.

В самом деле, в силу теоремы 4.5 выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\rho} \omega_{ki} \eta'_{kj} - \eta_{ki} \omega'_{kj} &= -\frac{\pi i}{2} \delta_{ij} \\ \sum_{k=1}^{\rho} \omega_{ki} \eta_{kj} - \eta_{ki} \omega_{kj} &= 0 \\ \sum_{k=1}^{\rho} \omega'_{ki} \eta'_{kj} - \eta'_{ki} \omega'_{kj} &= 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

которые в матричных обозначениях можно записать как

$$\begin{aligned} \omega^T \eta' - \eta^T \omega' &= -\frac{\pi i}{2} \\ \omega^T \eta - \eta^T \omega &= 0 \\ \omega'^T \eta' - \eta'^T \omega' &= 0. \end{aligned}$$

Напр.,

$$(\omega^T \eta' - \eta^T \omega')_{ij} = \sum_{k=1}^{\rho} \omega_{ki} \eta'_{kj} - \eta_{ki} \omega'_{kj} = -\frac{\pi i}{2} \delta_{ij}.$$

Но тогда

$$\begin{pmatrix} -\eta'^T & \omega'^T \\ \eta^T & -\omega^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & \omega' \\ \eta & \eta' \end{pmatrix} = \frac{\pi i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поэтому матрица системы  $\Omega$  имеет обратную

$$\begin{pmatrix} \omega & \omega' \\ \eta & \eta' \end{pmatrix}^{-1} = \frac{2}{\pi i} \begin{pmatrix} -\eta'^T & \omega'^T \\ \eta^T & -\omega^T \end{pmatrix}$$

Отсюда сразу видно, что ее определитель не равен нулю.

Попутно мы получили еще  $4\rho$  соотношений между периодами:

$$\begin{pmatrix} \omega & \omega' \\ \eta & \eta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\eta'^T & \omega'^T \\ \eta^T & -\omega^T \end{pmatrix} = \frac{\pi i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

поскольку левая обратная матрица и правая совпадают. Особенно важно соотношение между периодами интегралов первого рода

$$\omega\omega'^T - \omega'\omega^T = 0$$

Пусть теперь  $\Gamma$  — произвольный контур, соединяющий  $(ab)$  и  $(xy)$ , а  $\Gamma'$  другой контур, не пересекающий систему из  $2\rho$  контуров. Тогда разность

$$\int_{\Gamma} H(xy)_1 dx - \int_{\Gamma'} H(xy)_1 dx$$

представляет собой интеграл по замкнутому контуру. Его значение изменится на

$$m'_1\omega_{1,1} + \dots - m_\rho\omega'_\rho$$

если заменить этот путь на контур, не пересекающий систему из  $2\rho$  контуров. Обозначим этот контур как  $\mathfrak{C}$ , а соответствующую ему систему совместных периодов как

$$(\omega_1, \dots, \eta_\rho)^T$$

В силу теоремы 4.5 эти числа удовлетворяют системе (4.8), и поэтому они равны нулю. Значит, интеграл

$$\int_{(ab)}^{(xy)} H(xy) dx,$$

взятый по произвольному пути, отличается от интеграла, взятого по пути, не пересекающем  $C_1, \dots, C'_\rho$ , на комбинацию

$$m'_1\omega_{1,1} + \dots - m_\rho\omega'_\rho$$

а интегралы взятые по путям, не пересекающим  $\rho$  пар контуров, вообще совпадают. Доказанное можно сформулировать так: *интегралы первого и второго рода имеют ровно  $2\rho$  систем совместных периодов.*

## 4.5 Периоды интеграла третьего рода

Периоды интеграла третьего рода сразу видны из уже использованного выше соотношения

$$\frac{d}{da'} \int_{\mathfrak{C}} H(a'b', xy) dx = \sum_{i=1}^{\rho} 2\omega_i H'(a'b')_i - 2\eta_i H(a'b')_i$$

Поскольку

$$H(x_0y_0, xy) = 0,$$

можно написать

$$\int_{\mathfrak{C}} H(a'b', xy) dx = \sum_{i=1}^{\rho} 2\omega_i \int_{(x_0y_0)}^{(a'b')} H'(xy)_i dx - 2\eta_i \int_{(x_0y_0)}^{(a'b')} H(xy)_i dx$$

