Основания аналитической теории дифференциальных уравнений

М. Д. Малых,

кафедра математики физического факультета МГУ.

12 сентября 2012 г.

Оглавление

Глава 1

Теорема Коши

1.1. Введение

Первоначальная задача интегрального исчисления состояла в том, чтобы по данной связи между переменными и их дифференциалами отыскать связь между переменными. Отыскать — значит выразить связь при помощи арифметических действий, получить выражение для счета, как говорили математики XVIII века. Несмотря на все успехи качественной теории и численных методов решения дифференциальных уравнений, и сейчас дифференциальное уравнение считается окончательно решенным, если найдено аналитическое выражение для его общего решения.

При этом не всегда можно в точности понять, чего мы хотим найти, называя это аналитическим решением, и зачем мы его хотим найти. Понятно, что уравнение $\dot{x} = x$ имеет аналитическое решение, именно $x = Ce^t$, равно как, скажем, задача двух тел. Однако разрешима ли задача трех тел аналитически и бывают ли вообще физические задачи, которые тем не менее не имеют аналитического решения?

Вопросы такого рода не возникали перед математиками эпохи Лейбница, поскольку почти все дифференциальные уравнения, какие им доставляли приложения, легко решались в элементарных функциях. Правда в 1697 году Яков Бернулли отписал Лейбницу, что совершил множество безуспешных попыток решить уравнение

$$dy = y^2dx + x^2dx,$$

и спрашивал его мнение. Спустя пять лет Бернулли пришел к мысли, что при подстановке $y = -\frac{z'}{z}$ уравнение превращается в линейное $z'' + x^2z = 0$, решение этого уравнение можно выписать в виде бесконечного степенного ряда (на подобие того, как это делается теперь в курсе ММФ с уравнением Бесселя), а следовательно, решение исходного можно отыскать в виде отношения двух степенных рядов. Только в начале XVIII решительно никто не мог согласиться с тем, что это выражение есть то, что требовалось найти. Следующие пол века уже все семейство Бернулли пыталось придумать что-то лучшее. В 1724 году граф Риккати опубликовал анаграмму, в которой давалось решение более общего уравнения

$$ax^ndx + y^2dx = bdy.$$

Анаграмма эта так и не была расшифрована, зато уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$$

получило свое современное название – уравнение Риккати.[1]

От уравнения Риккати до конца XVIII века отмахивались, надеясь в скором времени угадать правильную подстановку. Чтобы исследовать вопрос разрешимость более-менее систематически, нужно как-то описать класс функций, разрешимость дифференциального уравнений в котором предлагается исследовать. Мало того, нужно еще, чтобы исследование разрешимости в этом классе не было бы слишком сложно. Существует, вероятно, лишь один класс функций, разрешимость в котором легко исследовать — это множество полиномов. Собственно говоря, это было хорошо известно всякому читателю «Геометрии» Декартом, того ее места, где автор пытался решить задачу де Бона.

[1]Подробнее см. в 1-ой гл. «Теории бесселевых функций» Ватсона.

1.2. Решение в полиномах

Обратимся к начальной задаче

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x|_{t=t_0} = x_0.$$

и будем для простоты считать, что $f(x, t)$ — полином по x и t. Выясним, удовлетворяет ли ей выражение

$$x = \sum_{n=0}^{N} a_n (t - t_0)^n$$

с комплексными коэффициентами a_n. Во-первых, $a_0 = x_0$, далее, при $t = t_0$ дифференциальное уравнение дает

$$a_1 = f(a_0, t_0)$$

Дифференцируя уравнение один раз, получим

$$d^2x = \mathfrak{D} f dt^2,$$

где

$$\mathfrak{D} f(\dot{x}, x, t) = \frac{\partial f}{\partial x} f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Отсюда при $t = t_0$ имеем

$$2a_2 = \mathfrak{D} f|_{x=x_0,\, t=t_0}$$

Действуя так далее, получим

$$a_n = \frac{1}{n!} \mathfrak{D}^{n-1} f|_{x=x_0,\, t=t_0} \quad (n = 1, 2 \dots)$$

Таким образом, для существования решения в виде полинома по t необходимо и достаточно, чтобы эти рекуррентные выражения на $N + 1$-ом шаге оборвались, то есть чтобы было

$$\mathfrak{D}^n f|_{x=x_0,\, t=t_0} = 0 \quad (n = N, N + 1, \dots).$$

1.3. Решение как формальный степенной ряд

Казалось бы следующий шаг должен состоять в исследовании разрешимости в рациональных, затем в алгебраических и наконец в элементарных функциях. Однако этот пусть сопряжен со значительными трудностями, которые первым набрался смелости преодолевать Лиувилль в 1830-х годах. Математики конца XVIII века, и в первую очередь Лагранж, поступили куда проще, приняв, после некоторых колебаний, ряд

$$x = \sum \frac{1}{n!} \mathfrak{D}^{n-1} f|_{x=x_0,\, t=t_0} (t-t_0)^n$$

за решение уравнения $\dot{x} = f(x, t)$.

Для этого совсем не обязательно доказывать сходимость ряда. Нужно только, чтобы для формального степенного ряда

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n$$

было определено $f(x, t)$, его производная и значение при $t = t_0$. Но мы и в самом деле можем рассмотреть множество всевозможных выражений

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n$$

которые складываются и умножаются так

$$\sum a_n (t-t_0)^n + \sum b_n (t-t_0)^n = \sum (a_n + b_n)(t-t_0)^n$$

и

$$\sum a_n (t-t_0)^n \sum b_n (t-t_0)^n = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)(t-t_0) + \dots$$

Производную для этого класса тоже можно ввести ни одним словом не обмолвившись о бесконечно малом, просто положив

$$\frac{d}{dt} \sum a_n (t-t_0)^n = \sum n a_n (t-t_0)^{n-1}. \tag{1.1}$$

Наконец коэффициент a_0 можно условиться называть значением $\sum a_n(t-t_0)^n$ при $t = t_0$. Это множество с так введенными операциями теперь называют кольцом формальных степенных рядов переменной $t - t_0$. При этом формальный ряд в некотором смысле арифметическое выражение, но уж точно не функция в современном смысле этого слова, зато вполне функция в смысле Эйлера: он понимал под таковой выражение для счета, в котором некоторые действия присутствуют бесконечное число раз.

Приняв это, доказанное можно сформулировать в виде теоремы Лагранжа и Лакруа:

Теорема 1.1. [Лагранж и Лакруа, 1798[2]] Любое дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x} = f(x, t)$$

с начальным условием $x|_{t=t_0} = x_0$ и целой рациональной правой частью $f(x,t)$ имеет и притом единственное решение в кольце формальных степенных рядов, а именно

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathfrak{D}^{n-1} f|_{x=x_0,\, t=t_0} (t-t_0)^n.$$

Эта теорема без труда переносится на системы дифференциальных уравнений и в простых случаях дает хорошо известные результаты. Напр., для уравнения $\dot{x} = x$ она доставляет решение

$$x = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = x_0 \exp(x),$$

а из этого можно развить всю теорию линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Однако теорема Лагранжа и Лакруа не совсем то, что хотелось. Во-первых, единственность доказана в классе формальных рядов, значит,

[2] Lacroix, Sylvestr François. Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. 1 ed. Paris, 1798. Tome 2, § 594

нельзя исключить решения другого вида. Как максимум можно вытащить, что коэффициенты ряда Тейлора для решения определены однозначно. У Коши на сей счет был любимый пример: гладкая функция e^{-1/t^2} вещественной переменной t имеет нулевой ряд Тейлора. Во-вторых, не доказано, что по найденному выражению для решения можно что-то посчитать (то есть что ряд где-то сходится). Представляется также весьма занимательным, что эта теорема была первой из числа теорем существования и единственности, столь характерных для современной математической физики.

1.4. Локальная теория Коши

Первоначально Коши хотел найти «правильное» доказательство существования и единственности решения начальной задачи. Спустя семь лет, в 1842 г., он перестал трактовать ряд из теоремы 1.1 как ряд Тейлора. Именно, выражение

$$g = \sum a_n(t-t_0)^n$$

можно рассматривать как правило, полагая

$$g(t) = \lim_{N=\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n(t-t_0)^n$$

если этот предел существует. Утверждение о сходимости ряда из теоремы 1.1 в некоторой области $|t-t_0| \leq h$ с тех пор называют теоремой Коши. Главная идея состоит в переходе от теории формальной к теории локальной.

Теорема 1 (Коши, 1842 г.[3]). Рассмотрим начальную задачу (задачу Коши): найти функции $x_1,\ x_2,\dots,x_n$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x,t), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x,t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x,t), \end{cases} \tag{1.2}$$

где t — независимая переменная, $x_1,\ x_2,\dots,x_n$ — функции этой переменной, а f_m — функции x и t, и принимающие при $t=t_0$ заданные значения

$$x_1 = x_1^0,\ x_2 = x_2^0,\dots,x_n = x_n^0. \tag{1.3}$$

Для краткости условимся писать просто x вместо $(x_1,\dots,x_M)$ и, стало быть, саму задачу записывать так

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x|_{t=t_0} = x_0, \tag{1.4}$$

опуская индекс.

Пусть функции $f_m(x,t)$ по абсолютному значению не превышают фиксированного числа $\mathfrak{M}$ в окрестности начальных данных $t_0,\ x_0$ вида

$$|t-t_0| \le a, |x_1 - x_1^0| \le b,\dots,|x_n - x_n^0| \le b,$$

и в этой области представимы рядами по натуральным степеням $t-t_0, x_1-x_1^0,\dots,x_M-x_M^0$, тогда существует ряд вида

$$x_m = x_m^0 + a_m(t-t_0) + b_m(t-t_0)^2 + \dots, \quad (m=1,\dots,n) \tag{1.5}$$

сходящейся в области $|t-t_0| < h$, где

$$h = a(1 - e^{-\frac{b}{\mathfrak{M}a(n+1)}}),$$

удовлетворяющей начальной задаче. Более того, не существует другого ряда вида (1.5), удовлетворяющего начальной задаче.

[3]В открытой печати первый мемуар Коши, содержащий это утверждение, появился в 1842 г. (см. Cauchy A.L. Œuvres. I ser. T. 7, Paris 19, p. 1.), одновременно с этим указанную теорему доказал Вейерштрасс (см. Weierstrass K. Math. Werke. T. 1, Abh. 4).

Сама формулировка теоремы Коши требует некоторых пояснений относительно степенных рядов нескольких переменных.

1.4.1. Степенные ряды нескольких комплексных переменных

Теоремы теории степенных рядов нескольких переменных можно сформулировать и доказать в полной аналогии с общеизвестными теоремами теории рядов одной переменной, если из N независимых переменных, скажем $z_1, \ldots, z_N$, образовать „векторную переменную“ $z = (z_1, \ldots, z_n)$, а выражение вида

$$\sum c_{n_1,\ldots,n_N} (z_1)^{n_1} \ldots (z_N)^{n_N}$$

записать как

$$\sum c_n z^n.$$

Здесь мультииндекс $(n_1, \ldots, n_N)$ обозначен как n, коэффициент $c_{n_1,\ldots,n_N}$ — как c_n, а степень $(z_1)^{n_1} \ldots (z_N)^{n_N}$ — как z^n. Примем еще так введенное сравнение мультииндексов: $n > m$, если и только если $n_1 > m_1, \ldots, n_N > m_N$.

Если в сумме числа $n_1, \ldots n_N$ принимают целые неотрицательные значения, то ее называют рядом по натуральным степеням z или короче степенным рядом и обозначают по предложению Вейерштрасса как $\mathfrak{P}(z_1, \ldots, z_N)$ или $\mathfrak{P}(z)$. При этом, для того, чтобы различать степенные ряды, будем ставить у символа $\mathfrak{P}$ нижние индексы, напр, писать $\mathfrak{P}_1(z)$ и $\mathfrak{P}_2(z)$.

Теперь обычное определение из теории рядов одной переменной — *говорят, что ряд $\mathfrak{P}(z)$ сходится в точке $z = a$, если существует такое число b, что разность*

$$\left| \sum_{n=0}^{M} c_n z^n - b \right|$$

становится меньше любого заданного числа ε, лишь только M больше некоторого $M_0(\varepsilon)$ — сохраняет смысл, если понимать под M и M_0 — мультииндексы. Именно так и понимается сходимость рядов для правый частей в теореме Коши.

Следует подчеркнуть, что требуя в условии этой теоремы, чтобы функции $f_m(x, t)$ в области вида

$$|t - t_0| \le a, |x - x_0| \le b$$

были представимы степенными рядами, мы можем считать переменные t, x вещественными или комплексными, однако на самом деле из сходимости при вещественных t и x следует сходимость при комплексных и мы воспользуемся этим при доказательстве теоремы Коши.

Дело в том, что, *если ряд вида* $\mathfrak{P}(z_1, \dots, z_N)$ *сходится абсолютно*[4] *при* $z = a$, *то он сходится и при всех* z *из области*

$$|z_1| < |a_1|, \dots, |z_N| < |a_N|.$$

Поэтому, если функции $f_m(t, x)$ представимы рядами вида $\mathfrak{P}_m(t - t_0, \dots)$ на сегментах $|t - t_0| \le a, \dots$, то тоже верно и в кругах $|t - t_0| \le a, \dots$ на комплексных плоскостях.

Доказательство этого утверждения повторяет случай $N = 1$. Только в одномерном случае из просто сходимости $\mathfrak{P}(a) = \sum c_n a^n$ следовало существование $\mathfrak{M} = \sup\limits_n |c_n a^n|$, поскольку все члены, начиная с некоторого, были меньше любого заданного ε, при $N > 1$ приходится дополнительно требовать абсолютность сходимости, поскольку за $\mathfrak{M}$ можно принять

$$\sum_{n=0}^{M} |c_n||a|^n < \infty.$$

Далее все как в одномерном случае: при $|z_1| \le q_1|a_1|, \dots$ ряд $\mathfrak{P}(z)$ мажорирутся рядом

$$\sum |c_n a^n||z/a|^n \le \mathfrak{M} \sum q^n$$

[4]Тонкость, связанная с этим дополнительным, но часто упускаемым требованием, была отмечена в статье В.А. Беляева «О множествах сходимости двойных степенных рядов с комплексными переменными» (Изв. вузов. Матем., 1973, № 3, 9–13).

Появившийся здесь ряд

$$\sum_{n_1,\ldots,n_N\geq 0} q_1^{n_1}\ldots q_N^{n_N}$$

при $0 < q_i < 1$ сходится к $(1-q_1)^{-1}\ldots(1-q_N)^{-1}$, поскольку произведение

$$(1-q_1)\ldots(1-q_N)\sum_{n_1=0}^{k_1}\cdots\sum_{n_N=0}^{k_N} q_1^{n_1}\ldots q_N^{n_N},$$

которое можно переписать как

$$(1-q_1)\sum_{n_1=0}^{k_1} q_1^{n_1}\ldots(1-q_N)\sum_{n_N=0}^{k_N} q_N^{n_N},$$

стремится к единице при $K\to\infty$ в силу известных свойств геометрической прогрессии.

Для проверки выполнения условия теоремы Коши при заданных $f_m(x,t)$ полезно иметь в виду, что последнее может быть заменено на следующие: функции $f_m(x,t)$ непрерывны и дифференцируемы в области

$$|t-t_0|\leq a, |x_1-x_1^0|\leq b,\ldots,|x_n-x_n^0|\leq b.$$

Это опять связано с общим фактом из теории рядов: *если функция* $F(z_1,\ldots,z_n)$ *непрерывна и дифференцируема по* z_i *в области* G_i *комплексной плоскости* z_i, $(i=1,\ldots,n)$, *то она может быть разложена в ряд вида* $\mathfrak{P}(z_1,\ldots,z_N)$, *сходящийся в кругах, касающихся* $G_1,\ldots$. Такую функцию F называют голоморфной и стало быть, теорема утверждает, что голоморфную функцию можно разложить в ряд.

Для доказательства возьмем произвольную точку a из этой области и окружим точку $z_1 = a_1$ плоскости z_1 контуром $\mathfrak{C}_1$, тогда интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}_1}\frac{F(z_1,\ldots,z_N)dz_1}{(z_1-a_1)}$$

не зависит от пути и равен $F(a_1, z_2, \ldots, z_n)$. Окружив $z_2 = a_2$ плоскости z_2 контуром $\mathfrak{C}_2$, опять видим, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}_2} \frac{F(a_1, z_2, \ldots, z_N)dz_2}{(z_2 - a_2)}$$

не зависит от пути и равен $F(a_1, a_2, z_3, \ldots, z_N)$. Действуя так далее, мы придем к соотношению

$$F(a) = \frac{1}{(2\pi i)^N}\int\limits_{\mathfrak{C}_N} \ldots \int\limits_{\mathfrak{C}_1} \frac{F(z)dz_1 \ldots dz_N}{(z_1 - a_1) \ldots (z_N - a_N)},$$

где контура $\mathfrak{C}_i$ могут быть выбраны как угодно, лишь бы точка $z_i = a_i$ лежала внутри $\mathfrak{C}_i$. Это соотношение является обобщением интегральной формулы Коши.

Окружим теперь $z_1 = 0, \ldots, z_N = 0$ кругами $|z_1| \le r_1, \ldots$ которые лежат целиком в $G_1, \ldots$ и проведем контура $\mathfrak{C}_1, \ldots$ вне этих кругов. Тогда для точки $z = (z_1, \ldots)$, координаты которой лежат в этих кругах, верно

$$F(z) = \frac{1}{(2\pi i)^N}\int\limits_{\mathfrak{C}_N} \ldots \int\limits_{\mathfrak{C}_1} \frac{F(\xi)d\xi_1 \ldots d\xi_N}{(\xi_1 - z_1) \ldots (\xi_N - z_N)}$$

Остается заметить, что дробь

$$\frac{1}{(\xi_1 - z_1) \ldots (\xi_N - z_N)} = \frac{1}{\xi_1 \ldots \xi_N}\frac{1}{(1 - z_1/\xi_1) \ldots (1 - z_N/\xi_N)}$$

можно разложить в ряд

$$\frac{1}{(\xi_1 - z_1) \ldots (\xi_N - z_N)} = \frac{1}{\xi_1 \ldots \xi_N}\sum_{n_1, \ldots, n_N \ge 0}\left(\frac{z_1}{\xi_1}\right)^{n_1} \ldots \left(\frac{z_N}{\xi_N}\right)^{n_N}$$

который мажорируется рядом

$$\sum_{n_1, \ldots, n_N \ge 0} q_1^{n_1} \ldots q_N^{n_N}$$

где $0 < q_i = r_i/R_i < 1$, а R_1 — минимальное значение $|z_1|$ на контуре $\mathfrak{C}_1$ и т.д. Этот последний, как мы знаем, сходится, а значит, исходный ряд сходится равномерно по ξ_i, лежащих на $\mathfrak{C}_i$, поэтому интегрирование по $\xi_1, \ldots$

и суммирование можно поменять местами. Это позволяет представить $F(z)$ в виде ряда по натуральным степям z в кругах $|z_1| \leq r_1, \ldots$, которые могут сколь угодно близко подходить к границам $G_1, \ldots$, что и тр. д.

