

Дифференциальные уравнения.
Курс лекций.

Ловецкий К.П., Малых М.Д., Севастьянов Л.А.

Москва: РУДН, 2023

Ловецкий, К.П.

Дифференциальные уравнения. Курс лекций / К.П. Ловецкий, М.Д. Малых, Л.А. Севастьянов. — Москва : РУДН, 2023. — 175 с. : ил.

В пособии изложены основные вопросы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, кроме доказательства теоремы Коши. Дано элементарное изложение теории интегрирующего множителя и группового анализа дифференциальных уравнений 1-го порядка. Изложение проиллюстрировано примерами, решенными в системе компьютерной алгебры Sage.

Предназначено для студентов математических и естественнонаучных специальностей университетов.

Издание подготовлено на кафедре прикладной информатики и теории вероятностей РУДН.

Оглавление

Предисловие	7
I Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной	8
1. Разделение переменных и метод конечных разностей	9
1.1. Разделение переменных	9
1.2. Метод конечных разностей	13
1.3. Реализация метода Эйлера и его модификаций в Sage	15
1.4. Начальная задача для уравнений, допускающих разделение переменных	20
1.5. Особые точки	23
1.6. Теорема Коши	28
2. Интегрирующий множитель	34
2.1. Геометрическая теория интегральных кривых	34
2.2. Интегрирующий множитель	38
2.3. Отыскание множителей	41
3. Замена переменной. Групповой анализ уравнений.	50
3.1. Замена переменных	50
3.1.1. $y' = F(ax + by)$	50
3.1.2. $y' = F(y/x)$	51
3.1.3. Общие замечания о методе подстановки	54

3.1.4.	Симметрии и групповой анализ дифференциальных уравнений	57
3.2.	Аффинные симметрии	58
3.2.1.	$y' = F(ax + by)$	58
3.2.2.	$y' = F(y/x)$	61
3.2.3.	$y' = \frac{y}{x}F(x^ny)$	62
3.3.	Отыскание интегрирующего множителя по известному семейству симметрий	65
3.4.	DETools в Maple	68
4.	Общее решение дифференциального уравнения как функция константы	74
4.1.	Общее решение	74
4.2.	Линейные уравнения	78
4.2.1.	Опознавание линейных дифференциальных уравнений .	78
4.2.2.	Отыскание общего решения заданного линейного дифференциального уравнения	79
4.2.3.	Соотношение между тремя частными решениями . .	80
4.2.4.	Трансцендентные функции, возникающие при интегрировании линейных уравнений	81
4.3.	Уравнение Риккати	83
4.3.1.	Бирациональные соответствия	83
4.3.2.	Соотношение между тремя частными решениями . .	84
4.3.3.	Опознавание уравнений Риккати	85
4.3.4.	Отыскание общего решения заданного уравнения Риккати	87
4.3.5.	Трансцендентные функции, возникающие при интегрировании уравнения Риккати	89
4.3.6.	Задача о падении тела в среде с сопротивлением . . .	90
4.4.	Уравнение Бернулли	92

II	Уравнения второго порядка	94
5.	Дифференциальные уравнения 2-го порядка. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	95
5.1.	Дифференциальные уравнения 2-го порядка и метод конечных разностей	95
5.2.	Уравнение колебаний пружинного маятника	97
5.3.	Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	105
6.	Нелинейные дифференциальные уравнения 2-го порядка	114
6.1.	Дифференциальное уравнение 2-го порядка и его интеграл .	114
6.2.	Уравнение $F(y'', x) = 0$	115
6.3.	Уравнение $F(y'', y') = 0$	119
6.4.	Уравнение $F(y'', y) = 0$	123
6.5.	Нелинейное уравнение колебаний маятника	125
III	Дополнительные вопросы	132
7.	Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно старшей производной	133
7.1.	Неявные функции	133
7.2.	Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной	138
7.2.1.	Модификация метода Эйлера	138
7.2.2.	Теорема Коши	140
7.2.3.	Общее решение	141
7.2.4.	Исключение постоянной	141
7.2.5.	Уравнение Клеро	143
7.3.	Уравнения, квадратные относительно производной	146

8. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	154
8.1. Системы дифференциальных уравнений	154
8.2. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами	158
8.2.1. Матричная экспонента	158
8.2.2. Матричная экспонента симметричной матрицы	164
8.3. Неоднородные линейные системы	170

Предисловие

Настоящие лекции основаны на записках лекций, читанных одним из авторов — М.Д. Малых в течение ряда лет в МГУ и РУДН, переработанных и дополненных авторским коллективом. Курс содержит изложение всех основных вопросов курса дифференциальных уравнений, кроме доказательства теоремы Коши. При отборе примеров большое влияние оказали лекции Д.Ф. Егорова [1] и задачник А.Ф. Филиппова [2]. Исторические замечания основаны на материалах «Истории математики» под ред. А.П. Юшкевича [4] и замечаниях Г. Энештрема к статье Пенлеве в «Энциклопедии математических наук» [5]. Все вычисления и построения графиков выполнены в системе SageMath version 9.6, Release Date: 2022-05-15.