Учитывая результаты предыдущего раздела

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{C}} H(a'b', xy) dx &= \sum_{i,j} 2(m'_j \omega_{ij} - m_j \omega'_{ij}) \int_{(x_0y_0)}^{(a'b')} H'(xy)_i dx \\ &\quad - 2(m'_j \eta_{ij} - m_j \eta'_{ij}) \int_{(x_0y_0)}^{(a'b')} H(xy)_i dx, \end{aligned}$$

где  $m_j, m'_j$  — целые числа, указывающие сколько раз контур  $\mathfrak{C}$  пересекает систему контуров  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}'_1, \dots$ . Поэтому правая часть есть линейная комбинация  $2\rho$  периодов

$$\sum_{i=1}^{\rho} 2\omega_{ij} \int_{(x_0y_0)}^{(a'b')} H'(xy)_i dx - 2\eta_{ij} \int_{(x_0y_0)}^{(a'b')} H(xy)_i dx$$

и

$$\sum_{i=1}^{\rho} 2\omega'_{ij} \int_{(x_0y_0)}^{(a'b')} H'(xy)_i dx - 2\eta'_{ij} \int_{(x_0y_0)}^{(a'b')} H(xy)_i dx$$

с целыми коэффициентами. Только в отличие от предыдущего изменение пути в интегралах от  $(x_0y_0)$  до  $(a'b')$  может привести к изменению выражения еще на  $2\pi m_0$ . Таким образом, всего интеграл третьего рода имеет  $2\rho + 1$  период.

Теорема 4.3 позволяет утверждать, что периоды произвольного абелева интеграла представляют собой комбинацию из  $2\rho$  периодов, взятых вдоль  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}'_1, \dots$ , и еще некоторого числа периодов, взятых вдоль малых кругов, обходящих простые полюса  $F(xy)dx$ . В частности, если запретить путям интегрирования пересекать  $2\rho$  контуров  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}'_1, \dots$ , то многозначность абелева интеграла связана только с простыми полюсами как и у обычной рациональной функции. Поэтому на так разрезанной  $x$  плоскости абелевы интегралы можно рассматривать как рациональные. Это дает повод к такой аналогии. На сфере с  $\rho$  ручками проведем  $\rho$  разрезов  $C_1, \dots, C_\rho$  поперек ручек и  $\rho$  разрезов  $C'_1, \dots$  вдоль ручек. Тогда мы получим систему из  $2\rho$  попарно пересекающихся разрезов, благодаря которым сфера с ручками превращается в односвязное множество. Эту модель и называют римановой поверхностью для абелевых интегралов.

## Глава 5

# Интегрирование в элементарных функциях

Интегралы

$$\int H_i(xy) dx$$

первого рода не берутся в элементарных функциях, хотя бы поскольку среди таковых нет функции всюду голоморфной. Поэтому, вообще говоря, интегралы от алгебраических функций, рациональных на кривой жанра  $\rho$ , не берутся в элементарных функциях. Развитая выше теория позволяет без труда вычислять интегралы тогда, когда это вообще возможно. При этом будем считать, что главная функция  $H(xy, x'y')$  с дополнительными полюсами  $(a_i b_i)$  уже найдена способом, указанным в разделе 3.6.

### 5.1 Интегрирование в алгебраических функциях

Начнем с того, что теорема 4.3 дает решение старой задачи, о нахождении случаев, когда абелев интеграл может быть взят при помощи алгебраических функций.

Пусть задана рациональная функция  $F(xy)$ . В силу теоремы 4.3, ее интеграл является суммой алгебраической функции  $R(xy)$ , которая вычисляется явно по данной  $F$ , и некоторой линейной комбинации интегралов

трех родов

$$\sum_{\nu=1}^r c_{\nu} \int H(x_{\nu}y_{\nu}, xy)dx - \sum_{i=1}^{\rho} (g'_i \int H(xy)_i dx - g_i \int H'(xy)_i dx)$$

Следовательно, для алгебраичности  $\int F(xy)dx$  достаточно выполнения равенств:

$$c_{\nu} = g_i = g'_i = 0.$$

Покажем, что это требование и необходимо.