1.4.2. Доказательство теоремы Коши

Доказательство теоремы 1 было дано самим Коши путем построения мажоранты. Мы изложим его с некоторыми упрощениями, принадлежащими, по-видимому, авторам первых учебников по теории функций Брио и Буке (Briot et Bouquet).[5]

Сделав замену переменных $x'_m = x_m - x^0_m$ и $t' = t - t_0$, мы сведем все к частному случаю задачи

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \tag{1.6}$$

с начальными условиями при $t = 0$ заданные значения

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots, x_n = 0. \tag{1.7}$$

(i) По условию в рассматриваемой области

$$|t| \leq a, |x_1| \leq b, \ldots, |x_M| \leq b,$$

функции $f_m(x, t)$ даются сходящимися рядами

$$f_m(x, t) = \sum_{m_0, \ldots, m_n \geq 0} A^{(m)}_{m_0, \ldots, m_n} t^{m_0} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$$

Если существует сходящийся степенной ряд

$$x_m = c_1^{(m)} t + c_2^{(m)} t^2 + \cdots = t\mathfrak{P}(t),$$

доставляющий решение (1.6), то его коэффициенты можно выразить через коэффициенты A функций $f(x, t)$ однозначно. В самом деле, подставляя этот ряд в

$$\dot{x}_m = f_m(x, t)$$

[5]См. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.

имеем

$$c_1^{(m)} + 2c_2^{(m)}t + \cdots = f_m(c_1 t + c_2 t^2 + \ldots, t)$$

Откуда при $t = 0$ получается

$$c_1^{(m)} = A_{0\ldots 0}^{(m)}$$

Дифференцируя последнее тождество по t один раз, получим

$$2c_2^{(m)} + 3c_3^{(m)}t + \cdots = \sum_{k=1}^{n} \left(f_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial t} \right) f_m \Big|_{x = c_1 t + c_2 t^2 + \ldots}$$

и при $t = 0$

$$2c_2^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} A_{0\ldots 0}^{(k)} A_{0\ldots 1\ldots 0}^{(m)} + A_{10\ldots 0}^{(m)}.$$

Действуя так далее, выразим

$$c_k^{(m)} = \varphi_k^{(m)}(A), \tag{1.8}$$

где правая часть представляет собой целую рациональную функцию коэффициентов A_k с $k_0 + \ldots k_n < k$. Поэтому решение в виде ряда определено однозначно. Впрочем, это размышление повторяет проделанное выше при доказательстве теоремы 1.1.

(ii) Определим по формуле (1.8) числа $c_k^{(m)}$ и подставим выражения

$$x_k = c_1^{(k)} t + c_2^{(k)} t^2 + \ldots \quad (k = 1, \ldots n) \tag{1.9}$$

в

$$\dot{x}_m - f_m(x, t).$$

В результате получим функцию переменной t, все производные которой в нуле в силу выбора коэффициентов c равны нулю, поэтому эта функция равна нулю тождественно и, значит, если ряд с так выбранными коэффициентами c сходится, то он доставляет решение исходной задаче Коши.

Все дело, стало быть, сводится к построению мажоранты для рядов

$$c_1^{(m)} t + c_2^{(m)} t^2 + \ldots.$$

С этой целью рассмотрим мажоранту для $f_m(x,t)$, то есть сходящийся в рассматриваемой области ряд

$$\psi_m(x,t) = \sum B_k^{(m)} t^{k_0} \dots x_n^{k_n},$$

коэффициенты которого удовлетворяют неравенству

$$|A_k^{(m)}| \leq B_k^{(m)}.$$

Поскольку в выражении для $\varphi_k^{(m)}$ нет вычитания и деления, но лишь сложение и умножение, верно

$$|c_1^{(m)}| = |A_{0\dots0}^{(m)}| \leq B_{0\dots0}^{(m)} = \varphi_1^{(m)}(B),$$

$$\begin{aligned} |c_2^{(m)}| &\leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} |A_{0\dots0}^{(k)}|\,|A_{0\dots1\dots0}^{(m)}| + |A_{10\dots0}^{(m)}| \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} B_{0\dots0}^{(k)} B_{0\dots1\dots0}^{(m)} + B_{10\dots0}^{(m)} = \varphi_2^{(m)}(B) \end{aligned}$$

и вообще,

$$|c_k^{(m)}| \leq \varphi_k^{(m)}(|A|) \leq \varphi_k^{(m)}(B).$$

Поэтому зная мажранту $\varphi_m(x,t)$ для $f_m(x,t)$ можно построить мажоранту

$$x_k = \gamma_1^{(k)} t + \gamma_2^{(k)} t^2 + \dots \tag{1.10}$$

для ряда (1.9), рассчитав γ по тем же формулам (1.8), что и коэффициенты c, взяв вместо коэффициентов A ряда $f(x,t)$, коэффициенты B ряда $\psi(x,t)$.

Если подобрать мажоранту ψ так, чтобы задача Коши

$$\dot{x} = \psi(x,t), \quad x|_{t=0} = 0 \tag{1.11}$$

имела голоморфное в окрестности нуля решение $x = \varphi(t)$, которое можно было бы выразить в элементарных функциях, то в силу (i) это решение должно совпадать с рядом (1.10). Таким образом, ряд (1.9) сходится и доставляет решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x|_{t=0} = 0$$

в том круге, в котором сходится голоморфное в окрестности нуля решение задачи Коши, в которой $f(x,t)$ заменена своей мажорантой.

С тем, чтобы уравнения (1.11) интеграровались в элементарных функциях, построим для $f_m(x,t)$ мажоранту $\psi(x,t)$, не зависящую от m. Тогда система сведется к одному уравнению первого порядка. Сделать это не трудно, если заметить, что интегральная формула Коши в применении к ряду

$$\mathfrak{P}(z) = \sum c_n z^n,$$

сходящемуся в области $|z_1| \leq r_1, \ldots$, дает выражение для коэффициентов

$$c_n = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int\limits_{|z_N|=r_n} \cdots \int\limits_{|z_1|=r_1} \frac{\mathfrak{P}(\xi) d\xi_1 \ldots d\xi_N}{\xi_1^{n_1+1} \ldots \xi_N^{n_N+1}}$$

и, в частности, оценку

$$|c_{n_1,\ldots,n_N}| \leq \frac{\mathfrak{M}}{r_1^{n_1} \ldots r_N^{n_N}}$$

где $\mathfrak{M}$ — максимум ряда $\mathfrak{P}(z)$ в рассматриваемой области. Отсюда следует, что функции

$$f_m(x,t) = \sum_{m_0,\ldots,m_n \geq 0} A^m_{m_0,\ldots,m_n} t^{m_0} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$$

мажорируются рядом, в который разлагается функция

$$\frac{\mathfrak{M}}{(1-\frac{t}{a})(1-\frac{x_1}{b})\ldots(1-\frac{x_n}{b})} = \psi(x,t)$$

Для выяснения круга сходимости мажоранты (1.10) заметим, что этот ряд является в силу (i) рядом Тейлора для решения начальной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \cdots = \dfrac{dx_n}{dt} = \psi(x,t), \end{cases} \tag{1.12}$$

с начальными условиями при $t = 0$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \dots, x_n = 0. \tag{1.13}$$

Найдем решение этой задачи явно. Из уравнений (1.12) сразу следует

$$\frac{dx_k}{dx_1} = 1,$$

поэтому в силу начальных условий (1.13) неизбежно

$$x_k = x_1$$

Подставляя это в уравнение

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\mathfrak{M}}{(1-\frac{t}{a})(1-\frac{x_1}{b})\dots(1-\frac{x_n}{b})}$$

получим

$$(1-\frac{x_1}{b})^n dx_1 = \frac{\mathfrak{M}dt}{(1-\frac{t}{a})}.$$

Интегрируя это соотношение и учитывая равенства

$$\int\limits_0^t \frac{\mathfrak{M}dt}{(1-\frac{t}{a})} = -\mathfrak{M}a\ln(1-\frac{t}{a})$$

и

$$\int\limits_0^{x_1} d\vartheta(1-\frac{\vartheta}{b})^n = -\frac{b}{(n+1)}((1-\frac{x_1}{b})^{n+1}-1)$$

находим

$$\frac{b}{(n+1)}((1-\frac{x_1}{b})^{n+1}-1) = \mathfrak{M}a\ln(1-\frac{t}{a}),$$

откуда

$$x_1(t) = b\left(1-\sqrt[n+1]{1+\frac{\mathfrak{M}a(n+1)}{b}\ln(1-\frac{t}{a})}\right)$$

Подкоренное выражение является однозначной аналитической функцией в круге $|t| < a$, а корень (нас устраивает только его главное значение, при котором $x(0) = 1 - 1$) из аналитической функции является однозначной аналитической функцией в круге, радиус которого есть модуль наиближайшего к нулю корня $t = \tau$ уравнения

$$1 + \frac{\mathfrak{M}a(n+1)}{b} \ln(1 - \frac{\tau}{a}) = 0$$

У этого уравнения один корень, именно

$$\tau = a(1 - e^{-\frac{b}{\mathfrak{M}a(n+1)}}) < a$$

Значит, разложения в ряд функций $x_m(t) = x_1(t)$ сходятся в круге $|t| < h$ и удовлетворяют задаче (1.12)-(1.13). В силу единственности ряда, удовлетворяющего задаче (1.12)-(1.13), этот ряд совпадает с рядом для мажоранты. Стало быть, исходные ряды $x_m = \sum c_k^{(m)} t^k$ сходятся в круге $|t| < h$, что и требовалось доказать.

1.5. Целые решения целого уравнения первого порядка

Вероятно, не стоит подробно объяснять, что теорема Коши 1 является лишь локальной теоремой существования, и не дает того, что хотелось. Удивительно то, что, вообще, нельзя сначала ограничится «гладким» случаем, когда правые части

$$\dot{x} = f(x, t)$$

и само решение $x(t)$ при любых начальных данных даются всюду сходящимися рядами (целыми функциями).

Теорема 2 (Реллих Ф., 1940 г.[6]). Пусть в дифференциальном уравнение $\dot{x} = f(x, t)$ правая часть является всюду сходящимся степенным рядом по x, t (целой функцией). Если имеется два решения $x = u(t)$ и $x = v(t)$,

[6] Rellich, Fr. Über die ganzen Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung // Math. Ann. Bd. 117 (1940), p. 587 - 589; см. также Виттих Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М: ГИФМЛ, 1950, с. 114.

которые являются целыми функциями t, то любое другое целое решение $x = w(t)$ имеет вид

$$w(t) = u(t) + (v(t) - u(t))c$$

при надлежащим образом выбранной константе c. Если $f(x,t)$ не является линейной функцией x, то имеется не более чем счетное число констант c_n, при которых выражение

$$u(t) + (v(t) - u(t))c_n$$

является решением и множество c_n не может иметь конечной предельной точки.

Доказательство. Допустим, что существует три целых решения $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$. Тогда в силу теоремы Коши разность $u(t) - v(t)$ всюду отлична от нуля и то же верно для $w(t) - v(t)$. Поэтому выражение

$$\frac{w(t) - v(t)}{u(t) - v(t)}$$

является целой функцией, которая нигде не обращается в нуль. Она не может и принять значение 1, поскольку тогда было бы $w(t) = u(t)$ при некотором t. В силу теоремы Пикара эта функция неизбежна постоянна, то есть

$$\frac{w(t) - v(t)}{u(t) - v(t)} = c$$

или

$$w(t) = u(t) + (v(t) - u(t))c.$$

Если существует бесконечно много констант c_n, при которых выражение

$$u(t) + (v(t) - u(t))c_n$$

является решением, то (при любом фиксированном t) равенство

$$f(x,t) = \dot{u}(t) + \frac{\dot{v}(t) - \dot{u}(t)}{v(t) - u(t)}(x - u(t))$$

верно при всех $x = x_n = u(t) + (v(t) - u(t))c_n$. Поскольку $v(t) - u(t) \neq 0$, последовательность x_n обязательно имеет конечные точки сгущения, если их имеет c_n. В этом случае равенство

$$f(x,t) = \dot{u}(t) + \frac{\dot{v}(t) - \dot{u}(t)}{v(t) - u(t)}(x - u(t))$$

верно при всех x, t, то есть $f(x,t)$ является линейной функцией x. $\square$

Сделаем еще несколько замечаний. Во-первых, линейное дифференциальное уравнение с целыми коэффициентами действительно всегда имеет только целые решение (это легко получить методом разделения переменных). Во-вторых, всегда существует дифференциальное уравнение с целой правой частью, имеющее бесконечную серию целых решений

$$u(t) + (v(t) - u(t))c_n$$

при любых заданных $u(t), v(t)$ и c_n. Для этого можно взять

$$f(x,t) = \dot{u}(t) + \frac{\dot{v}(t) - \dot{u}(t)}{v(t) - u(t)}(x - u(t)) + (v(t) - u(t))g\left(\frac{x - u(t)}{v(t) - u(t)}\right),$$

где $g(z)$ — произвольная целая функция с нулями $0, 1, c_1, c_2, \ldots$.

Теорема Реллиха позволяет сразу понять существенное отличие теорий линейных и нелинейных уравнений: общее решение $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ нелинейного уравнения обязано иметь особенности, положение которых зависит от начальных данных. Простейший пример доставляет уравнение

$$\dot{x} + x^2 = 0,$$

общее решение которого есть

$$x = \frac{1}{t - c}$$

а единственное целое решение есть $x = 0$ (соответствующее $c = \infty$).

Глава 2

Полные аналитические функции

2.1. Аналитические функции по Вейерштрассу

В курсе теории функций комплексной переменной уделяют большое внимание разложению функции, заданной несложным аналитическим выражением в ряд Тейлора. Теорема Коши, наоборот, дает сразу разложение решения в виде ряда $x = \mathfrak{P}(t-t_0)$, сходящегося в некотором круге $|t-t_0| < r$, а нам нужно найти аналитическое выражение для решения, годное во всей комплексной плоскости за исключением особых точек. В этом смысле интегрирование дифференциальных уравнений — операция, обратная разложению заданной функции в ряд Тейлора. [1]

Сложность проблемы можно оценить, если вспомнить формулы

$$\frac{1}{1-x} = \sum x^n, \quad \ln(1-x) = -\sum nx^n;$$

глядя на эти ряды никак не скажешь, что один описывает рациональную функцию, а другой многозначную и трансцендентную. Есть и еще одна проблема: равенство $\frac{1}{1-x} = \sum x^n$ верно только там, где ряд сходится. При $x = -1$ имеем

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

[1]Вслед за Вейерштрассом далее будем обозначать все ряды по натуральным степеням t готической буквой $\mathfrak{P}$, добавляя к ней при необходимости нижние индексы.

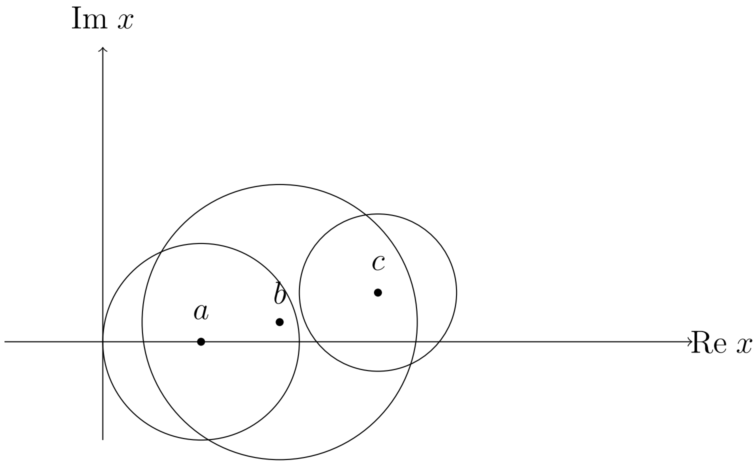

Рис. 2.1: К определению аналитической функции

В свое время было потрачено много сил на объяснение этой формулы, однако, вероятно, следует просто считать ее неверной. И тем не менее, ряд несет в себе информацию о поведении функции вне круга сходимости. Чтобы вычислить значение $\frac{1}{1-x}$, скажем, в точке $x = -1$, пользуясь только рядом $f(x) = \sum x^n$, возьмем в его круге сходимости точку $x = -1/2$ и переразложим его в ряд по степеням $x + \frac{1}{2}$ по формуле Тейлора:

$$\sum x^n = a_0 + a_1(x + \tfrac{1}{2}) + \ldots;$$

здесь

$$a_0 = f(-1/2) = \sum \frac{(-1)^n}{2^n}, \quad a_1 = f'(1/2) = \sum \frac{(-1)^n n}{2^n}, \ldots$$

— сходящиеся числовые ряды. Ряд $\sum x^n = a_0 + a_1(x + \frac{1}{2}) + \ldots$ сходится в круге, на границе которого лежит точка $x = 1$ (что, конечно, проще всего установить не из вида ряда, а из того, что он является рядом Тейлора для $\frac{1}{1-x}$), поэтому он сходится в точке $x = -1$.

Пусть теперь $\mathfrak{P}(x-a)$ – произвольный ряд по степеням $x-a$ с ненулевым кругом сходимости (см. рис. 2.2).[2] Ряд Тейлора для этого ряда с центром

[2]Под кругом сходимости здесь и далее имеется ввиду круг без границы. Часто удобно говорить ряд сходится в окрестности такой-то точки вместо такая то точка принадлежит кругу сходимости. Указание на окрестность необходимо для того, чтобы исключить случай, когда ряд сходится в некоторой точке на границе круга сходимости.

в точке b, лежащей в его круге сходимости, то есть ряд

$$\mathfrak{P}(x-b;a)=\mathfrak{P}(b-a)+\mathfrak{P}'(b-a).(x-b)+\frac{1}{2!}\mathfrak{P}''(b-a).(x-b)^2+\dots,$$

будем называть переразложением исходного ряда $\mathfrak{P}(x-a)$ в ряд по степеням $x-b$. Поскольку точке b лежит в круге сходимости ряда, выражения $\mathfrak{P}(b-a)$, $\mathfrak{P}'(b-a),\dots$ являются сходящимся числовыми рядами, и поэтому операция законна. Переразложение переразложения в ряд по степеням $x-c$ обозначим как $\mathfrak{P}(x-c;a,b)$ и будем называть аналитическим продолжением ряда $\mathfrak{P}(x-a)$. То же название удержим и за рядом $\mathfrak{P}(x-a_n;a,a_1,\dots a_{n-1})$, получившимся в результате конечного числа переразложений. Совокупность всех аналитических продолжений ряда $\mathfrak{P}(x-a)$ называют (полной) аналитической функцией, порожденной рядом $\mathfrak{P}(x-a)$. Ряды, составляющие аналитическую функцию, называют ее элементами. Если $\mathfrak{P}(x-b)$ является переразложением $\mathfrak{P}(x-a)$, то и $\mathfrak{P}(x-a)$ является переразложением $\mathfrak{P}(x-b)$. Поэтому любой элемент аналитической функции можно принять за начальный, продолжениями которого являются все прочие ее элементы.

Такое обобщение понятия функции было предложено в приложении к дипломной работе Вейерштрасса (1840 г.)[3], но, к сожалению, эта работа не была опубликована. В этом приложении Вейерштрасс сначала доказал теорему Коши (за два года до Коши), а затем, задавшись целью вычислить решение вне круга сходимости, и получил описанную конструкцию, не без удивления отметив ее независимость от теории дифференциальных уравнений. Сам Вейерштрасс так и не опубликовал своей теории аналитических функций, в конце XIX века имели хождение переписанные лекции 1870-х годов[4]; несколько формализованным изложением вейрештрассовской теории можно считать лекции А. Гурвица[5].

[3] Weierstrass K. Math. Werke. T. 1, Abh. 4.

[4] В сети доступны рукописи МГУ (File:Einleitung in die Theorien der Analytischen Funktionen (Wieirstrass) 1.pdf на Викискладе) и страсбургского ун-тов.

[5] А. Гурвиц, Р. Курант. Теория функций. М.: Наука, 1968.

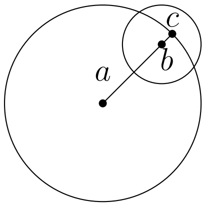

Рис. 2.2: К двум определениям особой точки

Связь понятия аналитической функции с тем, что было изложено в курсе ТФКП, легко усмотреть из след. теоремы:

Теорема 2.1. Пусть в области G задана голоморфная функция f, тогда аналитическое продолжение любого ее рада Тейлора, которое получается путем нескольких переразложений, центры которых лежат в области G, само является рядом Тейлора для функции f.