Авторы.

11 января 2023 года.

Часть I

Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной

Лекция 1.

Разделение переменных и метод конечных разностей

1.1. Разделение переменных

Основная задача дифференциального исчисления в том виде, в котором его создал Лейбниц в 1670-х годах, состоит в след.: по заданному соотношению между переменными x и y найти связь между бесконечно малыми приращениями dx и dy этих переменных. Напр., если

$$y^2 = x^3 + 1,$$

то

$$2ydy = 3x^2dx.$$

Можно, однако, поставить и более трудную обратную задачу: по соотношению между переменными x, y и их дифференциалами dx, dy найти связь между переменными x, y . Уравнение, связывающее переменные и их дифференциалы, получило название *дифференциального уравнения*.

Еще Лейбниц заметил, что дифференциальное уравнение

$$ydy = \frac{dx}{y}$$

легко решить, если разделить переменные: перенести члены, связанные с x в одну сторону, а члены связанные с y в другую. Тогда получится уравнение

$$y^2dy = dx;$$

интегрируя это равенство, получим *уравнение в квадратурах*

$$\int y^2 dy = \int dx$$

или

$$y^3 = 3x + \text{const.}$$

Описанный способ получил название *метод разделения переменных* и был отнесен в XVIII веке к Интегральному исчислению. Сам термин разделение (separatio) переменных был использован Иоганном Бернулли (Jean Bernoulli, 1667-1748) в его некогда знаменитых «Математических лекциях о методе интегралов и других вопросах» (1691-1692).¹

Пример 1.1.

$$e^{-\frac{1}{x}} y^3 dx + x^2 y^2 dy = 0$$

Разделяя переменные, получаем:

$$e^{-\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^2} = -\frac{dy}{y}$$

Выполняем интегрирование обеих частей

$$\int e^{-\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^2} = -\int \frac{dy}{y} + C$$

или

$$e^{-\frac{1}{x}} + \ln(y) = C.$$

Этот метод подходит не для всех дифференциальных уравнений, но лишь для тех, которые можно привести к виду

$$X(x)dx = Y(y)dy;$$

теперь их именуют *уравнениями с разделяющимися переменными*. В первой половине XVIII века были очень популярны уравнения, в которых переменные делились не сразу, а после угаданной замены переменных.

¹*Johannis Bernoulli. Opera omnia. Т. 3. Lausannae & Geneva, 1727. Лекция 11. Имеется немецкий перевод в Ostwalds Klassiker за № 194. См. также [4], стр. 279.*

Пример 1.2. Пусть

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x - y);$$

положим

$$z = x - y,$$

тогда получается уравнение

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx} = 1 - \sin z,$$

переменные в котором делятся:

$$\frac{dz}{1 - \sin z} = dx.$$

Остается вспомнить, что

```
sage: z=var('z') 1
sage: integral(1/(1-sin(z)),z) 2
-2/(sin(z)/(cos(z)+1)-1) 3
```

Ответ:

$$\frac{2}{1 - \frac{\sin(z)}{\cos(z)+1}} = x + C, \quad z = x - y.$$

Вера писателей XVIII века в то, что всякое дифференциальное уравнение решается разделением переменных, блестяще описана Эйлером:

«По мнению некоторых, в разделении переменных состоит вся основа решения дифференциальных уравнений, так что если предложенное уравнение не допускает разделения переменных, следует искать подходящую подстановку, в результате которой вновь введенные переменные сделают возможным разделение переменных. Итак, все дело сводится к тому, чтобы указать для любого предложенного дифференциального уравнения такую подстановку, благодаря которой имело бы место разделение переменных. Конечно, надо было бы желать, чтобы был обнаружен такой метод нахождения подходящей подстановки для любого случая, но

в этом вопросе не найдено решительно ничего определенного, так как большинство подстановок, которые до сих пор были в употреблении, не основывается на каких либо определенных началах. (...) В этом трудном деле весьма важно познакомиться с возможно более разнообразными методами.»²