Допустим, что выражение

$$\sum_{\nu=1}^r c_{\nu} \int H(x_{\nu}y_{\nu}, xy)dx - \sum_{i=1}^{\rho} (g'_i \int H(xy)_i dx - g_i \int H'(xy)_i dx)$$

с некоторыми  $c, g, g'$  алгебраической функцией. Это выражение в точке  $(x, y) = (x_{\nu}, y_{\nu})$  не имеет логарифмической особенности только тогда, когда  $c_{\nu} = 0$ . Выражение же

$$\sum_{i=1}^{\rho} (g'_i \int H(xy)_i dx - g_i \int H'(xy)_i dx)$$

является или однозначной функцией  $(x, y)$  или бесконечнозначной. В первом случае оно является рациональной функцией  $(x, y)$  и имеет полюса разве лишь в точках  $(a_i b_i)$  и поэтому является константой.

Таким образом, установлено следующее следствие теоремы 4.3:

**Теорема 5.1.** Если интеграл от  $F(xy)$  берется в алгебраических функциях, то

$$\int F(xy)dx = - \sum_{\nu=1}^r \sum_{n>0} c_{\nu, -n} \left[ H(xy, x_t^{\nu} y_t^{\nu}) \frac{dx_t^{\nu}}{dt} \right]_{t^{n-1}},$$

где центр  $(x^{\nu}, y^{\nu})$  пары  $(x_t^{\nu} y_t^{\nu})$  пробегает все особые точки  $F(xy)$ , а коэффициенты вычисляются так

$$c_{\nu, -n} = -\frac{1}{n} \left[ F(x_t^{\nu} y_t^{\nu}) \frac{dx_t^{\nu}}{dt} \right]_{t^{n-1}}.$$

## 5.2 Интегрирование в элементарных функциях

Если интеграл берется в элементарных функциях, то, как показал ЛИУВИЛЬ<sup>1</sup>, верно

$$\int F(xy)dx = R_0(xy) + A_1 \ln R_1(xy) + \cdots + A_s \ln R_s(xy)$$

где  $A_i$  — комплексные числа, а  $R_i$  — рациональные функции. Покажем, что в этом случае алгебраическая часть  $R_0(xy)$  совпадает с выражением  $R(xy)$  из теоремы 4.3. В самом деле, в силу этой теоремы верно

$$\begin{aligned} \int F(xy)dx - R(xy) &= \sum_{\nu=1}^r c_\nu H(x_\nu y_\nu, xy) - \sum_{i=1}^{\rho} (g'_i H(xy)_i - g_i H'(xy)_i) = \\ &= R_0(xy) - R(xy) + A_1 \ln R_1(xy) + \cdots + A_s \ln R_s(xy). \end{aligned}$$

Выражения  $A_1 \ln R_1(xy) + \cdots + A_s \ln R_s(xy)$  и интегралы от  $H(x_\nu y_\nu, xy)$  не имеет полюсов, поэтому функция

$$R_0(xy) - R(xy)$$

обращается в бесконечность лишь там, где это делает функция

$$\sum_{i=1}^{\rho} (g'_i H(xy)_i - g_i H'(xy)_i)$$

Поэтому  $R_0(xy) - R(xy)$  обращается в бесконечность разве лишь в точках  $(a_i, b_i)$  и то с первым порядком, то есть равна константе.

**Теорема 5.2.** Если интеграл берется в элементарных функциях, то

$$\int F(xy)dx = R_0(xy) + A_1 \ln R_1(xy) + \cdots + A_s \ln R_s(xy)$$

где  $A_i$  — некоторые комплексные числа, а  $R_i$  — рациональные функции, причем алгебраическая часть дается выражением

$$R_0(xy) = - \sum_{\nu=1}^r \sum_{n>0} c_{\nu, -n} \left[ H(xy, x_t^\nu y_t^\nu) \frac{dx_t^\nu}{dt} \right]_{t^{n-1}},$$

<sup>1</sup>LIUVILLE, JOSEPH. Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendentes // Crelles Journal d. M. Bd. 13. S. 93 - 118.