В самом деле, пусть $\mathfrak{P}(x-a)$ – ряд Тейлора для функции f, тогда его переразложение с центром в точке a_1, лежащей в области G, является рядом Тейлора для $\mathfrak{P}(x-a) = f(x)$. Применяя далее те же размышления к переразложению и организую индукцию, получим требуемое утверждение.

Напр., продолжения ряда $\sum x^n$ будут в то же время рядами Тейлора для функции $\frac{1}{1-x}$, то есть полная аналитическая функция, порожденная рядом $\sum x^n$, — это совокупность всех рядов Тейлора для функции $\frac{1}{1-x}$.

2.2. Особые точки

Точка $x = c$, лежащая на границе круга сходимости ряда $\mathfrak{P}(x-a)$, через которую этот ряд нельзя продолжить, называют *особой точкой* этого ряда и функции, им порожденной. Иными словами, нельзя указать переразложения, сходящегося в окрестности особой точки. Часто удобно пользоваться другим описанием особой точки: точка $x = c$ является особой тогда и только тогда, когда не существует ряда $\mathfrak{P}_1(x-c)$, равного исходному в их общей области сходимости.

В самом деле, если такой ряд существует, то переразложение исходного ряда с центром в точке $x = b$, взятой на отрезке ac достаточно близко к концу $x = c$, сходится в окрестности точки $x = c$ и поэтому это точка не может быть особой. И наоборот, если лежащая на границе круга сходимости точка $x = c$ не является особой, то можно указать переразложение, сходящиеся в окрестности точки $x = c$, которое, следовательно можно разложить в ряд $\mathfrak{P}_1(x - c)$. Пересечение малой окрестности точки $x = c$ и круга сходимости исходного ряда, принадлежит кругам сходимости всех трех рядов и, следовательно, в ней первый равен второму, а второй — третьему, то есть равенство $\mathfrak{P}_1(x - c) = \mathfrak{P}(x - a)$ верно на этом множестве, а следовательно, и в силу теоремы о нулях голоморфной функции всюду в общей области сходимости.

Из второго описания особых точек сразу видно, что множество особых точек замкнуто. К тому же оно и не пусто:

Теорема 2.2. На границе круга сходимости любого степенного ряда имеется хотя бы одна особая точка.

Доказательство дословно повторяет доказательство аналогичной теоремы в ТФКП. На самом деле, впервые эта теорема была доказана в лекциях Вейерштрасса именно в указанном смысле, а его главный момент — существование нижний грани радиусов сходимости — стал поводом к рассмотрению того, что в анализе теперь называют 1-ой и 2-ой теоремами Вейерштрасса.

Особые точки, изучаемые в ТФКП, можно описать следующим образом. Говорят, что ряд $\mathfrak{P}(x - a)$ имеет *невинтовую особую точку* $x = b$ на границе круга сходимости, если существует такой ряд Лорана $\mathfrak{L}(x - b)$, сходящийся в проколотой окрестности точки $x = b$, что в общей области сходимости верно $\mathfrak{P}(x - a) = \mathfrak{L}(x - b)$.[6] Если ряд Лорана имеет конеч-

[6]В аналитической теории дифференциальных уравнений, напр., у В.В. Голубева такие точки называются некритическими.

ное число отрицательных степеней, особую точку называют *полюсом.* В принципе при построении теории аналитических функций можно было бы пользоваться рядами Лорана вместо рядов по натуральным степеням и при этом теория притерпела бы минимальные изменения.

Процесс аналитического продолжения не всегда выводит за предела круга сходимости исходного ряда. Рассмотрим наиболее простой пример, принадлежащей Адамару (1892 г.)[7]:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}.$$

Этот ряд мажорируется рядом геометрической прогрессии и расходится при $|x| > 1$ по признаку Эйлера, поэтому его круг сходимости — это в точности $|x| < 1$. В силу теоремы 2.2 на его границе имеется хотя бы одна особая точка, обозначим ее как $x = b$. Положение особых точек ряда не изменится, если откинуть N первых членов. Но ряд

$$R_N(x) = x^{N!} + x^{N!(N+1)} + x^{N!(N+1)(N+2)} + \dots$$

обладает некоторой симметрией:

$$R_N(\varepsilon x) = R_N(x), \quad (\varepsilon^N = 1).$$

Поэтому вмести с особой точкой $x = b$ особой будет и точка $x = \varepsilon b$, где ε любой корень из единицы любой степени. Множество всех таких точек плотно на единичной окружности, поэтому, в силу замкнутости множества особых точек, все точки единичной окружности являются особыми.

Этот пример дает почувствовать как сильно может отличаться естественная область определения аналитической функции от комплексной плоскости с изолированными особыми точками.

[7]См. Голубев В.В. Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции. М.: ГИФМЛ, 1961, с. 85 и сл.

2.3. Многозначность аналитических функций

В пересечении кругов сходимости ряд и его переразложение сходятся и равны друг другу, поскольку один является рядом Тейлора для другого, напр.,

$$\mathfrak{P}(x-a) = \mathfrak{P}(x-a_1, a) \quad x \in K_0 \cap K_1,$$

$$\mathfrak{P}(x-a_1, a) = \mathfrak{P}(x-a_2, a, a_1) \quad x \in K_1 \cap K_2, \dots$$

Однако отсюда не следует, что

$$\mathfrak{P}(x-a) = \mathfrak{P}(x-a_n, a, \dots) \quad x \in K_0 \cap K_n$$

В частности, нельзя исключить того, что два ряда по степеням $(x-a)$ являются аналитическими продолжении друг друга. Именно поэтому полные аналитические функции являются адекватной конструкцией для описания многозначных аналитических выражений, содержащих корни и логарифмы.

Простейший пример этого рода доставляет ряд Тейлора для функции $\sqrt{x}$ с центром в точке $x = 1$. Итак, будем продолжать всевозможными способами ряд

$$\mathfrak{P}(x-1) = 1 - \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \dots \quad (|x-1| < 1)$$

Проведем окружность единичного радиуса с центром в нуле и станем продолжать исходный ряд таким образом, чтобы центры переразложений лежали на этой окружности и обходили против часовой стрелки начало координат. В силу теоремы 2.1 все эти ряды будут рядами Тейлора для функции $\sqrt{x}$, голоморфной во все комплексной плоскости, кроме положительной оси. В результате такого продолжения, исходный ряд $\mathfrak{P}(x-1)$, совпадающий с $\sqrt{x}$ для точек с $\operatorname{Im} x \geq 0$, перейдет в ряд $-\mathfrak{P}(x-1)$, совпадающий с $\sqrt{x}$ для точек с $\operatorname{Im} x < 0$.

2.4. Выделение ветвей

Последовательность переразложений

$$\mathfrak{P}(x-a),\, \mathfrak{P}(x-a_1,a), \dots \mathfrak{P}(x-a_n,a,\dots a_{n-1}),$$

часто называют ветвью аналитической функции, а ломанную $aa_1a_2\dots a_n$ — путем, по которому продолжается исходный ряд. В окрестности ломанной эти ряды задают некоторую голоморфную функцию f; в силу теоремы 2.1 продолжение $\mathfrak{P}(x-a)$ по любому пути $ab_1\dots b_{n-1}a_n$, лежащему в этой области, приведет к все тому же ряду $\mathfrak{P}(x-a_n,a,\dots a_{n-1})$. Иными словами, путь всегда можно слегка деформировать. Из этого наблюдения можно извлечь несколько важных следствий.

Начнем с того, что вершины ломанной всегда можно брать в точках с рациональными координатами. В частности, рассмотрим всевозможные продолжения ряда $\mathfrak{P}(x-a)$ с центром в той же точке $x-a$. Эти новые ряды получатся при продолжении исходного ряда вдоль всевозможных замкнутых ломанных с конечным числом звеньев, причем имеется лишь счетное множество ломанных, продолжение по которым может привести к различным продолжениям исходного ряда:

Теорема 2.3 (Вольтерра-Пуанкаре). Множество всех элементов аналитической функции, имеющих один и тот же центр, не более чем счетно.

Эту теорему часто формулируют в более парардоксальной форме: множество значений многозначной аналитической функции не более чем счетно. Понятно, что под значением аналитической функции понимаются значения в точке $x=a$ всех ее элементов, имеющих точку $x=a$ своим центром (или, что то же, сходящихся в окрестности точки $x=a$).

Убедится в том, что множество значений может быть столь велико совсем не трудно: значения функции

$$f(x) = \ln x + \pi \ln(x-1) + i\ln(x-2) + \pi i \ln(x-3)$$

меняются при обходе вокруг особых точек на

$$n + \pi m + i(n' + \pi m') \quad (n, m, n', m' \in \mathbb{Z})$$

и, коль скоро число π – иррациональное, это множество не только счетное, но и более того всюду плотное на комплексной плоскости.

Этот пример показывает сколь бесполезно может быть понятие значения многозначной функции в точке, поэтому обычно стараются некоторым образом выделить однозначную ветвь аналитической функции. Простейший способ состоит в указании ломанной, вершины которой — центры переразложений, однако чаще вместо них используют произвольные жордановы кривые (непрерывные кривые с конечным числом самопересечений).

Продолжение вдоль такой кривой $a..b$ строится следующим образом: ряд $\mathfrak{P}(x-a)$ переразлагают в ряд $\mathfrak{P}(x-a_1, a)$ с центром a_1, лежащим на кривой таким образом, чтобы вся ее дуга $a..a_1$ лежала в круге сходимости исходного ряда, потом переразлагают $\mathfrak{P}(x - a_1, a)$ в ряд $\mathfrak{P}(x - a_2, a, a_1)$ с центром a_2, лежащим на кривой таким образом, чтобы вся ее дуга $a_1..a_2$ лежала в круге сходимости второго ряда и т.д. Действуя таким образом, можно или добраться до конца $x = b$, или придти к особой точке $x = c$, за которую продолжить процесс не удастся. Таким образом, в окрестности жордановой кривой (всей или ее куска от a до особой точки) будет задана некоторая голоморфная функция.

В силу теоремы 2.1 любое другое продолжение по пути, лежащем в этой области, в т.ч. вдоль этой же кривой, но при другом выборе центров переразложения, будет рядом Тейлора для f. Невозможно допустить и то, что при каком то выборе этих центров удастся миновать особую точку, поскольку тогда найдется ряд по натуральным степеням $x - c$, равный f в общей области определения, а значит, для последнего ряда $\mathfrak{P}(a-a_n, a, \dots)$ точка $x = c$ не будет особой. Это означает, что задание ряда $\mathfrak{P}(x - a)$ и жордановой кривой, выходящей из его центра, однозначно определяет функцию в окрестности этой кривой (всей или ее дуги до особой точки). Это позволяет вполне определенно говорить о значениях аналитической кривой вдоль заданной кривой, что весьма полезно для перенесения теорем из интегрального исчисления.

Если в процессе продолжения вдоль кривой мы пришли к полюсу или, более общо, к невинтовой точке $x = c$, то в ее проколотой окрестности сходится ряд Лорана $\mathfrak{L}(x-c)$, равный определенной выше на $a..c$ функции f. Разложим этот ряд в ряд Телойра с центром в некоторой точке d, лежащей на кривой за c, и продолжим далее этот ряд вдоль кривой дальше, скажем до точки $x = e$; тем самым мы однозначно продолжим исходный ряд через особую точку. При этом в окрестности кривой $a..e$ можно определить функцию f, голоморфную всюду, кроме $x = c$, в которой она имеет полюс или существенно особую точку. Слегка деформируя путь, видим, что исходный ряд $\mathfrak{P}(x - a)$ можно продолжить по пути, обходящим особую точку слева или справа, и придти в конце к тому же ряду, что и по исходной кривой.

Нетрудно привести пример ситуации, когда однозначное продолжение через особую точку невозможно: если продолжить ряд Тейлора для $\sqrt{x}$ через нуль, то описанный способ продолжения не годится. Если деформировать немного путь, то результат продолжения будет зависеть от того, с какой стороны обходится нуль. Такие точки называют винтовыми или точками ветвления.

2.5. Теорема о монодромии

Пусть ряд $\mathfrak{P}(x - a)$ можно продолжать вдоль любой кривой, лежащей в области G, не встречая особых точек. Являются ли все эти продолжения рядами Тейлора для некоторой функции, голморфной в G? Иными словами, задает ли этот ряд в G однозначную функцию?

Если область G — круг, то утверждение очевидно: в силу теоремы 2.2 ряд, центр которого совпадает с центром круга, сходится во всех точках рассматриваемой области. Поэтому все ряды будут переразложениями этого ряда, и положительный ответ на вопрос очевиден.

По теореме Римана любую односвязную область можно конформно отобразить на круг, поэтому положительный ответ должен иметь место и в этом случае. Впрочем можно предложить независящее от теоремы и Римана доказательство этого утверждения.

Теорема 2.4 (о монодромии). Если ряд $\mathfrak{P}(x-a)$ можно продолжать вдоль любой замкнутой жордановой кривой, лежащей в односвязной области G, не встречая особых точек, то в результате любого такого продолжения по возвращении в точку $x = a$ получится опять исходный ряд $\mathfrak{P}(x - a)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что продолжение ряда $\mathfrak{P}(x - a)$ вдоль любой замкнутой ломаной приводит опять к $\mathfrak{P}(x - a)$, а это удобно доказывать индукцией по числу звеньев ломаной.

(i) Допустим, что продолжая $\mathfrak{P}(x-a)$ вдоль ломаной $abca$ мы получили другой ряд $\mathfrak{P}_1(x - a)$. Возьмем на отрезке ac точку d и рассмотрим продолжения ряда $\mathfrak{P}(x - a)$ вдоль $abda$. Множество таких точек d, что при продолжении ряда $\mathfrak{P}(x-a)$ вдоль $abda$ получается этот же ряд, обозначим как M_1, а дополнительное к нему множество таких точек d, что продолжении ряда $\mathfrak{P}(x - a)$ вдоль $abda$ получается другой ряд, обозначим как M_2. Оба множества не пусты, поскольку к первому принадлежит $d = a$, а ко второму $d = c$. Оба множества открыты, поскольку при достаточно малом изменении пути $abda$, в том числе при малом смещении точки d, результат продолжения не меняется. Но сегмент не может быть объединением двух непустых, пересекающихся открытых множеств, следовательно, предположение ошибочно.

(ii) Пусть утверждение теоремы верно для всех ломанных с n звеньями, докажем его для ломанной с $n + 1$ звеном. Из геометрических соображений ясно, что всегда можно найти две такие вершины a_m, a_{m+2}, что треугольник $a_m a_{m+1} a_{m+2}$ лежит целиком в G. В силу (i) продолжение по $a_m a_{m+1} a_{m+2}$ и по прямой $a_m a_{m+2}$ дает один и тот же результат. Поэтому участок ломанной $a_m a_{m+1} a_{m+2}$ можно заменить на одно звено, не меняя результата продолжения. У новой ломанной всего n звеньев, поэтому этот результат должен совпадать с исходным рядом. $\square$

Как следствие теоремы о монодромии имеем:

Теорема 2.5 (следствие теоремы о монодромии). Если ряд $\mathfrak{P}(x-a)$ можно продолжать вдоль любой кривой, лежащей в односвязной области G, не встречая особых точек, то существует функция $f(x)$, голоморфная в области G, для которой ряд $\mathfrak{P}(x-a)$ и все его продолжения вдоль указанных кривых являются рядами Тейлора.

Доказательство. Если два продолжения $\mathfrak{P}_1(x-b)$ и $\mathfrak{P}_2(x-c)$ исходного ряда имеют общую область сходимости, то там они совпадают. Допустим противное, тогда переразложение этих рядов с центром в точке d этой общей области даст два разных ряда $\mathfrak{P}_1(x-d)$ и $\mathfrak{P}_2(x-d)$. Продолжая $\mathfrak{P}_1(x-d)$ по пути второго продолжения в обратном порядке, мы не можем придти к $\mathfrak{P}_2(x-d)$: в противном случае продолжение по второму пути в прямом порядке двумя способами приводило бы к двум различным ветвям, что невозможно.

Доказанное позволяет определить однозначно функцию f равенством $f(x) = \mathfrak{P}(x-b, a, \dots)$. $\square$

Остается заметить, что ряд Тейлора для функции $\sqrt{x}$ можно продолжать, не встречая особые точки, в любом кольце с центром в нуле, однако продолжая ряд вдоль контура, обходящего нуль, мы получим ряд, отличный от исходного. То есть теорема о монодромии не верна для двусвязных областей.

Зато теорему о монодромии можно перенести на случай, когда в G нет винтовых точек. Нужно лишь заметить, что через невинтовую особую точку ряд всегда можно однозначно продолжить, поэтому заменяя $\mathfrak{P}$ на $\mathfrak{L}$. В дальнейшем нам понадобится лишь такая версия теоремы:

Теорема 2.6 (теорема о монодромии). Если ряд $\mathfrak{P}(x-a)$ можно продолжать вдоль любой кривой, лежащей в односвязной области G, встречая лишь полюса, то существует функция $f(x)$, мероморфная в области G, для которой ряд $\mathfrak{P}(x-a)$ и все его продолжения вдоль указанных кривых являются рядами Тейлора.

2.6. Принцип продолжения равенств

Пусть $F(x, y_1, \dots, y_r)$ — произвольный полином и пусть подстановка рядов

$$y_1 = \mathfrak{P}_1(x-a), \dots y_r = \mathfrak{P}_r(x-a)$$

обращает его в нуль тождественно, то есть эти ряды доставляют решение алгебраического уравнения

$$F(x, y_1, \dots y_r) = 0.$$

Если степенные ряды $\mathfrak{P}_1(x-b, a), \dots \mathfrak{P}_r(x-b, a)$ переразложения исходных рядов с центром в одной и той же точке, то $F(x, \mathfrak{P}_1(x-b, a), \dots)$ равен нулю в окрестности точки $x = b$, а следовательно и всюду. Значит, любое переразложение системы рядов, удовлетворяющих алгебраическому уравнению, тоже удовлетворяет этому уравнеию. Отсюда видно след.:

Теорема 2.7 (Принцип продолжения равенств). Если система

$$y_1 = \mathfrak{P}_1(x-a), \dots y_r = \mathfrak{P}_r(x-a)$$

обращает его в нуль тождественно полином $F(x, y_1, \dots y_r)$, то его обращает в нуль и любые продолжения рядов этой системы, полученные в результате продолжения вдоль одной и той же кривой.

Сделанная в конце теоремы оговорка существенна. Напр., пусть $\mathfrak{P}(x-1)$ ряд Телора для $\sqrt{x}$, тогда система $y_1\mathfrak{P}(x-1)$, $y_2 = \mathfrak{P}(x-1)$ удовлетворяет уравнению $y_1 = y_2$, однако если взять вместо первого ряда его продолжение $y_1 = -\mathfrak{P}(x-1)$ вдоль пути, обходящего нуль, а вместо второго — его продолжение $y_2 = \mathfrak{P}(x-a)$ по пути, не обходящем нуль, равенство нарушится.

Принцип продолжения равенств очень важен: теорема Коши гарантирует существование решения $y = \mathfrak{P}(x-a)$ для уравнения вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

а принцип продолжения равенств гарантирует, что любое его продолжение тоже удовлетворяет этому уравнению. Бывает забавно наблюдать за авторами, желающими решать дифференциальные уравнения явно, но в поле вещественных чисел. У них вечно получаются разные случаи, которые при ближайшем рассмотрении оказываются разными вещественными формулами для одной и той же аналитической функции. Рассмотрев один случай, незачем рассматривать остальные.

Глава 3

Алгебраические уравнения

3.1. Введение

Прежде чем обратиться к уравнения дифференциальным, рассмотрим кратко аналитические свойства решений алгебраических уравнений.