Однако в 1697 году произошло весьма неприятное событие: Яков Бернулли отписал Лейбницу, что совершил множество безуспешных попыток решить уравнение

$$dy = y^2 dx + x^2 dx,$$

и спрашивал его мнение. Спустя пять лет Бернулли пришел к мысли, что при подстановке $y = -\frac{z'}{z}$ уравнение превращается в линейное $z'' + x^2 z = 0$, решение этого уравнения можно выписать в виде бесконечного степенного ряда, а следовательно, решение исходного можно отыскать в виде отношения двух степенных рядов. Только в начале XVIII решительно никто не мог согласиться с тем, что это выражение есть то, что требовалось найти. Следующие полвека уже все семейство Бернулли безуспешно пыталось придумать что-то получше. В 1724 году граф Риккати опубликовал анаграмму, в которой давалось решение более общего уравнения

$$ax^n dx + y^2 dx = bdy.$$

Анаграмма эта так и не была расшифрована, зато уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$$

получило свое современное название — уравнение Риккати.³ Следующие лет сто от уравнения Риккати отмахивались, пока в 1830-х годах Лиувилль не доказал, что уравнение Риккати не сводится к квадратурам.⁴

²Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т. 1. ГИФМЛ, 1956. §405.

³Ватсоном Г. Теории бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949. §1.1.

⁴Теоремы, доказанные тогда Лиувиллем, критически рассмотрены Ватсоном Г. в гл. IV его «Теории бесселевых функций». С современной точки зрения эти теоремы принадлежат дифференциальной алгебре, о ней см.: Капланский И. Введение в дифференциальную алгебру. М.: ИЛ, 1959.

1.2. Метод конечных разностей

Вместо того, чтобы сводить дифференциальное уравнение к квадратурам, можно позаимствовать из интегрального исчисления лишь основную идею: замену бесконечно малых приращений на конечные.

Пусть x — независимая переменная принимает значения на отрезке $[a, b]$, а y — функция переменной x , удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Разделим отрезок $[a, b]$ на N частей так, чтобы

$$\Delta x = \frac{b - a}{N}$$

и перенумеруем границы этого разбиения от a к b

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + \Delta x, x_2 = x_0 + 2\Delta x, \dots, x_N = x_0 + N\Delta x = b.$$

Поставим им в соответствие точки $y_0, \dots, y_N$, которые вычислим из уравнения

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = f(x_i, y_i)$$

или

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x. \quad (1.1)$$

Если придать y_0 , то есть значению y в точке $x_0 = a$, какое угодно значение, то все прочие y_i легко найдутся. Описанный метод называют *методом конечных разностей*, одни авторы приписывают его Эйлеру, другие — Коши.

Пример 1.3. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = y$$

на отрезке $[0, a]$. Имеем

$$\begin{aligned}y_0 &= c, \\y_1 &= y_0(1 + \Delta x), \\y_2 &= y_1(1 + \Delta x) = y_0(1 + \Delta x)^2, \\&\dots, \\y_N &= y_{N-1}(1 + \Delta x) = y_0(1 + \Delta x)^N.\end{aligned}$$

В частности, решение на конце рассматриваемого отрезка равно

$$y|_{x=a} \simeq y_0(1 + \Delta x)^N.$$

Переходя к пределу $N \rightarrow \infty$ и вспоминая, что

$$\Delta x = \frac{a}{N}$$

получаем

$$y|_{x=a} = y_0 \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{N}\right)^N = y_0 e^a.$$

Поскольку на a не накладывались какие либо условия получаем, что

$$y = y_0 e^x.$$

Прямой подстановкой в дифференциальное уравнение можно убедиться в том, что функция действительно ему удовлетворяет.

Гипотеза 1.1. Имеется одна единственная функция y от x , которая удовлетворяет заданному дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

и принимает заданное значение y_0 в точке $x = x_0$. Это решение можно приближенно вычислить методом конечных разностей.

Задачу

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

называют *начальной задачей* или *задачей Коши*, желая напомнить, что Коши был первым, кто обосновал высказанную выше гипотезу.

Метод Эйлера не был оценен в старые времена, однако он оказался чрезвычайно удобным для построения графика решения начальной задачи на ЭВМ, его модификация — метод Рунге-Кутты 4-го порядка (**rk4**) — реализована сейчас в любом пакете прикладных программ для технических вычислений, напр., в системе компьютерной алгебры Sage [3].