где центр  $(x^\nu, y^\nu)$  пары  $(x_t^\nu y_t^\nu)$  пробегает все особые точки  $F(xy)$  и

$$c_{\nu, -n} = -\frac{1}{n} \left[ F(x_t^\nu y_t^\nu) \frac{dx_t^\nu}{dt} \right]_{t^{-n-1}}.$$

На основании этой теоремы можно предложить алгоритм вычисления интеграла в элементарных функциях. Итак, пусть дана рациональная функция  $F(xy)$ , интеграл которой берется в элементарных функциях. Вычислим его алгебраическую часть  $R(xy)$  и обозначим для краткости

$$G(xy) := F(xy) - \frac{dR(xy)}{dx}.$$

Тогда в силу теоремы Лиувилля

$$G(xy) = A_1 \frac{1}{R_1(xy)} \frac{dR_1(xy)}{dx} + \dots + A_s \frac{1}{R_s(xy)} \frac{dR_s(xy)}{dx}, \quad (5.1)$$

где  $A_i$  — неизвестные комплексные числа, а  $R_i$  — неизвестные рациональные функции.

Правая часть этого соотношения имеет особенности в тех точках, в которых  $R_i$  обращается в нуль или в бесконечность. Если

$$R(x_t y_t) = t^k (r + \dots), \quad r \neq 0,$$

то

$$\frac{dR(x_t y_t)}{R(x_t y_t)} = \frac{kt^{k-1}(r + \dots)}{t^k(r + \dots)} dt = t^{-1}k(1 + t\mathfrak{P}(t))dt.$$

Поэтому в правой части (5.1) могут быть только простые полюса, и значит функция  $G(xy)$  имеет полюса только первого порядка в том смысле, что

$$\left[ G(x_t^{(\nu)} y_t^{(\nu)}) \frac{dx_t^{(\nu)}}{dt} \right]_{t^{-p}} = 0, \quad p > 1.$$

Для вычетов же соотношение (5.1) дает

$$c_\nu = \left[ G(x_t^{(\nu)} y_t^{(\nu)}) \frac{dx_t^{(\nu)}}{dt} \right]_{t^{-1}} = k_{1,\nu} A_1 + \dots + k_{s,\nu} A_s,$$

$k_{i,\nu}$  — порядок нуля или минус порядок полюса функции  $R_i$  в точке  $(x_\nu, y_\nu)$ . Для краткости далее нулем отрицательного порядка будем называть полюс того же порядка, взятого с обратным знаком.

Множество всевозможных комплексных чисел вида

$$n_1 A_1 + \cdots + n_s A_s$$

с рациональными  $n_i$  образует линейное пространство  $\mathfrak{L}$  над полем рациональных чисел размерности  $p \leq s$ , а всевозможные числа

$$\sum n_\nu c_\nu$$

— его линейное подпространство  $\mathfrak{M}$  размерности  $q \leq p$ . Всегда существует такой базис  $B_1, \dots, B_p$ , что числа  $A_i$  и  $c_\nu$  являются линейными комбинациями  $B_i$  с целыми коэффициентами, причем в выражения для  $c_\nu$  входят только  $B_1, \dots, B_q$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int G(xy) dx &= \sum A_i \ln R_1(xy) = B_1 \left( \sum n_{1j} \ln R_j(xy) \right) + \cdots = \\ &= B_1 \ln R'_1(xy) + \cdots + B_p \ln R'_p(xy), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где  $R'_i$  — некоторые рациональные функции  $(x, y)$ .

Пусть  $(x_t, y_t)$  описывает окрестность нуля или полюса  $R'_p$ , тогда при некоторых целых  $k_i$  верно

$$\left[ G(x_t y_t) \frac{dx_t}{dt} \right]_{t^{-1}} = k_1 B_1 + \cdots + k_p B_p, \quad k_p \neq 0.$$

Коль скоро вычеты  $G$  выражаются через первые  $q$  чисел  $B_i$ , то в случае  $q < p$  между  $B_1, \dots, B_p$  имеется нетривиальное линейное соотношение с целыми коэффициентами, что невозможно. Поэтому  $q = p$  и линейное пространство  $\mathfrak{L}$  совпадает со своим подпространством  $\mathfrak{M}$ .