Аналитическую функцию, элемент $y = \mathfrak{P}(x-a)$ которой удовлетворяет некоторому алгебраическому уравнению вида $F(x,y) = 0$, называют *алгебраической*. Из принципа продолжения равенств следует, что, если один элемент аналитической функции тождественно удовлетворяет алгебраическому уравнению, то ему удовлетворяют и все элементы этой функции. Обычно это выражают короче: алгебраические функции доставляют решение некоторого уравнения.

Напр., в классе полных аналитических функций уравнение $y^2 = x$ имеет одно решение – двузначную функцию $y = \sqrt{x}$, уравнение $y^2 = x^2$ имеет два решения – две однозначные функции $y = x$ и $y = -x$.

3.2. Существование решения

Пусть $F(x,y)$ – полином от двух переменных и требуется найти функцию $y = \varphi(x)$, удовлетворяющую алгебраическому уравнению

$$F(x,y) = 0$$

тождественно при всех допустимых x. Геометрически удобно интерпретировать уравнение $F(x, y) = 0$ как уравнение кривой на плоскости, а элементы $y = \mathfrak{P}(x - a)$ функции φ – как аналитическое представление для малых дуг этой кривой.

В дальнейшем будем считать, что кривые

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \text{и} \quad F(x, y) = 0$$

имеют конечное число точек пересечения. В противном случае, чисто алгебраическим путем можно разложить F на множители и использовать один из них вместо F.

Зададимся теперь таким числом a, чтобы прямая $x = a$ не проходила через точки пересечения кривых

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \text{и} \quad F(x, y) = 0.$$

и обозначим степень полинома F по y как n. В силу основной теоремы алгебры уравнение $F(a, y) = 0$ имеет n различных комплексных решений $y = b_1, \ldots y = b_n$. В силу теоремы 1 Коши начальная задача

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g(x, y)}{h(x, y)}, \quad y|_{x=a} = b_i, \quad (g = \frac{\partial f}{\partial x}, \, g = \frac{\partial f}{\partial y})$$

имеет решение вида

$$y = \mathfrak{P}_i(x - a) = b_i + c_i(x - a) + \ldots.$$

Каждый из этих рядов задает аналитическую функцию, все элементы которой удовлетворяют указанному уравнению. При этом один их этих рядов может быть аналитическим продолжением другого, а может и не быть. Поэтому имеется, вообще говоря, несколько различных аналитических функций, удовлетворяющих заданному уравнению.

Рассмотрим любую из них. Продолжение исходного ряда, имеющее своим центром опять точку $x = a$, совпадает с одним из n выписанных рядов, поэтому всякая алгебраическая функция имеет конечное число значений.

3.3. Группа Галуа

Для описания многозначности функций, имеющих конечное число значений, удобно использовать группы перестановок.

Именно, пусть все элементы функции φ, имеющие своим центром точку $x = a$, это

$$\mathfrak{P}_1(x-a), \dots \mathfrak{P}_m(x-a),$$

продолжая эти ряды вдоль замкнутой кривой L получим опять тот же набор, но в другом порядке

$$\mathfrak{P}_{i_1}(x-a), \dots \mathfrak{P}_{i_m}(x-a).$$

Это позволяет связать с каждым замкнутым контуром L, проходящим через точку $x = a$, перестановку $T(L) = (i_1, \dots i_n)$. Перестановки, получаемые при продолжении вдоль всевозможных кривых, образуют группу, более того, подгруппу группы $\mathfrak{G}(m)$ перестановок m элементов. Эту группу называют группой Галуа функции φ, для которой в дальнейшем будем использовать обозначение $\mathfrak{G}(\varphi)$.

Напр., группа Галуа функции $\sqrt{x}$ – это $\mathfrak{G}(2)$, состоящая из двух элементов: единицы и перестановки $(2, 1)$. Группа Галуа радикала $\sqrt[m]{x}$ – это циклическая подгруппа $\mathfrak{C}(m)$ группы $\mathfrak{G}(m)$. Обе эти группы абелевы.

Для описания группы Галуа функции $\varphi = \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$ следует заметить, что продолжая шесть элементов функции φ и два элемента функции $\sqrt{x}$ по двум различным путям, можно получить две различные перестановки шести элементов и одну и ту же перестановку двух элементов, но не наоборот. Это позволяет задать гомоморфизм

$$f: \quad \mathfrak{G}(\varphi) \mapsto \mathfrak{G}(\sqrt{x}) = \mathfrak{C}(2),$$

ядром $\mathfrak{H}$ которого будут перестановки шести элементов, отвечающие тем кривым, при продолжении вдоль которых элементы функции $\sqrt{x}$ не переставляются. В ходе продолжения вдоль такого пути куб элемента $\mathfrak{P}(x-a)$

функции φ не меняется, а сам элемент может приобрести только множитель $\sqrt[3]{1}$. При последовательном продолжении вдоль двух таких путей L_1 и L_2 результат не зависит от того, какой из путей проходится первым, а какой вторым, поэтому $T(L_1)T(L_2) = T(L_2)T(L_2)$, то есть группа $\mathfrak{H}$ является абелевой. Таким образом, в группе Галуа для φ имеется башня

$$E \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}(\varphi),$$

оба фактора которой

$$\mathfrak{H}, \quad \mathfrak{G}(\varphi)/\mathfrak{H} = \mathfrak{C}(2)$$

являются абелевыми группами.

В алгебре последовательность подгрупп

$$E = \mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{G}_n = \mathfrak{G}$$

называют башней. Если $\mathfrak{G}_i$ является нормальной подгруппой группы $\mathfrak{G}_{i+1}$ и фактор $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_i$ является абелевой (циклической группой), то башню называют абелевой (циклической), а завершающую последовательность группу $\mathfrak{G}$ – разрешимой. При этом всякую абелеву башню можно уплотнить до циклической башни и всякая циклическая башня является абелевой.

На этом языке теория разрешимости алгебраических уравнений сводится к след. утверждениям.

1.) Группа Галуа $\mathfrak{G}$ любой функции, представимой при помощи радикалов, является разрешимой. Доказательство этого факта требует повторения размышлений, проделанных выше для $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$.

2.) Группа $G(n)$ всех перестановок n элементов является разрешимой лишь при $n < 5$. Этот факт имеет весьма простое геометрическое доказательство, основанное на возможности вписания в икосаэдр пяти кубов.

3.) В общем случае группа Галуа m-значной алгебраической функции совпадает со всей группой $G(m)$ всех перестановок n элементов. Этот факт прямо следует из того, что в общем случае числа $b_1, \ldots b_n$ алгебраически равноправны.

Отсюда со всей очевидностью следует, что алгебраические функции, удовлетворяющие уравнению 5-ой степени, нельзя выразить в радикалах. Все попытки найти решение уравнения 5-ой степени обречены на неудачу до тех пор, пока не будет придуман удовлетворительный способ представления функций, имеющих в качестве группы Галуа $G(5)$.[1]

3.4. Особые точки алгебраической функции

Пусть $\mathfrak{P}(x-a)$ – элемент алгебраической функции $y=\varphi(x)$, удовлетворяющей уравнению $F(x,y)=0$ и пусть $x=c$ – особая точка, лежащая на границе круга сходимости K. Укажем способ вычисления этих точек.

Если верно

$$\lim_{x\to c,\, x\in K}\mathfrak{P}(x-a)=\infty,$$

то полином

$$F(x,y)=F_0(x)y^n+F_1(x)y^{n-1}+\cdots+F_n(x)$$

обращается в нуль в точках $(c_n,\mathfrak{P}(c_n-a))\to(c,\infty)$, следовательно, полином

$$G(x,z)=z^nF\left(c,\tfrac{1}{z}\right)=F_0(x)+F_1(x)z^1+\cdots+F_n(x)z^n$$

в точках $(c_n,\frac{1}{\mathfrak{P}(c_n-a)})\to(c,0)$, поэтому $F_0(c)=0$. Значит, особые точки этого типа – суть нули коэффициента при старшей степени y в полиноме F.

Допустим теперь, что $F_0(c)\neq 0$, но

$$\lim_{x\to c,\, x\in K}\mathfrak{P}(x-a)\neq\infty,$$

то можно выделить последовательность $\{c_n\}$, сходящуюся к c, так, чтобы последовательность $b_n=\mathfrak{P}(c_n-a)$ имела конечны предел b. Поскольку

[1] Об аналитическом подходе к теории Галуа и разрешимости уравнений в конечном виде см.: Хованский А.Г. Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде. М.: МЦНМО, 2008. ISBN 978-5-94057-374-6

точки (c_n, b_n) являются нулями полинома $F(x, y)$, то и точка (c, b) является нулем этого полинома. Коль скоро множество нулей полинома конечно, то множество предельных точек значений ряда $\mathfrak{P}(x-a)$ при $x \to c$ не может быть бесконечным, а следовательно, состоит из одной точки, то есть предел

$$\lim_{x \to c,\, x \in K} \mathfrak{P}(x-a)$$

существует и равен одному из корней $F(c, y) = 0$. Сказанное является прямым следствием одной теоремы, касающейся вообще степенных рядов.

Теорема 3.1 (Лемма о предельных точках). Пусть $x = c$ — особая точка, лежащая на границе круга сходимости ряда $\mathfrak{P}(x-a)$. Если множество предельных точек значений этого ряда при x, стремящемся к c вдоль кривой $\mathfrak{C}$, лежащей внутри круга сходимости, содержит хотя бы две точки, то это множество бесконечно. Это верно даже тогда, когда одна из точек бесконечно удалена.

Доказательство. Пусть при $x_n \to c$ существует предел $\mathfrak{P}(x_n - a)$, равный b, а при $x'_n \to c$ — предел, равный b'.

Допустим, что $|b| \neq |b'| \neq \infty$. Выделим из них две подпоследовательности так, чтобы точка x_{n_k} предшествовала точке x'_{n_k}, а точка $x_{n_{k+1}}$ следовала за точкой x'_{n_k}. Зададимся теперь произвольным вещественным ϑ, меняющимся между 0 и 1. В силу непрерывности $|\mathfrak{P}(x-a)|$ и на дуге $x_{n_k}..x'_{n_k}$, найдется такая точка x''_k, что

$$|\mathfrak{P}(x''_k - a)| = |\mathfrak{P}(x_{n_k} - a)|\vartheta + |\mathfrak{P}(x'_{n_k} - a)|(1-\vartheta);$$

при $x''_k \to c$ имеем $|\mathfrak{P}(x''_k - a)| \to |b|\vartheta + |b'|(1-\vartheta)$. Следовательно, из последовательности x''_k можно извлечь подпоследовательность x''_{k_m}, для которой существует предел $\mathfrak{P}(x''_{k_m} - a)$ — конечный и отличный от b и b'. Варьируя ϑ получим бесконечно много различных предельных точек.

В случае $|b| = |b'|$ достаточно вместо модуля рассмотреть аргумент как функцию x, а в случае $b = \infty$ — перейти к рассмотрению $\frac{1}{\mathfrak{P}(x-a)+\mathrm{Const}}$. $\square$

Если уравнения

$$F(x,y)=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial y}=0$$

не совместимы при $x=c$, то в силу основной теоремы алгебры уравнение $F(c,y)=0$ имеет n различных решений $y=b_1,\dots b_n$. Пусть для определенности $b_1=b$. В силу теоремы Коши каждому из них соответствует решение уравнения $F(x,y)=0$ вида

$$y=\mathfrak{P}_i(x-c)=b_i+b_i'(x-c)+\dots;$$

при малых $|x-c|$ эти формулы доставляют решения, близкие к b_i, и поэтому не совпадающие друг с другом. Поэтому полином можно представить в виде

$$F(x,y)=F_0(x)\prod_{i=1}^{n}(y-\mathfrak{P}_i(x-c)).$$

В малой окрестности точки (c,b) множители $F_0(x), y-\mathfrak{P}_2(x-c)=y-b_2-b_2'(x-c)\dots,\dots$ отличны от нуля, и поэтому уравнение $F(x,y)=0$ эквивалентно уравнению

$$y=\mathfrak{P}_1(x-c).$$

Поскольку ряд $y=\mathfrak{P}(x-a)$ на дуге $\mathfrak{C}$, лежащей в окрестности $x=c$, принимает значения, лежащие в малой окрестности точки $y=b$ и удовлетворяет уравнению $F(x,y)=0$, то равенство

$$\mathfrak{P}(x-a)=\mathfrak{P}_1(x-c)$$

верно вдоль всей этой дуги, а следовательно, и всюду в общей области сходимости рядов. Это означает, что точка $x=c$ не является особой точкой ряда $\mathfrak{P}(x-a)$, что невозможно. Итого:

Теорема 3.2. Алгебраическая функция, удовлетворяющая уравнению $F(x,y)=0$, может иметь особые точки лишь при тех значениях x, которые являются нулями результанта системы

$$\begin{cases} F(x,y)=0, \quad \dfrac{\partial F}{\partial y}=0 \end{cases}$$

или нулями коэффициента при старшей степени y в полиноме F .

Геометрически первые можно рассматривать как абсциссы точек пересечения двух кривых

$$F(x,y)=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial y}=0,$$

а вторые – как абсциссы бесконечно удаленных точек кривой $F(x,y)=0$.

Поведение многозначной функции, имеющей конечное число значений, в окрестности изолированной особой точки можно описать след. образом. Проведем окружность малого радиуса r с центром в особой точке $x=c$, переразложим исходный ряд $\mathfrak{P}(x-a)$ в некоторую точку $x=b$ этой окружности и станем продолжать ряд $\mathfrak{P}_1(x-b)$ вдоль этой окружности. За один обход окружности мы придем к, вообще говоря, другому ряду $\mathfrak{P}_2(x-b)$, продолжая этот ряд – к третьему и т.д. Поскольку количество различных элементов с центром в точке $x=a$ конечно, за m оборотов мы придем опять к $\mathfrak{P}_1(x-b)$.

Пусть $b=c+re^{i\varphi_0}$. Когда переменная φ меняется от некоторого φ_0 до $\varphi_0+2\pi p$, переменная

$$x=c+r^{i\varphi}$$

пробегает окружность $|x-c|=r$ p раз, а

$$t=\sqrt[p]{x-c}=\sqrt[p]{r}e^{i\frac{\varphi}{p}}$$

пробегает окружность $|t|=\sqrt[p]{r}$ лишь один раз. При этом всегда можно взять такую монотонную последовательность φ_i, чтобы угол $\varphi_{i+1}-\varphi_i$ был меньше $\frac{1}{3}\pi$, то есть чтобы было верно

$$|x_{i+1}-x_i|\le r, \quad |t_{i+1}-t_i|\le\sqrt[p]{r}.$$

Тогда последовательность $x_0=b, x_1,\dots$ можно использовать в качестве центров продолжений ряда $\mathfrak{P}_1(x-b)$. Переразложение $\mathfrak{P}_1(c-x_i+$

$t^p, b, \ldots, x_{i-1})$ можно рассматривать как функцию переменной t, голоморфную в окрестности точки t_i, поэтому ее можно разложить в ряд $\mathfrak{P}_i(t-t_i)$ по степеням $t-t_i$. Этот ряд сходится в области $|c-x_i+t^p|<r$, то есть в круге, на границе которого лежит особая точка $t=0$. Поэтому точка $t=t_{i+1}$ лежит в круге сходимости ряда $\mathfrak{P}_i(t-t_i)$, а переразложение этого ряда по степеням $t-t_{i+1}$ совпадает с $\mathfrak{P}_{i+1}(t-t_{i+1})$ – рядом Тейлора для $\mathfrak{P}_1(c-x_{i+1}+t^p; b, \ldots, x_i) = \mathfrak{P}(c-x_i+t^p, b, \ldots, x_{i-1})$. Поскольку последовательность переразложений исходного ряда $\mathfrak{P}_1(x-b)$ приводит опять к нему же, то тоже верно и для так построенной последовательности переразложений ряда Тейлора для $\mathfrak{P}_1(c-b+t^p)$ вдоль окружности $|t|=\sqrt[p]{r}$.

Эти переразложения задают в круге $0<|t|\leq\sqrt[p]{r}$ однозначную голоморфную функцию $f(t)$, совпадающую с $\mathfrak{P}_1(c-b+t^p)$ в их общей области определения. Точка $t=0$ не может быть существенно особой, поскольку в противном случае по теореме Сохоцкого-Вейерштрасса можно было бы выделить такую последовательность t_n, сходящуюся к 0, чтобы последовательность $f(t_n)$ сходилась бы к числу, не являющемуся корнем уравнения $F(c,y)=0$. Поэтому функцию $f(t)$ можно разложить в ряд Лорана вида

$$f(t) = \frac{A_q}{t^q} + \frac{A_{q-1}}{t^{q-1}} + \ldots \mathfrak{P}(t),$$

ряды такого вида будем далее обозначать как $P(t)$.

Таким образом, в общей области сходимости верно равенство

$$\mathfrak{P}_1(c-b+t^p) = P(t),$$

или, возвращаясь к переменной x,

$$\mathfrak{P}(x-a) = P(\sqrt[r]{x-c})$$

при надлежащем выборе значения корня.

Ряд по дробным степеням $(x-c)$ называют рядом Пюизо. Особая точка $x=c$, лежащая на границе круга сходимости ряда $\mathfrak{P}(x-a)$, называется алгебраической, если существует такой сходящийся ряд Пюизо $P(\sqrt[p]{x-c})$, что равенство

$$\mathfrak{P}(x-a)=\sqrt[p]{x-c}$$

верно в общей области сходимости этих рядов. Именно таковы все особые точки алгебраической функции, однако не каждая аналитическая функция, все особые точки которой алгебраические, сама является алгебраической. Пример доставляет, напр., эллиптический интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

3.5. Подготовительная теорема Вейерштрасса

Распространение изложенной выше теории на алгебраические функции нескольких переменных не встречает трудностей, если вместо теоремы существования использовать более тонкое обобщение теоремы о неявной функции.

Теорема 3.3 (Подготовительная теорема Вейерштрасса[2]). Пусть функция

$$g(x,y)=\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(x)y^\nu$$

голоморфна в точке $(0,0)$, причем

$$g_0(0)=\cdots=g_{m-1}(0)=0,\ g_m=1.$$

Тогда существует голоморфная функция $e(x,y)$, не равная нулю при $x=0,\ y=0$, и многочлен степени m

$$\omega(x,y)=\sum_{k=0}^{m} s_k(x)y^k$$

[2] Первое доказательство этой теоремы было дано Вейерштрассом в начале 1860-х [Weierstrass K. Math. Werke. Bd. 3.], затем было предложено ряд модификаций этого доказательства, наиболее распространенное приведено у Фукса Л.Б.. Мы же приведем изящное и короткое доказательство этой теоремы, указанное Штикельбергером в 1887 году, затем надолго забытое и лишь в 1968 году возвращенное к жизни К. Зигелем [Грауэрт-Либ Аналитические локальные алгебры, с. 51-53].

с голоморфными коэффициентами, такие, что

$$g(x,y) = e(x,y)\omega(x,y).$$

Если рассматривать $g(x,y)$ как элемент кольца $K < y >$ степенных рядов от y с коэффициентами, голоморфными при $x = 0$, то можно сформулировать эту теорему так: $g(x,y)$ может быть представлен в виде произведения обратимого элемента $e(x,y)$ и полинома $\omega(x,y)$.