Пример 1.4. Обратимся к начальной задаче для уравнения Риккати

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y(x - y), & y|_{x=0} = 1 \end{cases}$$

на отрезке $[0, 1]$. Поделим этот отрезок на 5 частей и применим метод Эйлера для отыскания ее приближенного решения. Вычисления по формуле (1.1) удобно свести в таблицу:

x	y	$f(x, y)\Delta x$
0	1	-0.2000000000000000
1/5	0.8000000000000000	-0.0960000000000000
2/5	0.7040000000000000	-0.0428032000000000
3/5	0.6611968000000000	-0.00809262566604799
4/5	0.653104174333952	0.0191876553869457
1	0.672291829720898	0.0440631050822851

Отметив на плоскости найденный набор точек и соединив их для наглядности отрезками, получим рис. 1.1. Из-за того, что график решения оказывается ломаной, сам метод Эйлера называют еще *методом ломаных*.

1.3. Реализация метода Эйлера и его модификаций в Sage

При малых шагах удобно препоручить вычисления компьютеру. Метод Эйлера предлагает нам составить массив

$$P = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)\}$$

точек плоскости, координаты первой точки — начальные данные, а координаты всех последующих точек вычисляются по рекуррентным формулам

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x, \quad y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)\Delta x \quad (n = 0, 1, \dots, N-1).$$

Силами Sage эту рекурсию для начальной задачи из примера 1.4 можно реализовать в одну строчку:

```
sage: x,y=var('x,y') 4
sage: f=lambda x,y: y*(x-y) 5
sage: N=5 6
sage: dx=1/5 7
sage: P=[(0,1)] 8
sage: for n in range(0,N): P.append((P[n][0]+dx,P[n] 9
    ][1]+f(P[n][0],P[n][1])*dx))
```

В результате вычисляется массив точек

```
sage: P 10
[(0, 1), (1/5, 4/5), (2/5, 88/125), (3/5, 11
    51656/78125), (4/5, 19931157664/30517578125), (1,
    3130602788743086563104/4656612873077392578125)]
```

Чтобы нарисовать плоскости точки массива P , достаточно воспользоваться функцией `point`, а чтобы соединить их отрезками прямых — функцией `line`; напр., рис. 1.1 был построен командой

```
sage: line(P)+point(P) 12
Graphics object consisting of 2 graphics primitives 13
```

При небольших N можно себе позволить вести вычисления в поле $\mathbb{Q}$, не переходя к десятичным дробям. Однако уже при $N \simeq 100$ это приведет к значительным нагрузкам на ресурсы компьютера. Поэтому обычно работают с десятичными дробями с плавающей запятой. В Sage нет необходимости это декларировать заранее, достаточно просто написать $\Delta x = 0.2$ вместо $\Delta x = 1/5$.