Это обстоятельство позволяет по данной функции  $G(xy)$  найти числа  $B_i$  с точностью до мультипликативной константы. Именно, пусть  $C_1, \dots, C_p$  — базис линейного пространства над полем рациональных чисел всех чисел, “натянутого” на вычеты  $c_\nu$  и пусть  $c_\nu$  имеют в нем целые координаты  $m_{i,\nu}$ :

$$c_\nu = m_{1,\nu} C_1 + \cdots + m_{p,\nu} C_p.$$

Тогда базис  $B_i = C_i/k$  с достаточно большим натуральным  $k$  удовлетворяет условию: некоторые неизвестные элементы  $A_i$  имеют в этом базисе целые координаты.

Обратимся теперь к нулям и полюсам  $R'_i$ . Если в центре  $(a, b)$  пары  $(x_t, y_t)$  функция  $G(xy)$  не имеет полюса, а некоторые из функций  $R'_i$  имеют нули или полюса, то имеются такие целые числа  $k_i$ , среди которых есть отличные от нуля, что

$$0 = k_1 B_1 + \dots + k_p B_p.$$

Это не совместимо с линейной независимостью  $B_i$  над полем рациональных чисел. Поэтому нули и полюса функций  $R'_i(xy)$  суть полюса  $G(xy)$ . Обозначим их как  $(x_1 y_1), \dots$ . Вычисляя вычеты правой и левой частей (5.1) в точке  $(x_\nu, y_\nu)$ , имеем

$$c_\nu = k_{1,\nu} B_1 + \dots + k_{p,\nu} B_p;$$

откуда

$$k_{i,\nu} = k m_{i,\nu}.$$

Таким образом, функции  $R'_i$  имеют нули и полюса только в полюсах  $G(xy)$  и их порядки известны с точностью до мультипликативной константы  $k$ .

Используя метод, изложенный в разделе 3.5, можно построить функции  $R''_i(xy)$ , имеющие нули и полюса в точках  $(x_1, y_1), \dots$  соответственно с порядками  $l k_{i,1}, \dots$ . Здесь натуральное число  $l$  подбирается как наименьшее число, при котором все указанные функции существуют. Такое число существует, поскольку при  $l = k$  неизвестные нам функции  $R'_i$  обладают указанными свойствами. Заметим теперь, что производная по  $x$  выражения

$$k \ln R''_i(xy) - l \ln R'_i$$

не имеет особенностей, поэтому

$$R'_i = \text{const} (R''_i)^{k/l}.$$

В силу (5.2) можно записать

$$\int G(xy) dx = \frac{B_1 k}{l} \ln R''_1(xy) + \dots = \frac{C_1}{l} \ln R''_1(xy) + \dots + \frac{C_p}{l} \ln R''_p(xy).$$

В этом выражении функции  $R_i''$  и коэффициенты  $C_i$  и  $l$  являются известными, вычисляемыми как только дана функция  $G$ . Таким образом, всегда можно вычислить и логарифмическую часть интеграла от  $F(xy)$ , если только этот интеграл берется в элементарных функциях.

На примере проблемы интегрирования в элементарных функциях можно весьма точно указать весьма странное свойство лекций Вейерштрасса. В них решено много важнейших и старейших проблем, однако об этом прямо ничего не сказано. Вероятно, В. ВИРТИНГЕР<sup>2</sup> первым отметил, что теория главной функции дает и при том весьма простое решение проблемы интегрирования в конечном виде, сам же Вейерштрасс не счел нужным обратить чье-либо внимание на это обстоятельство. Это замечание, однако, осталось незамеченным последующими исследователями. В 1916 ХАРДИ (Hardy) высказал мнение, что за конечное число шагов невозможно выяснить берется ли эллиптический интеграл в элементарных функциях. Затем спустя пол века, в 1970-х годах, РИШ (Risch) предложил такой алгоритм, это — очень сложный алгоритм со множеством исключительных случаев, а перечень лемм, необходимых для его обоснования, занимает несколько страниц.<sup>3</sup>

---

<sup>2</sup>Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Art. 2 B 2 (1901)

<sup>3</sup>ДЭВЕНПОРТ Дж. Интегрирование алгебраических функций. М.: Мир, 1985. Гл. 4.