Доказательство. Запишем g в виде

$$g(x,y) = y^m(1 + \sum_{\nu=0}^{m-1} g_\nu(x)y^{\nu-m} + \sum_{\nu>m} g_\nu(x)y^{\nu-m}),$$

Если обозначить

$$u = \sum_{\nu=0}^{m-1} g_\nu(x)y^{\nu-m},\ v = \sum_{\nu>m} g_\nu(x)y^{\nu-m}),\ w = u + v$$

то

$$g = y^m(1 + w)$$

где w — ряд Лорана по y, причем u — его сингулярная, а v — регулярная части. Поскольку

$$g_0(0) = \cdots = g_{m-1}(0) = 0,$$

можно так подобрать константы δ и ρ, чтобы в области

$$|x| < \delta,\ \frac{\rho}{2} < |y| < \rho$$

функция

$$u = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{g_\nu(x)}{y^{m-\nu}}$$

была бы голоморфная и по абсолютному значению меньше $1/2$, а функция

$$v(x,y) = \sum_{\nu>m} g_\nu(x)y^{\nu-m})$$

была голоморфна в области

$$|x| < \delta,\ |y| < \rho$$

и тоже меньше 1/2 по абсолютному значению.

Первое сразу следует из неравенства

$$|u| < \max_{|x|<\delta,\nu} |g_\nu(x)|((2/\rho)^m + \dots + 2/\rho),$$

а второе — из того, что $v(x, y)$ — ряд по положительным степеням x, y и $v(0, 0) = 0$.

Тогда $|w| < 1$ и вполне определено выражение

$$\ln(1 + w) \equiv w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \dots$$

Его можно разложить в ряд Лорана по y в рассматриваемом кольце $\rho/2 < |y| < \rho$. Обозначим его регулярную часть как A, а сингулярную часть как B. Тогда, понимая под $\exp(z)$ ряд $\sum z^\nu/\nu!$, имеем

$$y^m \exp(\ln(1 + w)) = y^m(1 + w) = g(x, y)$$

откуда

$$g(x, y) \exp(-A) = y^m \exp(B)$$

Здесь в левой части стоит голоморфная функция в окрестности очки $x = 0,\ y = 0$, следовательно, такова и правая часть. Но поскольку

$$\exp(B) = 1 + B + \dots$$

и B содержит только отрицательные члены как сингулярная часть ряда Лорана, справа неизбежно стоит полином степени m, причем его коэффициент при y^m равен 1. Полагая

$$\omega = y^m \exp(B),\ e = \exp(A)$$

приходим к $g = e\omega$, где ω — действительно полином указанного вида, а e — голоморфная в области $|x| < \delta,\ |y| < \rho$ функция, причем $e(0, 0) = \exp(A(0, 0)) \neq 0$. $\square$

Глава 4

Нелинейные дифференциальные уравнения

4.1. Рациональные дифференциальные уравнения

Пуанкаре как-то ехидно заметил, что про решение произвольного дифференциального уравнения можно с уверенностью сказать, что оно произвольно. Поэтому для построения теории дифференциальных уравнений нужно наложить некоторые условия на сами дифференциальные уравнения и, коль скоро, мы хотим построить глобальную теорию, то эти условия не должны быть локальными как в теореме Коши, поскольку, как указывает теорема 2 Реллиха, нельзя начать с рассмотрения случая, когда условия теоремы Коши выполнены всюду.

Практически все уравнения, встречающиеся в приложениях, можно свести к системе вида

$$\{\dot{x}_1 = \frac{g_1(x,t)}{h(x,t)}, \ldots \dot{x}_n = \frac{g_n(x,t)}{h(x,t)}, \tag{4.1}$$

где t — независимая переменная, $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ — искомые функции этой переменной, а $g_1, \ldots g_n, h$ — полиномы относительно $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами, зависящими от t. Для начала можно было бы допустить, что эти коэффициенты — полиномы относительно t, однако теория не меняется существенным образом, если сразу принять в рассмотрения случай, когда в качестве коэффициентов могут выступать какие угодно аналитические функции t. голоморфные и однозначные в некоторой односвязной области G. При этом исключим из этой области еще и те значения t, при которых коэффициенты знаменателя обращаются в нуль одновременно. Описанную систему дифференциальных уравнений будем называть *системой дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной,* или короче *системой рациональных дифференциальных уравнений.* Часто для краткости мы будем записывать эту систему как

$$\dot{x} = f(x, t),$$

используя очевидные векторные обозначения.

Дифференциальное уравнение, неразрешенное относительно старшей производной, всегда можно свести к системе рациональных дифференциальных уравнений путем повышения порядка. Напр., если задано

$$F(y'', y', y, x) = 0,$$

то любое его решение удовлетворяет и уравнению

$$y''' = -\frac{F_{y'}y'' + F_y y' + F_x}{F_{y''}}$$

с рациональной правой частью.

4.2. Первая теорема Пенлеве

Рассмотрим ветвь решения рациональной системы дифференциальных уравнений. Для этого зададимся некоторыми начальными условиями (x_0, t_0), при которых уравнения разрешимы в силу теоремы Коши и проведем произвольную кривую, выходящую из точки $t = t_0$ и лежащую в области G. Продолжая вдоль нее ряд, доставляемый теоремой Коши, мы или дойдем до конца кривой или упремся в особую точку $t = a$. Мы определим вдоль дуги $t_0 \ldots a$ кривой однозначную функцию $x = F(t)$, голоморфную во всех точках, кроме $t = a$, и являющуюся решением уравнения (4.1).

Определение 1. Точку b плоскости $\mathbb{P}^n$ назовем предельным значением $F(t)$ в особой точке $t = a$, если существует такая последовательность точек $t = a_n$, лежащих на $\mathfrak{C}$ и сходящихся к $t = a$, что $F(a_n) \to b$.

Разумеется, ветвь аналитической функции не обязана иметь предел в особой точке и поэтому она может иметь в ней несколько, а следовательно, и бесконечно много предельных значений.

Теорема 4.1. (Первая теорема Пенлеве[1]) Ветвь $x = F(t)$ решения задачи Коши (4.1) существует вдоль дуги любой жордановой кривой $\mathfrak{C}$, лежащей в области голоморфности коэффциентов G, выходящей из точки $t = t_0$ и заканчивающейся или концом $\mathfrak{C}$ или особой точкой $t = a$. В последнем случае, любое предельное значение является или бесконечно удаленной точкой, или нулем уравнения $h(x, a) = 0$.

Конечно, доказывать эту теорему следует от противного: пусть существует такая последовательность точек $t = t_n$ кривой $\mathfrak{C}$, сходящаяся к $t = a$, что значения $F(t_n)$ сходится к некоторой конечной точке $x = b$ и $f_m(b; a) \neq \infty$.

В силу теоремы Коши

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x|_{t=a} = b$$

имеет решение в виде ряда

$$x = b + b'(t - a) + \cdots = \mathfrak{P}(t - a);$$

[1] В стокгольмских лекциях эта теорема приведена подробно для уравнения первого порядка, а случай системы двух уравнений лишь намечен. Приведенное выше доказательстве основано на идеи выделения подпоследовательности, позаимствованной из статьи Gérard R., Sec A. Fuuiletages de Painlevé //Bull. soc. math. France. V. 100. Fasc. 1. P.47.

если бы теорема Коши была бы теоремой единственности в более широком классе, нежели класс голоморфных решений, то отсюда бы следовало равенство

$$F(t) = \mathfrak{P}(t-a)$$

на дугу кривой $\mathfrak{C}$, лежащей в круге сходимости ряда. Это в свою очередь означало бы, что точка $t = a$ не может быть особенной, против предположения. К сожалению, функция $F(t)$ определена только вдоль дуги кривой $\mathfrak{C}$ и на ее конце $t = a$ имеет не известную нам особенность. Поэтому при таком подходе нам нужна теорема единственности для задачи Коши

$$\dot{x} = f(x,t), \quad \lim_{t_n \to a} = b$$

в классе функций, дифференцируемых вдоль $t_0..a$ дуги и быть может даже разрывных на ее конце.

Пенлеве обошел эту тонкость следующим образом. Определим константу $\mathfrak{M}$ грубее, чем в теореме Коши, как максимум $|f_i(x,t)|$ в некоторой малой области

$$|t-a| \leq 2r, \quad |x-b| \leq 2r,$$

что всегда возможно, если правая часть $f(x,t)$ голоморфна в точке (a,b). Возьмем теперь точку (τ, ξ) произвольным образом в области

$$|\tau - a| \leq r, \quad |\xi - b| \leq r$$

Тогда $f(x,t)$ голоморфна и ограничена по модулю константой $\mathfrak{M}$ в области

$$|t-\tau| \leq r, \quad |x-\xi| \leq r$$

и поэтому решение начальной задачи

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x(\tau) = \xi$$

в виде ряда

$$x = \xi + \varphi_1(\tau,\xi)(t-\tau) + \ldots,$$

которое доставляет теорема Коши для всех точек (τ, ξ) , лежащих в окрестности

$$|\tau - a| \leq r, \quad |\xi - b| \leq r$$

точки (a, b), сходится в круге

$$|t - \tau| < h = r\left(1 - e^{-\frac{1}{(n+1)\mathfrak{M}}}\right),$$

радиус h которого не зависит от τ и ξ, но только от точки (a, b) и выбора радиуса r.

Поэтому, если существует такая последовательность точек $t = t_n$ кривой $\mathfrak{C}$, сходящаяся к $t = a$, что значения $F(t_n)$ сходится к некоторой конечной точке $x = b$ и знаменатель $h(b; a) \neq 0$, можно взять столь большой номер n, чтобы

$$|t_n - a| < \frac{h(a, b, r)}{2},$$

и тогда решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(x; t), \quad x|_{t_n} = F(t_n)$$

дается рядом $x = \mathfrak{P}(t - \tau)$, сходящимся в окрестности точки $t = a$ и являющимся рядом Тейлора для $F(t)$, поскольку эта функция является голоморфным в окрестности точки $t = t_n$ решением той же начальной задачи. Это означает, что точка $t = a$ не является особой точки, что невозможно. Тем самым первая теорема Пенлеве полностью доказана.

Эта теорема является глобальной теоремой существования, поскольку гарантирует существование решение вплоть до $t = a$, при котором решение покидает область определения правой части рассматриваемых дифференциальных уравнений (4.1).

4.3. Вторая теорема Пенлеве для уравнений первого порядка

Обратимся теперь к уравнению первого порядка, разрешенному относительно производной:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g_0(t)x^p + g_1(t)x^{p-1} + \dots g_p(t)}{h_0(t)x^q + h_1(t)x^{q-1} + \dots + h_q(t)}, \tag{4.2}$$

коэффициенты которого h_i, g_i являются голоморфными функциями в области G, причем h_i не обращаются в нуль одновременно. Если $t = a$ — особая точка ветви $x = F(t)$ решения, полученной путем продолжения вдоль некоторой кривой $\mathfrak{C}$, то в силу первой теоремы Пенлеве предельными значениями решения $F(t)$ в точке $t = a$ могут быть бесконечно удаленная точка и нули полинома

$$h_0(a)x^q + h_1(a)x^{q-1} + \dots + h_q(a) = 0,$$

которых имеет не более чем q корней. Это означает, в силу леммы о предельных точках (теорема 3.1), что рассматриваемая функция может иметь лишь одно предельное значение:

Теорема 4.2 (Первая теорема Пенлеве для уравнения первого порядка). Ветвь $x = F(t)$ решения задачи Коши (4.2) существует вдоль дуги любой жордановой кривой $\mathfrak{C}$, лежащей в области голоморфности коэффициентов G, выходящей из точки $t = t_0$ и заканчивающейся или концом $\mathfrak{C}$ или особой точкой $t = a$. В этой точке функция $F(t)$ имеет предел b, которые является или бесконечно удаленной точкой, или корнем уравнения

$$b^q + g_1(a)b^{q-1} + \dots + g_q(a) = 0.$$

Пусть $b \neq \infty$. Начальная задача

$$\frac{dt}{dx} = \frac{h_0(t)x^q + h_1(t)x^{q-1} + \dots + h_q(t)}{g_0(t)x^p + g_1(t)x^{p-1} + \dots g_p(t)}, \quad t|_{x=b} = a \tag{4.3}$$

удовлетворяет условиям теоремы Коши, если исключить из рассмотрения (то есть из области G) еще те точки, при которых уравнения

$$h_0(t)x^q + h_1(t)x^{q-1} + \dots + h_q(t) = 0, \quad g_0(t)x^p + g_1(t)x^{p-1} + \dots g_p(t) = 0.$$

Решение этой задачи отлично от константы, поскольку по условию коэффициенты $h_i(t)$ не могут одновременно обратится в нуль в точке $t = a$, поэтому его можно записать в виде ряда

$$t = a + c(x-b)^p + c'(x-b)^{p+1} + \dots, \quad (|x-b| \le r,\ c \ne 0).$$

Эту связь переменных x и t можно переписать как

$$\sqrt[p]{t-a} = (x-b)\sqrt[p]{c + c'(x-b) + \dots} = \mathfrak{P}(x-b)$$

или

$$x = \mathfrak{P}(\sqrt[p]{t-a}).$$

Если бы в нашем распоряжении была теорема единственности для решений с особенностью в начальной точке, то мы могли бы утверждать, что $F(t) = \mathfrak{P}(\sqrt[p]{t-a})$, то есть что особая точка является алгебраической.

С тем, чтобы аккуратно увязать это решение с нашей ветвью, применим ту же конструкцию, что и при доказательстве первой теоремы Пенлеве. Зададимся малым числом r, таким, чтобы в области

$$|t-a| \le 2r, \quad |x-b| \le 2r$$

правая часть (4.3) была голоморфна, тогда задача Коши

$$\frac{dt}{dx} = \frac{h_0(t)x^q + h_1(t)x^{q-1} + \dots + h_q(t)}{g_0x^p + g_1(t)x^{p-1} + \dots g_p(t)}, \quad t|_{x=\xi} = \tau \quad (|\tau - a| \le r,\ |\xi - b| \le r)$$

имеет решение вида

$$t = \mathfrak{P}(x-\xi)$$

сходящиеся в круге $|x-\xi| \le h$, радиус h которого не зависит от τ, ξ.

В силу непрерывности $F(t)$ в точке $t = a$ можно взять столь малую дугу $a'..a \subset \mathfrak{C}$, чтобы вся соответствующая ей кривая $x = F(t)$ лежала в области $|x - b| \le \frac{h}{2}$; тогда решение задачи

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{R(t)} \frac{x^q + g_1(t)x^{q-1} + \dots + g_q(t)}{x^p + h_1(t)x^{p-1} + \dots h_p(t)}, \quad t|_{x=b'} = a' \quad (b' = F(a')) \tag{4.4}$$

в виде ряда

$$t = \mathfrak{P}(x - b')$$

сходится в области $|x - b'| \le h$, и в частности в $|x - b| \le \frac{h}{2}$. С другой стороны, не ограничивая общности рассмотрения, можно считать, что $F'(a') \ne 0$, поэтому соотношение $x = F(t)$ задает конформное отображение между окрестностями $t = a'$ и $x = b'$, функция, задающая обратное отображение, является решением задачи Коши (4.4), голоморфным в окрестности начальных данных, то есть совпадает с рядом $\mathfrak{P}(x - b')$. Поэтому равенство

$$\mathfrak{P}(F(t) - b') = t$$

верно при малых $|t - a'|$; поскольку значения $x = F(t)$ при $t = a'..a$ лежат в области сходимости ряда $\mathfrak{P}(x - b')$, то это равенство верно и на всей дуге $a'..a \subset \mathfrak{C}$. Переразложение $\mathfrak{P}(x - b, b')$ равно $\mathfrak{P}(x - b')$ в области $|x - b| \le \frac{h}{2}$ и поэтому равенство

$$\mathfrak{P}(F(t) - b; b') = t$$

верно на всей дуге $a'..a \subset \mathfrak{C}$. Итого: существует такой степенной ряд

$$a + c(x - b)^p + c'(x - b)^{p+1} + \dots,$$

что

$$a + c(F(t) - b)^p + c'(F(t) - b)^{p+1} + \dots = t;$$

но тогда при некотором выборе значения корня верно

$$(F(t) - b)\sqrt[p]{1 + \tfrac{c'}{c}(F(t) - b) + \dots} = \sqrt[p]{\frac{t - a}{c}}$$

или

$$F(t) = \mathfrak{P}(\sqrt[p]{t-a}).$$

Таким образом, особая точка оказывается алгебраической.

Случай $b = \infty$ сводится к предыдущему путем замены $z = \frac{1}{x}$. Для этой новой переменной получается уравнение

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{z^2 h(z^{-1}, t)}{g(z^{-1}, t)}$$

с рациональной правой частью. Следовательно, если исключить из области G те значения t, при которых совместимы уравнения

$$z^p h(^{-1}, t) = 0, \quad z^q g(z^{-1}, t) = 0,$$

то есть те, при которых кривые

$$h(x, t) = 0, \quad g(x, t) = 0$$

пересекаются в бесконечно удаленной точке вида $(x, t) = (\infty, a)$, то решение z в окрестности особой точки a можно представить рядом $\mathfrak{P}(\sqrt[r]{t-a})$, а следовательно, и $x = z^{-1}$ можно разложить в ряд Пюизе, содержащий конечное отрицательных членов.

Теорема 4.3 (Вторая теорема Пенлеве для уравнения первого порядка). Решение уравнения 1-го порядка

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g_0(t)x^p + g_1(t)x^{p-1} + \cdots + g_p(t)}{h_0(t)x^q + h_1(t)x^{q-1} + \cdots + h_q(t)},$$

коэффициенты которого являются голоморфными функциями в некоторой области G, может иметь неалгебраические особые точки только при тех значениях t, при которых или одновременно обращаются в нуль все коэффициенты знаменателя, или уравнения

$$x^p + h_1(t)x^{p-1} + \ldots h_p(t) = 0, \quad x^q + g_1(t)x^{q-1} + \cdots + g_q(t) = 0$$

решение конечное или бесконечное.

Отсюда ясно, что положение неалгебраических особых точек полностью определяется правой частью уравнения и в этом смысле можно сказать, что *все подвижные особые точки решения дифференциального уравнения являются алгебраическими.* Именно, для заданного дифференциального уравнения, не решая его, можно подобрать подходящую область G. Зафиксировав в ней точку $t = t_0$ произвольным образом, можно быть уверенным в том, что решения задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g(x;t)}{h(x;t)}, \quad x|_{t=t_0} = x_0 \quad (h(x_0, t_0) \neq 0)$$

при любых значения x_0 можно продолжать внутри G, не встречая никаких других особенностей, кроме алгебраических особых точек. Проводя разрезы, область G всегда можно сделать односвязной, тем не менее нельзя утверждать, что все решения имеют конечное число значений, поскольку теорема о монодромиии не распространяется на алгебраические особые точки.

4.4. Пример Пенлеве и понятие общего решения

Рассмотрим вслед на Пенлеве[2] задачу Коши

$$\dot{x} = \frac{1}{t}\frac{x}{x+1}, \quad x|_{t=1} = x_0, \tag{4.5}$$

решение которой можно записать в виде трансцендентного уравнения

$$xe^x = x_0 e^{x_0} t. \tag{4.6}$$

Неподвижной особой точкой будет $t = 0$. Из (4.6) видно, что не при каких конечных t решение не может уходить на бесконечность. Продолжая вдоль некоторого пути, лежащего в области G, мы придем в особую точку $t = t_1$, только если предел x при $t \to t_1$ равен -1, поэтому решение может иметь

[2] Painleve P. Œvres, t.2, стр. 767 с сл.

алгебраическую особенность только в точке

$$t_1 = \frac{-1}{x_0} e^{-(x_0+1)};$$

положение этой точки зависит от начальных данных, то есть она действительно является подвижной.

Однако, совсем не обязательно, чтобы продолжение вдоль любого пути $t = 1..t_1$ заканчивается особой точкой. В самом деле, в силу большой теоремы Пикара уравнение

$$xe^x = -e^{-1}$$

имеет бесконечно много решений, отличных от $x = -1$. Проведем на плоскости x какой либо путь $\mathfrak{l}$, соединяющий точку $x = x_0$ с одним из этих корней и не проходящий через точку $x = 0$. Тогда продолжение решения вдоль пути $\mathfrak{L}$, заданного аналитически формулой

$$t = \frac{xe^x}{x_0 e^{x_0}}, \quad x \in \mathfrak{l}$$

будет принимать значения, лежащие на $\mathfrak{l}$, и на конце пути это решение будет иметь конечный предел, отличный от -1, а следовательно, эта точка не будет особой.