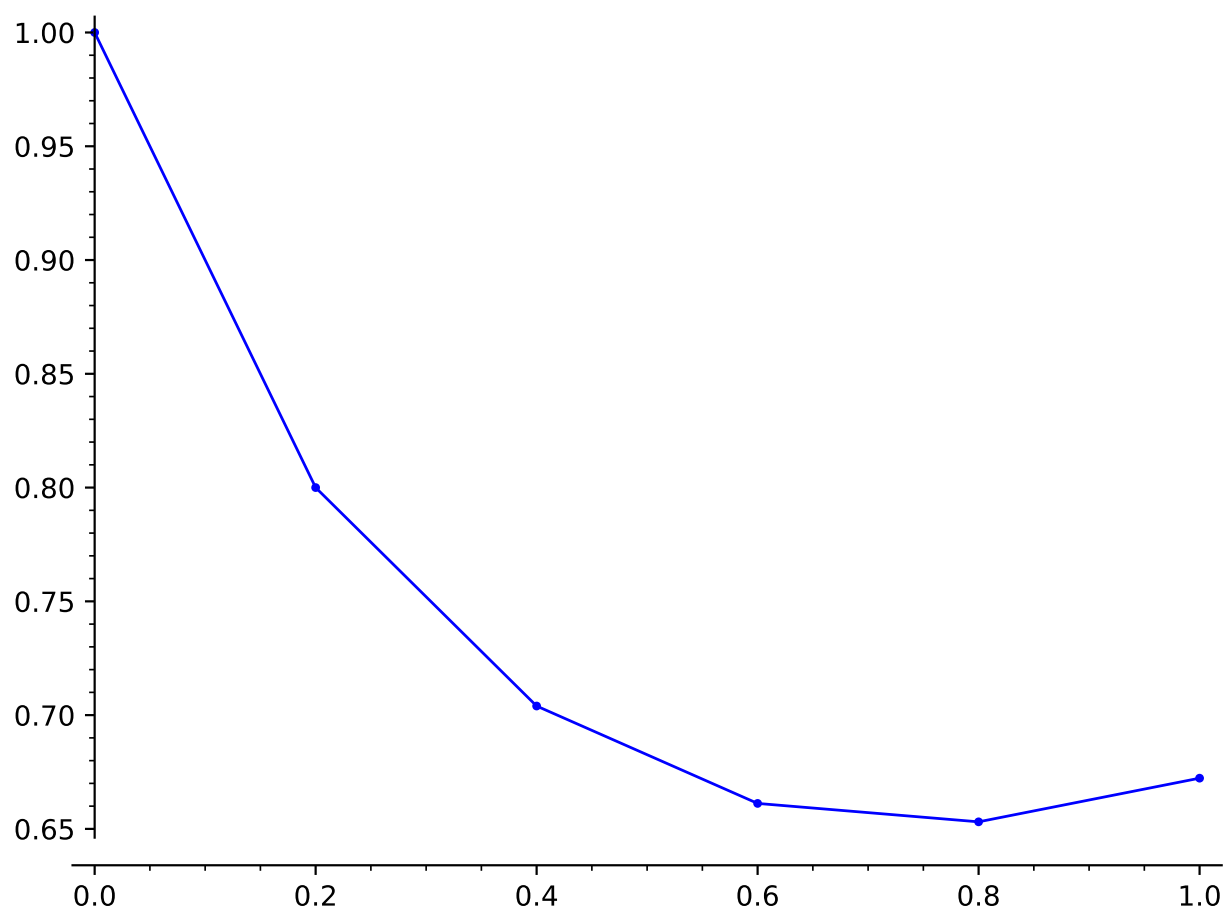


Рис. 1.1. Решение начальной задачи из примера 1.5 методом Эйлера, $\Delta x = \frac{1}{5}$.

В Sage в качестве штатного численного солвера дифференциальных уравнений предлагается функция `desolve_rk4`, которая использует метод Рунге-Кутты 4-го порядка (rk4). Перечислим ее аргументы:

`de` — правая часть дифференциального уравнения

`dvar` — зависимая переменная

`ics` — начальные условия в виде `[x0,y0]`

`ivar` — независимая переменная, ее требуется указывать, если независимая переменная не входит в правую часть дифференциального уравнения

`end points` — концы рассматриваемого интервала

`step` — шаг Δx , по умолчанию 0.1.

`output` — способ отображения: `'list'`, `'plot'` или `'slope_field'`, по умолчанию `'list'`.

Применительно к рассматриваемой задаче, получаем:

```
sage: p=desolve_rk4(y*(x-y), y, ics=[0,1],  
    end_points=[0,1], output='slope_field')
```

14

Результат представлен на рис. 1.2.

Чтобы проверить результат, следует заметить, что с геометрической точки зрения уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

указывает тангенс угла наклона в каждой точке графика решения. Если с некоторым шагом по x и y покрыть плоскость xy векторами, наклоненными к оси Ox под углом, тангенс которого равен $f(x, y)$, то график решения должен касаться тех векторов, которые он встречает на своем пути. На рис. 1.2 видно, что это условие выполняется с графической точностью.

В англо-американской традиции набор этих векторов называют *полем наклона* (slope field), ее можно вывести на график решения, добавив в `desolve_rk4` опцию `output='slope_field'`.