Таким образом, решение на t-плоскости без точки $t \neq 0$ является бесконечнозначной аблгеброидной функцией. Если провести разрезы, соединяющие точки $t = 0$ и $t = t_1$ с бесконечно удаленной, то мы получим односвязную область, в которой решения не имеет особенностей, а следовательно в силу теоремы о монодромии является однозначной. Убирая же разрез, соединяющий точку $t = t_1$ с бесконечностью получим односвязную область G, в которой решение является или однозначной, или двузначной функцией. Весь опыт работы с многозначными функциями подсказывает, что почти при всех начальных данных эта функция будет двузначной, а лишь при некоторых она будет вырождаться в однозначную. Покажем, что это совершенно не верно.

Множество таких x_0, для которых решение двузначно является двумерной областью на комплексной плоскости: всегда можно взять t_1 близко к $t = 1$ с тем, чтобы сингулярное решение $x = \mathfrak{P}(\sqrt{t - t_1})$ сходилось в точке $t = 1$. К множество таких x_0, для которых x однозначно, заведомо относятся все такие x_0, для которых t_1 лежит на разрезе $\mathbb{R}^-$. Но, подходя к разрезу $\mathbb{R}^-$ сверху и снизу мы должны получать разные предельные значения, поскольку иначе решение было бы однозначной функцией на $\mathbb{C}/0$. Значит, для тех x_0, для которых $t_1 \in \mathbb{R}^-$ можно указать путь $\mathfrak{L}$, по которому мы не придем к значению -1. Этому пути на плоскости x соответствуют кривая $\mathfrak{l}$, которых не заканчивается точкой $x = -1$. Допустим для определенности, что пусть $\mathfrak{L}$ подходит к точку $t = t_1$ сверху. Станем теперь непрерывно перемещать точку x_0 так, чтобы точка t_1 смещалась выше $\mathbb{R}^-$. Тогда кривая, заданная уравнением

$$t = \frac{xe^x}{x_0 e^{x_0}}, \quad x \in \mathfrak{l},$$

будут соединять точку $t = 1$ с точкой $t = t_1$, не пересекая разрез. Продолжение по этому пути не будет приводить к особой точке. Если бы продолжение по другому пути, не пересекающему разрез, приводило бы к алгебраической особенности, то функция была бы как минимум трехзначной, что невозможно. Поэтому множество таких x_0, при которых решение однозначно, тоже является двумерной замкнутой областью на комплексной плоскости.

4.5. Вторая теорема Пенлеве для системы уравнений

Перенесение второй теоремы Пенлеве на случай системы дифференциальных уравнений связано с одним затруднением: в силу первой теоремы Пенлеве решение одного уравнения

$$\dot{x} = \frac{g(x, t)}{h(x, t)}$$

имеет предел в особой подвижной точке $t = a$, а решение системы

$$\dot{x}_1 = \frac{g_1(x,t)}{h(x,t)}, \dots \dot{x}_n = \frac{g_n(x,t)}{h(x,t)}$$

вблизи особой точки принимает значения, в которых знаменатель h произвольно мал, и бесконечно большие значения, однако отсюда не следует существование предела. Поэтому доказательство второй теоремы Пенлеве требует некоторой модификации.

Итак, пусть, как и в первой теореме Пенлеве, имеется решение $x = F(t)$ вдоль кривой $\mathfrak{C}$, имеющее особую точку $t = a$, и пусть последовательность t_m точек кривой $\mathfrak{C}$ сходится к a, а $F(t_m)$ – к конечному b, тогда $h(b,a) = 0$. Уравнения

$$g_1(x,t) = 0, \dots g_n(x,t) = 0,\ h(x,t) = 0$$

в общем случае не могут быть совместимы при все t, добавим эти особые значения к списку неподвижных особых точек, исключаемых из области G.

Пусть для определенности $g_1(b,a) \neq 0$, тогда решение системы

$$\frac{dt}{dx_1} = \frac{h(x,t)}{g_1(x,t)},\ \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{g_2(x,t)}{g_1(x,t)}, \dots, \frac{dx_n}{dx_1} = \frac{g_n(x,t)}{g_1(x,t)},$$

проходящее через точку $(x,t) = (\xi, \tau)$, лежащую в некоторой малой окрестности

$$|b - \xi| \leq r, \quad |a - \tau| \leq r$$

точки $(x,t) = (b,a)$, в силу теоремы Коши имеет решение

$$t = T(x_1; \tau, \xi),\ x_2 = X_2(x_1; \tau, \xi), \dots x_n = X_n(x_1; \tau, \xi) \tag{4.7}$$

в виде ряда по степеням $x_1 - \xi_1$, сходящееся в круге $|x_1 - \xi_1| \leq h$, радиус которого не зависит от начальных данных (ξ, τ). Поэтому функции $T, X_2, \dots, X_n$ определены для всех x_1 из некоторой окрестности точки $x_1 = b_1$ и всех начальных данных из некоторой окрестности точки $(\xi, \tau) = (b, a)$.

Эти функции представляют собой ряды по степеням $x_1 - \xi_1$, коэффициенты которых являются голоморфными функциями начальных данных, причем в теореме Коши для этих рядов построена мажоранта, не зависящая от начальных данных. Это означает, что интеграл от этих по любой из переменных не зависит от пути и следовательно, функции $T, X_2, \ldots, X_n$ голоморфны при всех x_1 из некоторой окрестности точки $x_1 = b_1$ и всех начальных данных из некоторой окрестности точки $(\xi, \tau) = (b, a)$.[3] Но тогда в силу подготовительной теоремы Вейерштрасса уравнение найдется столь малая окрестность точки

$$(x, t, \xi, \tau) = (b, a, b, a)$$

и такие голоморфные в ней функции $p_0, p_1, \ldots p_s$, что

$$t - T(x_1; \tau, \xi) = ((x_1 - b_1)^s + \ldots p_s(t; \tau, \xi))\, e^{p_0(t, x_1; \tau, \xi)}.$$

Возьмем m столь большим, чтобы точка $(x, t, \xi, \tau) = (F(t_m), t_m, F(t_m), t_m)$ попала в эту окрестность и чтобы $F'(t_m) \neq 0$, зафиксируем это значение начальных данных и более не будем указывать зависимость решения от начальных данных.

Условие $F'(\tau) \neq 0$ позволяет утверждать, что уравнение

$$x_1 = F_1(t)$$

задает конформное отображение между некоторой окрестностью точки $t = \tau$ и точки $x_1 = \xi_1$, поэтому существует обратная функция $t = G(x_1)$ и набор

$$t = G(x_1),\; x_2 = F_2(G(x_1)), \ldots, x_n = F_n(G(x_1))$$

доставляет голоморфное решение той же начальной задачи, что и функции (4.7). В силу единственности голоморфного решения, функция T совпадает с G, то есть является обратной по отношению к F_1. Это означает, что равенство

$$t = T(F_1(t))$$

[3] Сказанное составляет содержание теоремы Вейерштрасса о суммировании ряда.

выполняется тождественно в некоторой окрестности точки $t = \tau$. Но мала окрестность этой точки лежит в той области, в которой

$$t - T(x_1; \tau, \xi) = ((x_1 - b_1)^s + \dots p_s(t))\, e^{p_0(t,x_1)},$$

поэтому равенство

$$(F_1(t) - b_1)^s + \dots p_s(t) = 0$$

верно всюду, где сходятся ряды для p_i. И при этом нам не важно, как растет $F(t)$, поскольку этот рост не может повлиять на сходимость указанных рядов. Наоборот, из сходимости этих рядов в некоторой окрестности точки $t = a$ следует, что $F(t)$ имеет при $t \to a$ конечный предел, совпадающий с одним из s корней этого уравнения при $t = a$. Таким образом, главное препятствие на пути обобщения второй теоремы Пенлеве на случай систем преодолено: $F_1(t)$ имеет конечный предел при $t \to a$.

Теперь нетрудно доказать, что в окрестности особой точки $F_1(t)$ можно представить рядом вида $\mathfrak{P}(\sqrt[s]{t-a})$, или тем же путем, что и выше для случая одного уравнения, или заметив, что $F_1(t)$ является локально корнем алгебраического уравнения, и поэтому особая точка должна быть винтовой. Для всех прочих $F_k(t)$ достаточно записать

$$F_k(t) = X_k(F_1(t)),$$

чтобы сразу увидеть, что и они имеют алгебраической особую точку. Случай, когда $\|F(t)\|$ стремится к бесконечности сводится к предыдущему очевидной заменой.

Теорема 4.4. В области G комплексной плоскости t, в которой коэффициенты полиномов $g_1, \dots g_n, h$ как функции t голоморфны, причем ни в одной точке все коэффициенты h не обращаются в нуль одновременно, и система уравнений

$$g_1(x,t) = 0, \dots g_n(x,t) = 0,\ h(x,t) = 0$$

не имеет решений x, как конечных, так и бесконечно удаленных, любое решение системы
$$\dot{x}_1 = \frac{g_1(x,t)}{h(x,t)}, \ldots \dot{x}_n = \frac{g_n(x,t)}{h(x,t)}$$
имеет только алгебраические особые точки.

Следует заметить, что некоторые системы, напр.,

$$\dot{x} = p(x,y), \quad \dot{y} = q(x,y),$$

не имеют вовсе подходящей области G, поскольку система

$$p(x,y) = 0, \quad q(x,y) = 0$$

совместна при всех t.

Глава 5

Аналитическая теория задачи многих тел

Классическим примером системы алгебраических дифференциальных уравнений, на котором оттачивалась аналитическая теория дифференциальных уравнений, доставляет система из N тел, взаимодействующих по закону всемирного тяготения. В силу принципа суперпозиции сил движение такой системы описывается дифференциальными уравнениями

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \tag{5.1}$$

где m_i — массы тел, $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ — радиус-векторы тел, а $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$.

Правые части уравнений (5.1) зависит рационально от $x_1, \dots$ и $N(N-1)/2$ переменных r_{ij}, связанных с ними алгебраическими уравнениями:

$$r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2.$$

В дальнейшем переменные $x_1, \dots, z_n$ будем обозначать как $q_1, \dots, q_{3N}$, импульсы записывать как $p_1, \dots, p_{3N}$

Еще в начале 18 века численное решение этой системы позволило объяснить эволюцию элементов орбит комет и планет и с тех пор делаются попытки аналитически решить задачу N тел хотя бы при $N = 3$. Достигнутый прогресс в ее решении резко контрастирует с затраченными усилиями: начиная с 1750 г. по 1900 г., вышло свыше 800 работ по этому вопросу, часть из которых принадлежит величайшим математикам мира.[1]

5.1. Задача двух тел

Хорошо известно, что задача двух тел, то есть

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{m_2}{r^3}\vec{r}, \quad \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{m_1}{r^3}\vec{r}, \tag{5.2}$$

где $\vec{r} = \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, решается в элементарных функциях.

В системе отсчета, связанной с центром масс

$$\vec{r}_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\vec{r}, \quad \vec{r}_1 = -\frac{m_1 + m_2}{m_2}\vec{r}$$

и $\vec{r}$ удовлетворяет системе

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{m_1 + m_2}{r^3}\vec{r} \tag{5.3}$$

Ее решение будем искать в параметрической форме

$$\vec{r} = \vec{r}(s), \quad t = t(s)$$

где s — новая независимая переменная, такая что

$$s = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dt}{r}$$

При этом вещественным значениям t соответствуют вещественные значения s и наоборот.

Обозначая производную по s штрихом, имеем

$$\vec{r}\,' = \dot{\vec{r}}r, \quad r\,' = \frac{2x\dot{x} + \dots}{2r}r = (\vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

[1]Уиттикер Э. Аналитическая динамика, **154.**

и

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,'' &= r\frac{d}{dr}(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = r^2\ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}}(\vec{r},\dot{\vec{r}}) \\
&= -(m_1+m_2)\frac{\vec{r}}{r} + \dot{\vec{r}}(\vec{r},\dot{\vec{r}}) \\
&= -(m_1+m_2)\frac{\vec{r}}{r} - \dot{\vec{r}}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] + \vec{r}(\dot{\vec{r}},\dot{\vec{r}}) \\
&= 2\left(\frac{v^2}{2} - \frac{m_1+m_2}{r}\right)\vec{r} - \left(\dot{\vec{r}}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] - (m_1+m_2)\frac{\vec{r}}{r}\right)
\end{aligned}$$

Замечательно, что выражения, стоящие в скобках:

$$k = \frac{v^2}{2} - \frac{m_1+m_2}{r}$$

и

$$\vec{e} = \dot{\vec{r}}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] - (m_1+m_2)\frac{\vec{r}}{r}$$

являются интегралами движения. В самом деле, k — полная механическая энергия, а

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{e}} &= \ddot{\vec{r}}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] + \dot{\vec{r}}\times[\vec{r}\times\ddot{\vec{r}}] - (m_1+m_2)\frac{\dot{\vec{r}}}{r} + (m_1+m_2)\frac{(\vec{r},\dot{\vec{r}})}{r^3}\vec{r} \\
&= (m_1+m_2)\left\{-\frac{\vec{r}}{r^3}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] - \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \frac{(\vec{r},\dot{\vec{r}})}{r^3}\vec{r}\right\} = 0
\end{aligned}$$

Этот специфический интеграл задачи двух тел, называют вектором Лапласа или векторным эксцентриситетом. Таким образом, в новых переменных система (5.3) записывается так

$$\begin{cases}
\dfrac{d^2\vec{r}}{ds} = 2k\vec{r} - \vec{e}, \quad \dfrac{dk}{ds} = 0, \quad \dfrac{d\vec{e}}{ds} = 0, \\
\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{m_1+m_2}\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d\vec{r}}{ds},\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right) - (\vec{r},\vec{r})k\right)
\end{cases} \tag{5.4}$$

Эта система состоит из трех линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и одной квадратуры. Поэтому общее решение $\vec{r}$ и t должно быть целой функцией s. А именно, уравнение

$$\vec{r}\,'' = 2k\vec{r} - \vec{e}$$

имеет решение

$$\vec{r} = \frac{\vec{e}}{2k} + \vec{a}\cos(\sqrt{2k}s) + \vec{b}\sin(\sqrt{2k}s),$$

где $\vec{a}, \vec{b}$ — некоторые постоянные векторы, определенные начальными данными:

$$\vec{a} = \vec{r}|_{t=t_0} - \frac{\vec{e}}{2k}, \quad \vec{b} = \frac{r}{\sqrt{2k}}\dot{\vec{r}}|_{t=t_0}$$

Подставляя это выражение в квадратуру для t, имеем

$$t = Es + A\cos(\sqrt{2k}s) + B\cos(\sqrt{2k}s) + C\cos(2\sqrt{2k}s) + D\cos(2\sqrt{2k}s)$$

где $A, \dots E$ — некоторые константы, которые мы не станем вычислять. Суть в том, что выразить s через t в элементарных функциях невозможно. Доказанное можно сформулировать так:

Теорема 3. При помощи замены переменной t на

$$s = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dt}{r}$$

и добавления четырех новых переменных k и $\vec{e}$ можно свести задачу двух тел к системе (5.4) дифференциальных уравнений, правая часть которых дается целыми рациональными функциями. При этом ее решение доставляется при помощи целых функций s

$$\vec{r} = \vec{r}(s), \quad t = Es + T(s)$$

где $\vec{r}(s)$ и $T(s)$ имеют период $2\pi/\sqrt{2k}$.

Для полноты приведем классическое решение задачи двух тел. Пусть $q_1, \dots$ — координаты двух тел в некоторой системе отсчета $\mathfrak{K}$. Начальные данные (q_0, p_0) позволяют вычислить десять классических интегралов. Используя интегралы импульсов и центра масс, можно перейти из нее в систему, связанную с центром масс. При этом положения обоих тел в $\mathfrak{K}$ выразится линейно через положение одного из них в системе центра масс и 6 указанных интегралов движения. Движение этого тела происходит в плоскости, перпендикулярной моменту импульса, поэтому обозначив координаты тела в этой плоскости как x, y, можно выразить координаты тел q_n линейно через x, y и восемь интегралов движения:

$$q_n = q_n(x, y; c_1, \dots c_8).$$

Для определения x, y как функций t достаточно воспользоваться оставшимся интегралами — длиной момента импульса системы и энергией. Как известно в полярной системе координат они записываются так

$$r^2\dot{\varphi} = C, \quad \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{2\mu}{r} = 2h$$

Отсюда получается уравнение траектории

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}} \cos(\varphi - \varphi_0)$$

связывающее r и φ. Вместо констант C и h, выражающихся алгебраически через начальные данные, удобно использовать другие — параметры эллипса a и e, выражающие алгебраически через C и h, а значит и через начальные данные:

$$C^2 = \mu a(1 - e^2), \quad h = -\frac{\mu}{a}$$

Уравнение движение можно записать как

$$\dot{r}^2 = -\frac{\mu a(1 - e^2)}{r^2} + \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}$$

или

$$(r\dot{r})^2 = \frac{\mu}{a}(-(a - r)^2 + a^2e^2)$$

Существенно то, что из последнего уравнения нельзя выразить r как однозначную функцию t. Вместо этого приходится ввести новую переменную

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\,\frac{1}{r},$$

тогда

$$\frac{dr}{du}^2 = a^2e^2 - (a - r)^2, \quad \frac{dt}{du} = \sqrt{\frac{a}{\mu}}r$$

откуда

$$u = \int \frac{dr}{ae\sqrt{1 - \frac{(a-r)^2}{a^2e^2}}}, \quad \sqrt{\frac{\mu}{a}}(t - t_0) = \int \frac{r(u)du}{e\sqrt{\mu a}}$$

то есть

$$r = a - ae\cos u, \quad \sqrt{\frac{\mu}{a}}(t - c) = au - ae\sin u$$

где t_0 — некоторая константа. Отсюда ясно, что r и t можно выразить как целые функции u, зависящие от трех констант a, e и c, из которых a, e выражаются алгебраически через начальные данные.

Докажем теперь, что $r\cos\varphi$ и $r\sin\varphi$ являются целыми функциями u. Заметим для начала, что эти функции выражаются линейно через $r\cos(\varphi-\varphi_0)$ и $r\sin(\varphi-\varphi_0)$, а эти в свою очередь являются целыми рациональными функциями $\sqrt{r}\cos(\varphi-\varphi_0)/2$ и $\sqrt{r}\sin(\varphi-\varphi_0)/2$. Используя уравнение эллипса

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\varphi-\varphi_0)}$$

и найденное выражение для r, имеем

$$1 - e\cos u = \frac{1-e^2}{1+e\cos(\varphi-\varphi_0)}$$

поэтому

$$\cos(\varphi-\varphi_0) = \frac{1-e^2-(1-e\cos u)}{e(1-e\cos u)} = \frac{\cos u - e}{1-e\cos u}$$

и значит

$$2\sin^2\frac{\varphi-\varphi_0}{2} = 1-\cos(\varphi-\varphi_0) = \frac{(1+e)(1-\cos u)}{1-e\cos u} = \frac{2a(1+e)\sin^2\frac{u}{2}}{r}$$

и

$$2\cos^2\frac{\varphi-\varphi_0}{2} = 1+\cos(\varphi-\varphi_0) = \frac{(1-e)(1+\cos u)}{1-e\cos u} = \frac{2a(1-e)\cos^2\frac{u}{2}}{r}$$

Отсюда ясно, что $\sqrt{r}\cos(\varphi-\varphi_0)/2$ и $\sqrt{r}\sin(\varphi-\varphi_0)/2$ будут целыми функциями u, а значит, таковы и $r\sin\varphi$ и $r\cos\varphi$.

Таким образом, общее решение задачи двух тел является линейной функцией декартовых координат $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$, а значит, целыми функциями параметра u. Более того, *общее решение задачи двух тел представимо в виде*

$$q = q(u; c_1, \dots c_8, a, e, \cos\varphi_0), \quad t = c + \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(u - e\sin u)$$

где q — целая рациональная функция $\cos u/2$ *и* $\sin u/2$, *коэффициенты которой зависят от констант $c_1, \dots c_8$ линейно, а от $a, e, \cos\varphi_0$ — алгебраически.*

Было бы желательно выразить q как функции t, но для этого нужно решить уравнение

$$t - c = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(u - e\sin u)$$

которое называют *уравнением Кеплера*. Если $e < 1$, то производная правой части $f(u)$ уравнения Кеплера по u равна

$$\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(1 - e\cos u) > 0$$

при всех вещественных u и, стало быть, правая часть монотонно возрастает при вещественных u. При $u = \pm\infty$ правая часть равна $\pm\infty$, поэтому $f(u)$ пробегает все вещественные значения при u, меняющемся от $-\infty$ до $+\infty$, и, стало быть, уравнение Кеплера разрешимо при всех вещественных t. Этим способом можно определить u как непрерывную функцию t, поэтому она может быть равномерно приближена на всей вещественной оси полиномами

$$u = \lim_{n=\infty} P_n(t; e)$$

на любом сегменте вещественной оси. Значит, при всех $e < 1$ решение задачи двух тел можно приблизить полиномами по t, к сожалению, явное выражение для них пока не найдено.

5.2. Задача N тел с простыми столкновениями

Уравнения (5.1) можно превратить в рациональные, повысив их порядок. Именно, будем рассматривать

$$Q = (p_1, \dots, q_1, \dots, r_{12}, \dots)$$

как искомые функции, тогда система примет вид

$$\begin{aligned} &m_1 \dot{q}_1 = p_1, \dots, \\ &\dot{p}_1 = F_1(r_{12}, \dots), \dots \\ &\dot{r}_{12} = \frac{(x_1 - x_2)(m_1^{-1} p_1 - m_2^{-1} p_2) + \dots}{r_{12}}, \dots \end{aligned} \tag{5.5}$$

Теорема **??** Пенлеве позволяет утверждать, что при любых начальных данных задача N тел имеет голоморфное решение или вдоль всей вещественной оси, или вдоль некоторого отрезка $[t_0, t_1)$, где t_1 — конечная точка. Заранее не ясно, какая из этих двух возможностей реализуется даже если даны конкретные начальные данные, поэтому для дальнейшего необходимо рассмотреть поведение решение при $t = t_1$ подробнее.

Множество M предельных точек $Q(t)$ при $t \to t_1 - 0$ может содержать или бесконечно удаленные точки и такие точки, в которых правая часть (5.5) обращается в бесконечность. Второе возможно только тогда, когда в этой предельной точке одно из $r_{ij} = 0$.

В первом же случае $q_i(t_n)$ не может стремится к бесконечности без того, чтобы к бесконечности стремился импульс $p_i(t_n)$, а при вещественных

t и начальных данных закон сохранения энергии показывает, что $r_{ij}(t_n)$ должно стремиться к нулю. Поэтому, в любой предельной точке M $\inf r_{ij}$ обращается в нуль. Тем самым доказана теорема:

Теорема 4. (Пенлеве, 1897) Если решение задачи N тел является аналитической функцией t в интервале $[t_0, t_1)$ и перестает быть таковой при $t = t_1$, то

$$\lim_{t=t_1-0} \inf_{i\neq j} r_{ij} = 0$$

Утверждать, что в условиях теоремы при $t = t_1$ происходит соударение двух тел, можно с существенными оговорками, поскольку в общем случае мы не сможем доказать, что существуют пределы

$$\lim_{t=t_1-0} q_n(t),$$

то есть, что в момент столкновения все тела находятся в определенных точках пространства. Для доказательства существования указанных пределов нужно сделать дополнительное предположение: все расстояния r_{ij}, кроме наименьшего, равномерно ограничены снизу некоторой константой λ:

$$r_{ij} \geq \lambda > 0$$

при всех t, достаточно близких к t_1. Такое столкновение будем называть *простым.* Без особого труда доказывается, что простое столкновение происходит в конечной точке пространства:

Теорема 5. (Вейерштрасс, 1883) Пусть при $t \to t_1 - 0$ существует предел

$$r_{12} \to 0,$$

а прочие расстояния r_{ij} равномерно ограничены снизу некоторой константой λ:

$$r_{ij} \geq \lambda > 0$$

при всех t, достаточно близких к t_1, скажем при $\tau \leq t \leq t_1$. Тогда существуют конечные пределы

$$\lim_{t=t_1-0} q_n(t)$$

при всех n и

$$\lim_{t=t_1-0} \dot{q}_n(t)$$

при $n > 2$, а скорости v_1 и v_2 первого и второго тела удовлетворяют условию

$$\lim_{t=t_1-0} r_{12}v_1^2 = \frac{2m_2^2}{m_1+m_2}, \quad \lim_{t=t_1-0} r_{12}v_2^2 = \frac{2m_1^2}{m_1+m_2}$$

Доказательство. Перейдем в систему отсчета, связанную с центром масс. Пусть при $t = t_1$ соударяются первое и второе тело, то есть $r_{12} \to 0$. Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $t_2 < t_1$, что

$$r_{12} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad r_{ij} > \frac{\varepsilon}{2}$$

при всех $t_2 \leq t < t_1$. Из уравнения движения n-ой тела

$$\ddot{x}_n = \frac{m_1}{r_{1n}^3}(x_1 - x_n) + \dots$$

при $n > 2$ следует оценка

$$|\ddot{x}_n| \leq \frac{m_1}{r_{1n}^2} + \dots \leq \frac{4(m_1 + \dots + m_N)}{\varepsilon^2}$$

поэтому ускорение n-го тела $\ddot{x}_n$ равномерно ограничено в $[t_2, t_1)$. Поскольку существует интеграл от ограниченной функции, непрерывной почти во всех точках, существует и интеграл

$$\int_{t_2}^{t_1} \ddot{x}_n(t)dt$$

Значит, функция

$$\dot{x}_n(t) = \dot{x}_n(t_2) + \int_{t_2}^{t} \ddot{x}_n(t)dt$$

имеет при $t \to t_1$ предел

$$\dot{x}_n(t_2) + \int\limits_{t_2}^{t_1} \ddot{x}_n(t)dt$$

и то же верно для $x_n(t)$. Таим образом, все тела, кроме первого и второго, имеют в момент столкновения вполне определенное положение и скорость.

Поскольку $x_1 - x_2 \to 0$ и в системе, связанной с центром масс, верно $m_1x_1 + \dots + m_Nx_N = 0$, то

$$\lim_{t=t_1-0} x_1 = \lim_{t=t_1-0} x_2 = -\frac{m_3x_3(t_1) + \dots m_Nx_N(t_1)}{m_1+m_2}$$

то есть столкновение происходит в конечной точке пространства.

Из закона сохранения энергии

$$\sum m_kv_k^2 = 2h - 2U$$

имеем

$$r_{12}\sum m_kv_k^2 \to 2m_1m_2 \quad (t \to t_1).$$

По доказанному v_n при $n > 2$ имеют конечный предел, поэтому

$$r_{13}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2) \to 2m_1m_2 \quad (t \to t_1).$$

Поэтому, в частности, выражения $r_{12}\dot{x}_k^2$ $(k = 1,\ 2)$ остаются при соударении ограниченными и, стало быть, сами скорости неограниченно растут.

Вспомнив, что в системе центра масс

$$m_1\dot{x}_1 + \dots + m_N\dot{x}_N = 0,$$

имеем $\dot{x}_2 = m_2^{-1}(m_1\dot{x}_1 + m_3\dot{x}_3 + \dots)$, поэтому

$$m_2v_2^2 = \frac{m_1^2v_1^2 + 2m_1m_3(v_1,v_3) + m_3^2v_3^2 + \dots}{m_2}$$

и, стало быть,

$$r_{12}\frac{m_1(m_1+m_2)v_1^2 + 2m_1m_3(v_1,v_3) + m_3^2v_3^2}{m_2} \to 2m_1m_2 \quad (t \to t_1).$$

то есть в силу ограниченности $\sqrt{r_{13}}\dot{x}_1$

$$r_{11}v_1^2 \to \frac{2m_2^2}{m_1+m_2}$$

как и утверждалось в теореме. $\square$

Если при $t = t_1$ происходит простое столкновение двух тел, скажем первого и второго, тогда при малых $|t-t_1|$ мы имеем по сути задачу двух тел, возмущенную присутствием еще $N-2$ тел. В задаче двух тел решение удается выразить в виде целых функций от параметра

$$s = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dt}{r},$$

где $r = r_{12}$ — расстояние между сталкивающимися телами. Поэтому можно ожидать, что к решению как функции s в окрестности

$$\lim_{t=t_1-0} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dt}{r} = s_1$$

можно будет применять уточнение теоремы Коши.

Докажем, во-первых, что существует предел

$$\lim_{t=t_1-0} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dt}{r} = s_1$$

Для этого рассмотрим полезную во многих отношениях функцию

$$I(t) = \sum m_n q_n(t)^2$$

при $t < t_1$. Имеем

$$\frac{1}{2}\dot{I} = \sum m_n q_n \dot{q}_n,$$

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = \sum m_n(\dot{q}_n^2 + q_n\ddot{q}_n) = 2T - \sum q_n \frac{\partial U}{\partial q_n}$$

Так как U является однородной функцией координат минус первой степени, то по известной теореме

$$\sum q_n \frac{\partial U}{\partial q_n} = -U,$$

вследствие чего получается

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = 2T + U = 2h - U$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{t_0}^{t} U dt = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{2}\ddot{I} + 2h dt = 2h(t - t_0) - \frac{1}{2}(\dot{I}(t) - \dot{I}(t_0))$$

Но

$$\dot{I}(t) = m_1 x_1 \dot{x}_1 + m_2 x_2 \dot{x}_2 + \cdots = (m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2)x_{12} + x_{12}m_1\dot{x}_1 + \ldots$$

В теоремы 5 функции $x_1, \ldots, \dot{x}_3, \ldots$ стремятся к конечным пределам, в силу закона сохранения импульса суммы $m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2, \ldots$ тоже имеют конечный предел. Наконец,

$$|x_{12}m_1\dot{x}_1| \leq m_1 r_{12} v_1 = m_1\sqrt{r_{12}}\sqrt{r_{12}}v_1 \to 0$$

Поэтому функция $\dot{I}$ имеет предел при $t = t_1 - 0$. Остается заметить, что существует и предел

$$\lim_{t=t_1-0} \int\limits_{t_0}^{t} (U + \frac{m_1 m_2}{r})dt$$

а значит, и исходный предел

$$\lim_{t=t_1-0} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dt}{r} = s_1.$$

Во-вторых, поскольку на отрезке $t_0 \ldots t_1$ производная $\dot{s} \neq 0$ или ∞ , этот отрезок отображается однозначно на отрезок $0 \ldots s_1$ и однозначность соответствия сохраняется в (комплексной) окрестности этого отрезка, но нарушается в окрестности конца $t = t_1$. Поэтому ветвь решения $q_i(t)$, заданную вдоль отрезка $t_0 \ldots t_1$, можно представить параметрически как

$$q_i = q_i(s), \quad t = t(s)$$

где s меняется вдоль $0 \ldots s_1$, а функции x_i и t — аналитические функции без особенностей на отрезке, исключая, вообще говоря, конец $s = s_1$. На этом конце в силу теоремы 5 существуют конечные пределы:

$$\lim_{s=s_1-0} q_i(s) = q_i(t_1), \quad \lim_{s=s_1-0} q_i'(s) = r_{12}q_i|_{t=t_1} = 0, \quad \lim_{s=s_1-0} t(s) = t_1. \qquad (5.6)$$

Наша задача состоит в том, чтобы показать, что эти функции не имеют особенности и при $s = s_1$.

Эта задача была поставлена Вейерштрассом и Пуанкаре (1883), но ее решение упирается в неожиданную сложность: простая замена переменной t на s переводит систему (5.1) в систему, правая часть которой не является голоморфной функцией начальных данных при $s = s_1$, а это не дает возможность применить теорему **??** о единственности решения задачи Коши. Для задачи трех тел это затруднение преодолел К. Зундман (Sundman, 1912), которому удалось придумать цепочку канонических преобразований, приведших к гамильтоновой системе того же порядка с голоморфным гамильтонианом. Затем его в высшей степени сложные выкладки были затем несколько упрощены Леви-Чевита и К. Зигелем (Siegel, 1955)[2]. Общая задача оставалась не решенной до 1967 года, когда Бурде (Burdet)[3] пожертвовал гамильтоновостью и порядком системы и так же как выше в задаче двух тел ввел еще четыре новые функции. Изложим это решение.

Перейдем сначала в более удобную систему координат, предложенную Якоби. Примем за

$$\vec{r} = (x, y, z)^T$$

[2]Зигель К. Лекции по небесной механике

[3]Маршал К. Задача трех тел. М.-Ижевск, 2004

— вектор, проведенный из первого тела во второе, а за $\vec{v}$ — его скорость $\dot{\vec{r}}$, обозначим как O — центр масс первых двух тел и как

$$\vec{R}_i = (x_i, y_i, z_i)^T \quad (i = 3, \dots, N)$$

вектор, проведенный из O в i-ое тело, иными словами, положим

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad \vec{R}_i = \alpha \vec{r}_{1i} + \beta \vec{r}_{2i} = \vec{r}_i - (\alpha \vec{r}_1 + \beta \vec{r}_2)$$

где

$$\alpha = \frac{m_1}{m_1 + m_2},\ \beta = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Из уравнений движения (5.1) имеем

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_1}{r_{21}^3}\vec{r}_{21} - \frac{m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} + \sum_{j\neq 1,2} \frac{m_j}{r_{2j}^3}\vec{r}_{2j} - \frac{m_j}{r_{1j}^3}\vec{r}_{1j} \\ &= -\frac{m_1 + m_2}{r^3}\vec{r} + \sum_{j\neq 1,2} \frac{m_j}{r_{2j}^3}\vec{r}_{2j} - \frac{m_j}{r_{1j}^3}\vec{r}_{1j}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{R}}_i = \ddot{\vec{r}}_i - (\alpha\ddot{\vec{r}}_1 + \beta\ddot{\vec{r}}_2) &= \sum_{j\neq i} \frac{m_j}{r_{ij}^3}\vec{r}_{ij} - \sum_{j\neq 1,2} \frac{\alpha m_j}{r_{1j}^3}\vec{r}_{1j} + \frac{\beta m_j}{r_{2j}^3}\vec{r}_{2j} \\ &= -(m_1 + m_2 + m_j)(\frac{\alpha}{r_{1i}^3}\vec{r}_{13} + \frac{\beta}{r_{2i}^3}\vec{r}_{23}) + \sum_{j\neq 1,2,i} m_j \left(\frac{1}{r_{ij}^3}\vec{r}_{ij} - \frac{\alpha}{r_{1j}^3}\vec{r}_{1j} - \frac{\beta}{r_{2j}^3}\vec{r}_{2j}\right)\end{aligned}$$

Таким образом, систему (5.1) можно записать как систему Якоби:

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}} = -\dfrac{m_1 + m_2}{r^3}\vec{r} + \vec{\varphi}(r, R) \\ \ddot{\vec{R}}_i = \vec{\psi}_i(r, R), \quad (i = 3, \dots, N) \end{cases} \tag{5.7}$$

где φ и ψ_i — голоморфные функции в окрестности точки $\vec{r} = \vec{a}$ и $\vec{R}_1 = \vec{A}_1 \neq 0, \dots.$

Перейдем теперь к новой независимой переменной s, обозначая производную по s штрихом. Имеем

$$\vec{r}\,' = \dot{\vec{r}} r, \quad r\,' = \frac{2x\dot{x} + \dots}{2r} r = (\vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

и

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,'' &= r\frac{d}{dr}(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = r^2\ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}}(\vec{r},\dot{\vec{r}}) \\
&= r^2\vec{\varphi} - (m_1+m_2)\frac{\vec{r}}{r} + \dot{\vec{r}}(\vec{r},\dot{\vec{r}}) \\
&= r^2\vec{\varphi} - (m_1+m_2)\frac{\vec{r}}{r} - \dot{\vec{r}}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] + \vec{r}(\dot{\vec{r}},\dot{\vec{r}}) \\
&= r^2\vec{\varphi} + 2\left(\frac{v^2}{2} - \frac{m_1+m_2}{r}\right)\vec{r} - \left(\dot{\vec{r}}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] - (m_1+m_2)\frac{\vec{r}}{r}\right)
\end{aligned}$$

Правая часть не является голоморфной при $r = 0$, но эту особенность можно обойти. Для этого заметить, что выражения, стоящие в скобках, то есть

$$k = \frac{v^2}{2} - \frac{m_1+m_2}{r}$$

и

$$\vec{e} = \dot{\vec{r}}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] - (m_1+m_2)\frac{\vec{r}}{r}$$

являются постоянными при отсутствии других тел. Поэтому можно ожидать, что k' и $\vec{e}\ '$ можно выразить как голоморфные функции $\vec{r}, \vec{r}\,', \vec{R}_3, \ldots \vec{R}_N\,'$. Так оно и есть:

$$\begin{aligned}
k' &= \dot{x}r\ddot{x} + \cdots + \frac{m_1+m_2}{r^2}(x\dot{x}+\ldots) = r\dot{x}\left(\ddot{x} + \frac{m_1+m_2}{r^2}x\right) + \ldots \\
&= (\vec{\varphi}, \vec{r}\,')
\end{aligned}$$

и

$$\vec{e}\,' = \vec{\varphi}\times[\vec{r}\times\vec{r}\,'] + \vec{r}\,'\times[\vec{r}\times\vec{\varphi}]$$

поскольку

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{e}} &= \ddot{\vec{r}}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] + \dot{\vec{r}}\times[\vec{r}\times\ddot{\vec{r}}] - (m_1+m_2)\frac{\dot{\vec{r}}}{r} + (m_1+m_2)\frac{(\vec{r},\dot{\vec{r}})}{r^3}\vec{r} \\
&= \vec{\varphi}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] + \dot{\vec{r}}\times[\vec{r}\times\vec{\varphi}] + (m_1+m_2)\left\{-\frac{\vec{r}}{r^3}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] - \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \frac{(\vec{r},\dot{\vec{r}})}{r^3}\vec{r}\right\} = \\
&= \vec{\varphi}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] + \dot{\vec{r}}\times[\vec{r}\times\vec{\varphi}]
\end{aligned}$$

Добавив их к числу переменных $\vec{r}, \vec{R}_i$, повысив порядок системы на четыре, получим систему Бурде

$$\begin{cases} \vec{r}\,'' = 2k\vec{r} - \vec{e} + r^2\vec{\varphi} \\ k' = (\vec{\varphi}, \vec{r}\,') \\ \vec{e}\,' = \vec{\varphi} \times [\vec{r} \times \vec{r}\,'] + \vec{r}\,' \times [\vec{r} \times \vec{\varphi}] \\ \vec{R}_i' = r\vec{V}_i, \quad (i = 3, \dots, N) \\ \vec{V}_i' = r\vec{\psi}_i, \quad (i = 3, \dots, N) \end{cases} \tag{5.8}$$

которая при изъятии тел с номерами 3 и выше переходит в (5.4).