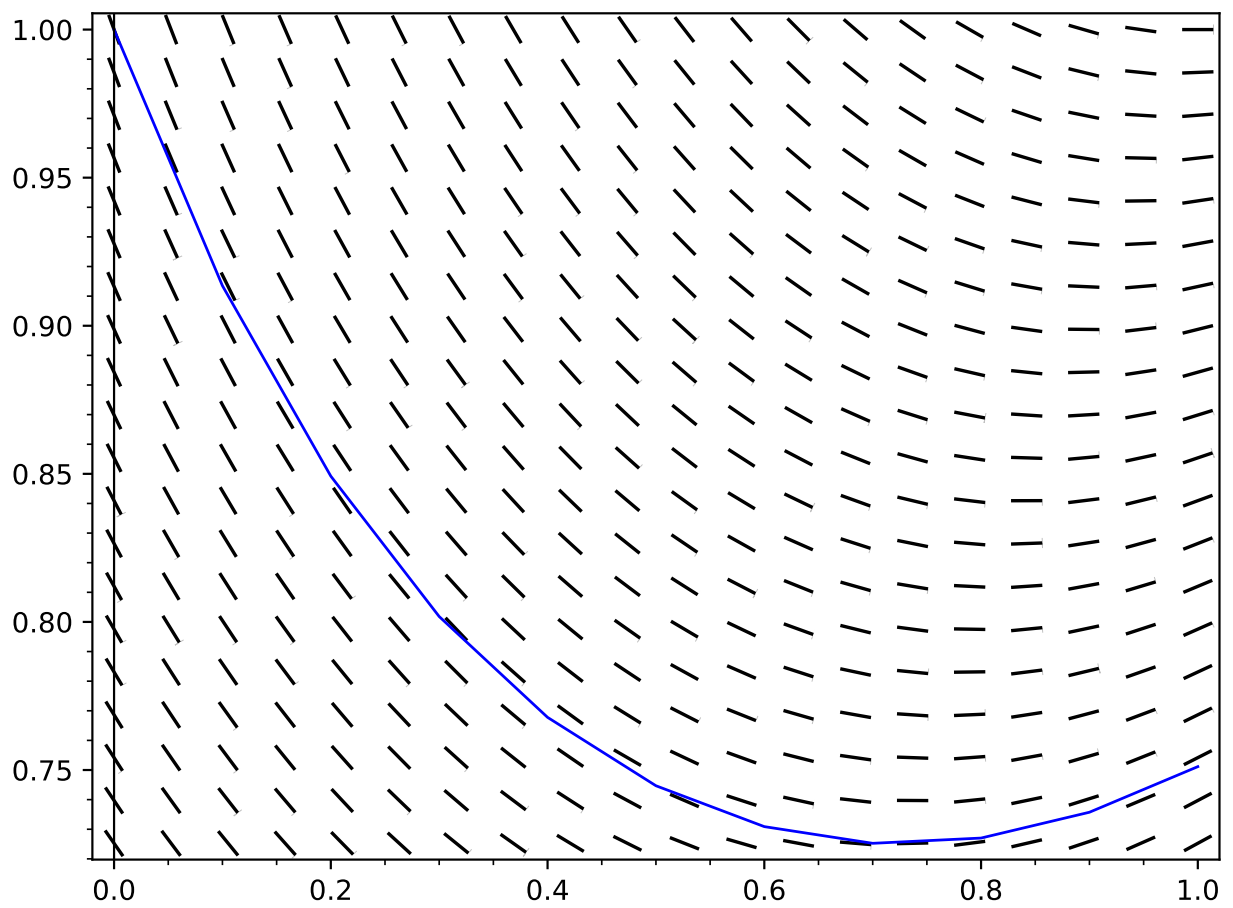


Рис. 1.2. Решение начальной задачи из примера 1.5 методом Рунге-Кутты.

1.4. Начальная задача для уравнений, допускающих разделение переменных

Обратимся теперь к начальной задаче

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = X(x)Y(y), & y|_{x=x_0} = y_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Выше, разделив переменные, мы свели дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = X(x)Y(y) \quad (1.3)$$

к квадратуре

$$\int \frac{dy}{Y(y)} = \int X(x)dx. \quad (1.4)$$

«Свели» значит, что любая функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (1.3), удовлетворяет и соотношению (1.4) при надлежащем выборе константы интегрирования, поскольку

$$\frac{d}{dx} \left[\int \frac{dy}{Y(y)} \Big|_{y=\varphi(x)} - \int X(x)dx \right] = \frac{\varphi'(x)}{Y(\varphi(x))} - X(x) = 0.$$

Поэтому функция

$$u(x, y) = \int \frac{dy}{Y(y)} - \int X(x)dx$$

обладает тем замечательным свойством, что она остается постоянной на графике любого решения дифференциального уравнения. Ее называют интегралом дифференциального уравнения (1.3), приняв в общем случае след.:

Определение 1.1. Уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0$$

называют *обыкновенным дифференциальным уравнением*. Любую функцию y от x , удовлетворяющую этому соотношению при всех рассматриваемых x , называют *решением* этого дифференциального уравнения. Функцию, постоянную на графиках всех решений, называют *интегралом* дифференциального уравнения. Линии постоянного уровня интеграла называют *интегральными кривыми*.

Метод разделения переменных позволяет найти явно интеграл $u(x, y)$ дифференциального уравнения. Для отыскания решения $y = \varphi(x)$ задачи Коши (1.2) следует заметить, что

$$u(x, \varphi(x)) = u(x_0, y_0),$$

поэтому график решения задачи Коши — дуга интегральной кривой, заданной уравнением

$$u(x, y) = u(x_0, y_0)$$

и проходящая через точку (x_0, y_0) , а само решение получится выписать явно, если удастся выразить из этого уравнения y как функцию x . Поскольку y — однозначная функция x , график решения однозначно проектируется на ось Ox и может оказаться лишь ветвью интегральной кривой.

Пример 1.5. Возникающие здесь проблемы иллюстрирует очень простое уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

предложенное с этой целью Гамбургером⁵. В этом уравнении можно разделить переменные

$$ydy = -xdx$$

и выписать интеграл

$$y^2 + x^2 = C.$$

Таким образом, интегральные кривые представляют собой семейство концентрических окружностей. График решение начальной задачи

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, & y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

представляет собой половину окружности радиуса $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, проходящую через точку (x_0, y_0) . Аналитически решение задачи Коши можно задать так:

$$y = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - x^2} \operatorname{sign}(y_0).$$

⁵*Schlesinger L.* Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Leipzig: VVV, 1922. S. 52.

Решение задачи Коши, следовательно, определено не при всех x , но только на отрезке $|x| \leq \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, концы этого отрезка будут особыми точками решения, в которых производная вовсе не определена.

При составлении квадратуры (1.4) мы теряем решения дифференциального уравнения, когда делим на $Y(y)$. По определению все корни уравнения $Y(y) = 0$ являются решениями этого дифференциального уравнения, а интеграл на них обращается в бесконечность.

Пример 1.6. Решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y(1 - y), & y|_{x=0} = 1 \end{cases}$$

выписывается сразу

$$y = 1.$$

Интеграл уравнения дается как

$$\int \frac{dy}{y(1 - y)} = \int dx$$

или

$$-\ln(y - 1) + \ln(y) = x + C$$

Сюда нельзя подставить $y = 1$ для определения константы.

В учебной литературе считается, что «решить» дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = X(x)Y(y),$$

значит составить квадратуру

$$\int \frac{dy}{Y(y)} = \int X(x)dx,$$

вычислить возникшие неопределенные интегралы и прибавить к нему решения, которые теряются при делении на $Y(y)$. Однако для вычисления решения задачи Коши этот интеграл может быть совершенно бесполезен.

Пример 1.7. Разделив в уравнении

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{(y+1)x}$$

переменные, получим

$$\int \left(1 + \frac{1}{y}\right) dy = \int \frac{dx}{x}$$

или

$$y + \ln y = \ln x + C.$$

Отсюда

$$\ln \frac{y}{x} = y - C$$

или

$$\frac{y}{x} = e^{y-C} = e^C e^{-y}.$$

Принимая e^C за новую постоянную, получим

$$\frac{ye^y}{x} = C.$$

Построить линии уровня этого интеграла труднее, чем численно решить задачу Коши для рассматриваемого уравнения:

```
sage: p=desolve_rk4(y/x/(y+1), y, ics=[1,1], output= 15
      'slope_field', end_points=[1,5], step=0.1)
```

На практике задачу построения этих линий уровня сведут к задаче Коши.

1.5. Особые точки

Часто оказывается, что решение начальной задачи определено не при всех x , но лишь на отрезке, концами которого служат особые точки, в которых решение не имеет производной или вовсе не определено. Точность вычислений по схеме Эйлера при приближении к особой точке падает, что сам Эйлер счел фатальным недостатком метода.