Правая часть (5.8) пока не является голоморфной функцией начальных данных при $s = s_1$, поскольку $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ не является голоморфной функцией x, y, z в окрестности нуля[4]. Но это затруднение легко обойти, если всюду заменить r на выражение

$$r = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d\vec{r}}{ds}\right) - (\vec{r}, \vec{r})k\right)$$

Сделав это, к системе 5.8 с начальными данными (5.6) можно применить теорему **??** о единственности решения задачи Коши, и утверждать следующее: если при $t = t_1$ происходит столкновение первых двух тел, то ветвь решения $q_i(t)$ вдоль отрезка $t_0 \dots t_1$ в окрестности конца $t = t_1$ можно представить параметрически

$$q_i = \mathfrak{P}_i(s - s_1), \quad t = t_1 + c_1(s - s_1)^k + \dots \quad (c_1 \neq 0).$$

Число k можно вычислить так:

$$t' = r, \quad t'' = r' = (\vec{r}, \dot{\vec{r}}), \quad t''' = r\dot{\vec{r}}^{\,2} - r\frac{(m_1 + m_2)(\vec{r}, \vec{r})}{r^3} + r(\vec{r}, \vec{\varphi})$$

и при $s = s_1$ имеем

$$t'|_{s=s_1} = 0, \quad t''|_{s=s_1} = 0, \quad t'''|_{s=s_1} = -(m_1 + m_2) \neq 0$$

и поэтому $k = 3$. Отсюда в силу подготовительной теоремы Вейерштрасса можно утверждать следующее:

[4] У Маршала (с. 49) ошибочно утверждается как раз обратное.

Теорема 6. Если в задаче N тел при $t = t_1$ происходит простое столкновение, то ветвь решения $q_i(t)$ вдоль отрезка $t_0 \ldots t_1$ в окрестности конца $t = t_1$ можно представить как

$$q_i = \mathfrak{P}_i(\sqrt[3]{t - t_1}).$$

Такую особую точку называют алгебраической. Коэффициенты рядов вещественные, коль скоро таковы коэффициенты в (5.8) и значит при $t > t_1$ можно указать единственное и вещественное решение, продолжающее исходное.

Отметим в завершении еще одно неожиданное следствие теоремы 6, указанное Вейерштрассом: *при случайном выборе начальных данных простое столкновение невероятно.* В самом деле, коэффициенты элемента $\mathfrak{P}_i(t - a)$, описывающего решение задачи $2N$ тел, зависят ровно от $6N$ произвольных констант, все элементы вида $\mathfrak{P}_i(\sqrt[3]{t - a})$ можно получит как решение (5.8) при начальных данных, удовлетворяющих трем соотношениям

$$\vec{r}|_{t=a} = 0$$

Рассматривая a как произвольную константу, видим, что коэффициенты ряда $P_i(\sqrt[3]{t - t_1})$ зависят самое большее от $6N - 2$ констант. Поскольку различные решения не могут иметь одного и того же элемента, почти при всех начальных данных столкновение невозможно.[5]

[5] В этой связи ср.: «Большие величины относительной массы Солнца к массе планет и массы планет к массам их спутников тоже не могут быть случайным обстоятельством. Если бы массы планет были сравнимы с массой Солнца, солнечная система была бы совершенно иной. В данном случае существенно, что одно тело всегда находится близ центра масс системы, <...>. Ни одна из планет не могла бы оставаться подобно Солнцу близ современного центра масс солнечной системы. Вместо этого все они двигались бы по сложным почти не поддающимся предвычислению кривым. И хотя математика не в состоянии дать точного решения даже в случае трех тел почти одинаковой массы, она позволяет убедиться, что в нашем гипотетическом случае результаты были катастрофическими. *Некоторые планеты были бы уничтожены вследствие столкновения*, а другие по всей вероятности, выталкивались бы из системы до тех пор, пока система не оказалась бы в конце концов состоящей из двух самых

5.3. Задача трех тел

К сожалению, в случае одновременного соударения трех и более тел доказать аналога теоремы 5 пока не удалось. Возникающие при этом трудности весьма неожиданны. Так в 1908 г. фон Цейпель высказал следующее утверждение: если все r_{ij} ограничены, то тела всегда можно разбить на группы тел, сталкивающихся в определенной точке пространства. Условие ограниченности r_{ij} кажется не существенным, однако избавится от него до сих пор не удалось.[6] В случае задачи трех тел можно исключить из рассмотрения случай одновременного соударения трех тел, поскольку оно возможно лишь при весьма специальных начальных данных.

С тем, чтобы не исключать позже промежуточный случай между столкновением трех тел в одной точке пространства и простым столкновением двух тел, сразу докажем теорему:

Теорема 7. (Слудский, 1874) Если существует такая сходящаяся к t_1 последовательность a_k значений переменной t, что все расстояния $r_{ij}|_{t=a_k}$ стремяться к нулю, то момент импульса системы равен нулю.

Доказательство. Перейдем в систему отсчета, связанную с центром масс и воспользуемся вновь функцией

$$I(t) = \sum m_n q_n(t)^2,$$

для которой, напомним, уже получено

$$\frac{1}{2}\dot{I} = \sum m_n q_n \dot{q}_n,$$

больших тел, движущихся вокруг друг друга на умеренном расстоянии и имеющих при себе меньших компаньонов или системы спутников. Прочие тела смогли бы оставаться в системе лишь на очень больших расстояниях от очень крупных тел. Наш опыт в отношении двойных и кратных звезд показывает, что такие звезды встречаются в виде пар, отстоящих от других пар системы на относительно большие расстояния» (Ф. Уиппл. Земля. Луна и планеты, стр. 34)

[6] Алексеев В.М. Лекции по небесной механике. Ижевск, 1999.

и

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = 2T + U = 2h - U.$$

Поскольку при притяжении $U < 0$, во всем рассматриваемом интервале $\ddot{I} > 0$. При $t = a_k \to t_1 - 0$ функция U как сумма членов вида $-cr_{ij}^{-1}$ стремится $-\infty$ и поэтому $\ddot{I}$ стремится к $+\infty$, и значит, на некотором интервале $[t_0, t_1)$ положительна. При этом функция $\dot{I}$ монотонно возрастает на интервале $[t_2, t_1)$. Такая функция может обратиться в нуль лишь при одном значении t, и начиная с этого значения $t = t_3$ вплоть до $t = t_1$ она будет знакоопределенной. На этом интервале функция $I(t)$ будет монотонной и поэтому она имеет конечный или бесконечный предел при $t = t_1$. Если этот предел отличен от нуля, то хотя бы одно $q_i|_{t=a_k}$ не стремится к нулю. Допустим для определенности, что таково x_1. Тогда из

$$0 = \sum m_i x_i = M x_1 + \sum m_i (x_i - x_1)$$

и того, что $|x_i - x_1| \le r_{i1}|_{t=a_k}$ стремится к нулю, получаем противоречие. Поэтому предел $I(t_1) = 0$.

Воспользуемся теперь тождеством

$$\sum_{k=1}^{K} \xi_k^2 \sum_{k=1}^{K} \eta_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{K} \xi_k \eta_k\right)^2 + \sum_{k<l} (\xi_k \eta_l - \xi_l \eta_k)^2$$

при $K = 3N$, $\xi_k = q_k \sqrt{m_m}$, $\eta_k = \dot{q}_k \sqrt{m_k}$, и получим

$$2IT = \frac{1}{4}\dot{I}^2 + \sum_{k<l} (\xi_k \eta_l - \xi_l \eta_k)^2.$$

Сохраняя в выражении

$$\sum_{k<l} (\xi_k \eta_l - \xi_l \eta_k)^2$$

только члены, отвечающие одной материальной точке, а не двум разным, можем заменить его лишь усилив неравенство на сумму трех слагаемых

$$\sum_{k=1}^{N} m_k^2 (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k)^2,\ \sum_{k=1}^{N} m_k^2 (y_k \dot{x}_k - z_k \dot{y}_k)^2,\ \sum_{k=1}^{N} m_k^2 (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{x}_k)^2.$$

В силу неравенства Шварца первое можно оценить как

$$N\sum_{k=1}^{N} m_k^2(y_k\dot z_k - z_k\dot y_k)^2 \geq \left(\sum_{k=1}^{N} m_k(y_k\dot z_k - z_k\dot y_k)\right)^2$$

Поэтому, обозначая как $N\eta$ длину полного момента импульса системы, можем написать

$$2IT \geq \frac{1}{4}\dot I^2 + \eta > \eta.$$

Используя теперь соотношение $\ddot I - 2h = 2T$, имеем

$$\ddot I > \eta I^{-1} - 2h.$$

Ограничив изменение t интервалом $[t_3, t_1)$, можем умножить это неравенство на $-2\dot I > 0$ и проинтегрировать от t_3 до t:

$$\dot I(t_3)^2 - \dot I(t)^2 \geq 2\eta \ln\frac{I(t_3)}{I(t)} + 4h(I(t_3) - I(t)).$$

Поскольку $I(t) \geq 0$ тем более верно, что

$$2\eta\ln\frac{I(t_3)}{I(t)} \leq \dot I(t_3)^2 + 4|h|I(t_3)$$

При $\eta > 0$ в пределе при $t = t_1$ правая часть неограниченно возрастает, переходя границу, стоящую справа, что невозможно; поэтому $\eta = 0$. □

Доказанная теорема позволяет рассматривать случай тройного соударения в задаче трех тел как возникающий лишь при весьма специальных начальных данных, реализация которых на практике невероятна. Отсюда следует, что *в задаче трех тел соударение двух или трех тел невероятно.* Вейерштрасс, обнаружив это, предложил такую задачу (1885 г., конкурс на премию шведского короля Оскара II):

«Пусть дана система произвольного числа материальных точек, взаимодействующих по закону Ньютона. Требуется, в предположении, что не произойдет соударения каких либо двух точек, представить координаты каждой точки в виде рядов по каким либо непрерывным функциям времени, равномерно сходящихся для всех действительных значений этой переменной.»

Сколько можно понять, сам Вейерштрасс, опираясь на свою знаменитую теорему об аппроксимации произвольной функции полиномами, желал получить выражение для решения в виде

$$q_i(t) = \lim_{n=\infty} P_{n,i}(t),$$

где $P_{n,i}$ — некоторые полиномы. Существование таких полиномов сразу следует из непрерывности решения, более того, достаточно исключить случай тройного соударения, а ряд из теоремы 6 все равно доставляет непрерывную функцию. К несчастью, найти конструктивный способ отыскания полиномов $P_{n,i}$ до сих пор не удалось.

Победивший на том самом конкурсе Пуанкаре предложил другой подход, реализованный затем Зундманом.

5.4. Решение задачи трех тел с ненулевым моментом импульса

Заметим для начала, что можно указать параметр

$$v = -\int_{t_0}^{t} U dt,$$

годный для соударения любых двух тел. В самом деле, если при $t = t_1$ происходит соударение первого и второго тела, то

$$\frac{dv}{ds}|_{s=s_1} = -U\frac{dt}{ds} = -Ur|_{s=s_1} = m_1 + m_2$$

поэтому между окрестностями точек $s = s_1$ и

$$v = v_1 = -\int_{t_0}^{t_1} U dt,$$

имеется взаимно однозначное соответствие, то есть *решение задачи трех тел как функция параметра*

$$v = -\int\limits_{t=t_0}^{t} U dt$$

является голоморфной функцией в окрестности вещественной оси v-плоскости.

Это подтолкнуло Пуанкаре и Зундмана искать решение не в виде функций от t, как предлагал Вейерштрасс, а в виде рядов от некоторого параметра. Именно, координаты трех тел и время являются голоморфными функциями v вдоль всей вещественной оси плоскости v, то есть существует некоторая область G, в которой координаты голоморфны. По теореме Римана эту область можно отобразить на круг единичного радиуса $|\tau| < 1$, то есть решение задачи трех тел представимо в виде функций параметра τ, голоморфных в круге $|\tau| < 1$. Такие функции представимы в виде сходящегося во всем круге рядов по положительным степеням τ. Таким образом, и *решение задачи трех тел представимо в виде*

$$q_j = \mathfrak{P}_j(\tau), \quad t = \mathfrak{P}_0(\tau), \quad |\tau| < 1$$

Путем весьма непростых оценок Зундман (1912 г.) доказал, что в качестве G можно взять полосу $|\mathrm{Im}\, v| < \delta$ и указал выражение для δ. Отображение полосы на круг дается элементарной формулой

$$\tau = \frac{e^{\frac{\pi v}{2\delta}} - 1}{e^{\frac{\pi v}{2\delta}} + 1}$$

и в итоге известна связь t и τ. После этого коэффициенты рядов Зундман нашел явно. Тем самым, для решения задачи трех тел было найдено явное выражение в виде ряда.

К сожалению, когда в 1885 году Пуанкаре пытался искать решение описанным путем, Вейерштрасс отозвался об этом подходе как о «нецелесообразном». По всей видимости, эту нецелесообразность проще всего пояснить

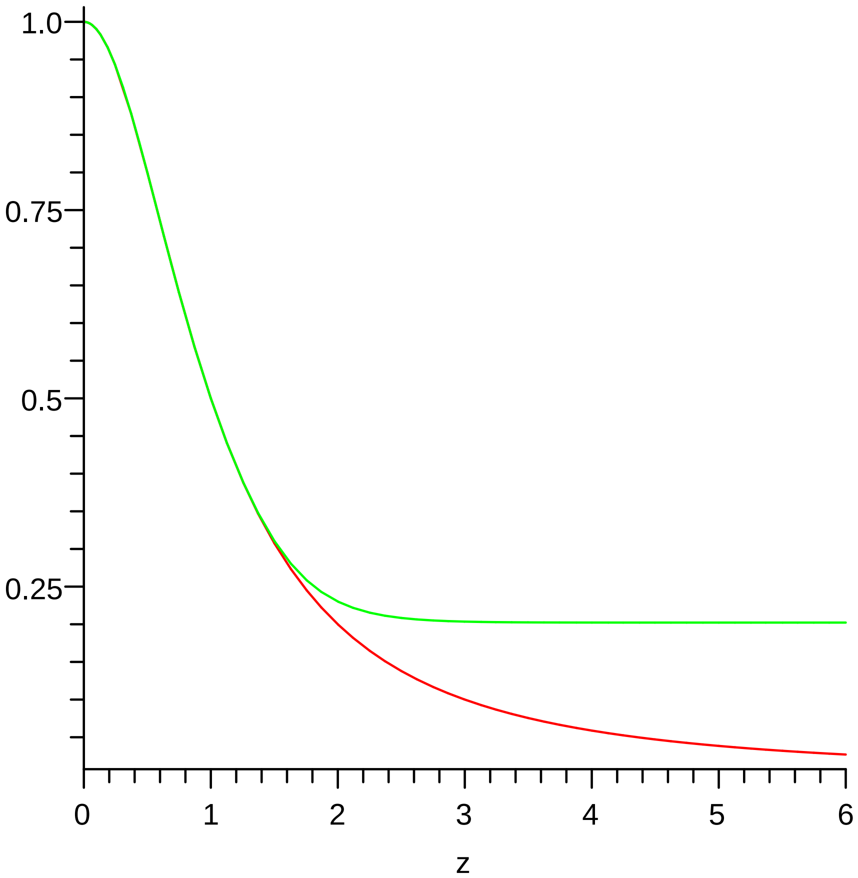

Рис. 5.1: Точное и параметрическое представление $(1+z^2)^{-1}$

так. Функция

$$w = \frac{1}{1+v^2}$$

голоморфна в цилиндре $|\mathrm{Im}\ v| < 1/2$, поэтому ее, как и решение задачи трех тел, можно попытаться представить в виде

$$v = \mathfrak{P}_1(\tau), \quad w = \mathfrak{P}_2(\tau)$$

Первый ряд получается в результате обращения

$$\tau = \frac{e^{\pi v} - 1}{e^{\pi v} + 1}$$

а второй — в результате разложения в ряд Тейлора функции

$$(1 + v(\tau)^2)^{-1}.$$

Взяв сто членов в этом ряде мы добьемся графического совпадения точного и параметрических представлений лишь при $v < 2$ (см. рис. 5.1).

Это вполне объяснимо: при отображении полосы на круг прямоугольник $|\mathrm{Re}\ v| < 1/2$ занимает почти весь круг $|\tau| < 1$, а для всей оставшейся полосы отводятся небольшие овалы возле $\tau = \pm 1$ (см. рис 5.2) К сожалению, те же проблемы возникают с использованием рядов Зундмана: как показал Белорицкий для нужд вычислительной астрономии в «сходящихся» рядах Зудмана нужно брать как минимум 10^{8*10^6} членов и поэтому они непригодны для вычисления координат.

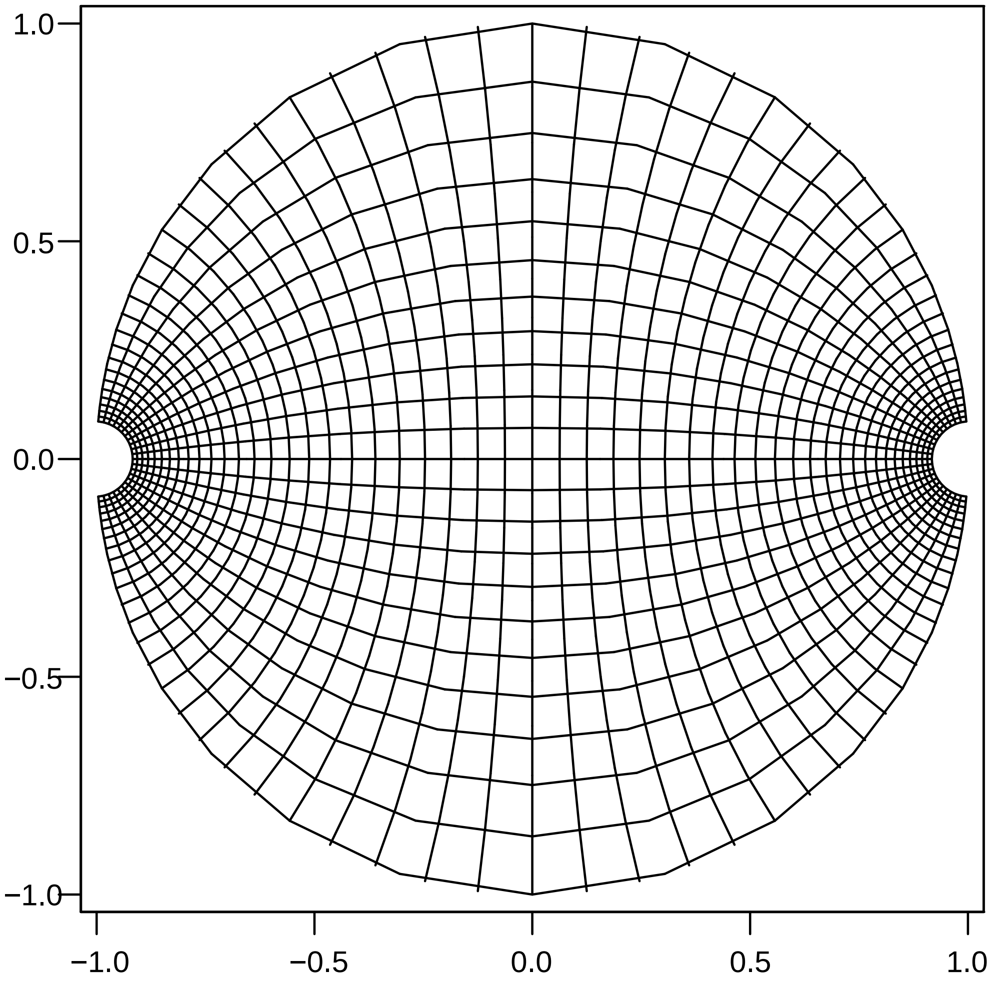

Рис. 5.2: Отображение прямоугольника $|\mathrm{Re}\ v| < 1/2$ в единичный круг, доставляемое отображением полосы на круг