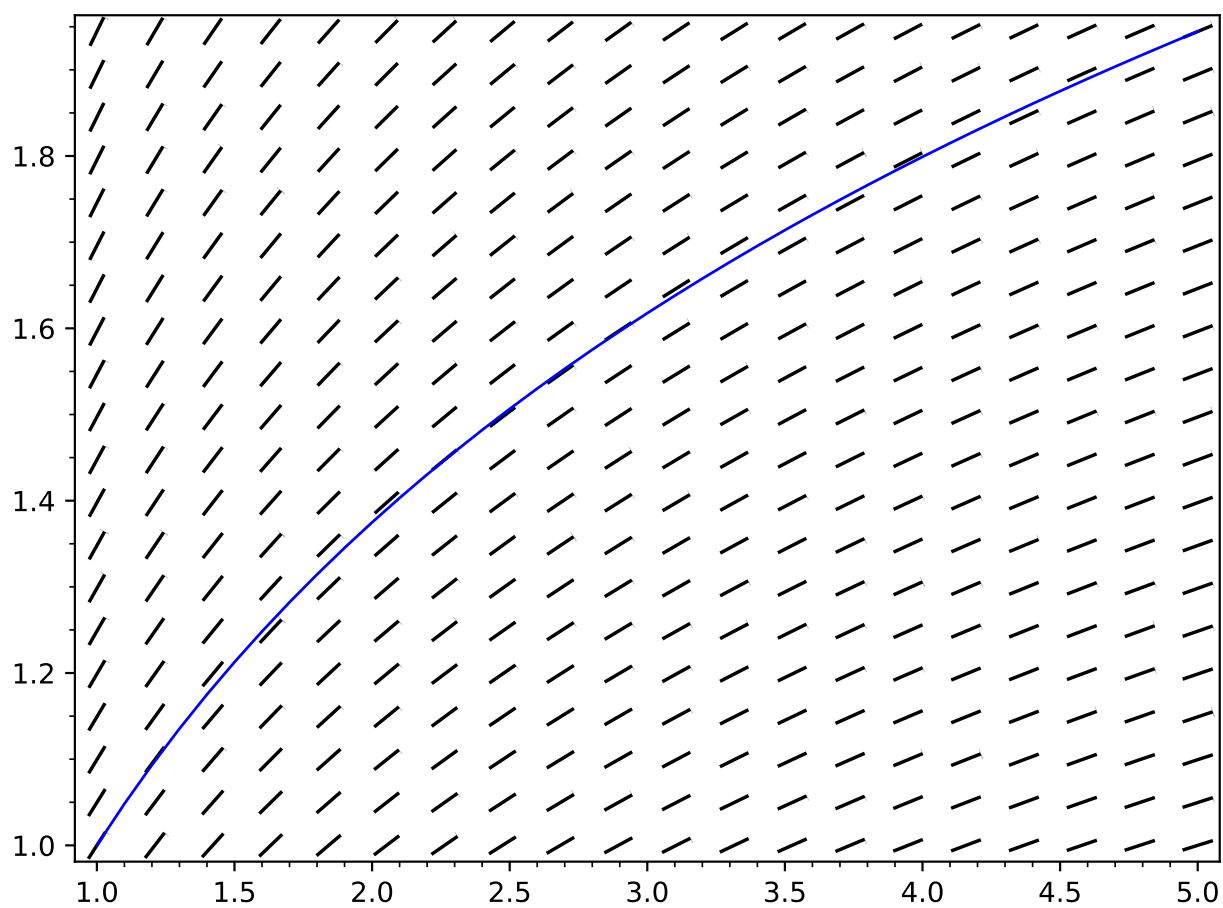


Рис. 1.3. Решение начальной задачи для примера 1.7

«Погрешность при этом вычислении происходит оттого, что на протяжении каждого отдельного промежутка обе переменные x и y сохраняющими свои значения, соответствующими началу этого промежутка, так что и значение функции $f(x, y)$ остается постоянным, поэтому: чем быстрее значение этой функции меняется от одного промежутка к следующему, тем большую можно ожидать погрешность. Это невыгодное обстоятельство имеет место обыкновенно там, где значения $f(x, y)$ или уничтожаются, или же становятся бесконечно большими.»⁶

Пример 1.8. Решим теперь начальную задачу для уравнения Гамбургера (пример 1.5), скажем

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, & y|_{x=1} = 1 \end{cases}$$

численно. На рис. 1.4 как раз представлены приближенные решения начальной задачи при различных шагах. Хорошо видно, что в при подходе к оси $y = 0$ правая часть уравнения становится очень большой, из-за чего приближенное решение «прыгает» случайным образом на другую интегральную кривую. Обычно, подвижные особые точки можно заметить, если вычислить одно и то же решения с разными шагами, однако это правило не может быть строго обосновано. Метод Рунге-Кутты дает примерно ту же картину, см. рис. 1.5.

Часто оказывается, что как и в этом примере положение особой точки зависит от начальных условий. Такие особые точки называют *подвижными особыми точками*. Не зная точного решения, трудно понять, имеем ли мы дело с дефектом численного метода или с подвижной особенностью решения.

Пример 1.9. Обратимся опять к начальной задаче из примера 1.4:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y(x - y), & y|_{x=0} = 1 \end{cases}$$

⁶Это высказывание Эйлера было процитировано А.Н. Крыловым в его знаменитых «Лекциях по приближенным методам» (1911 год), спустя полторы сотни лет после Эйлера.

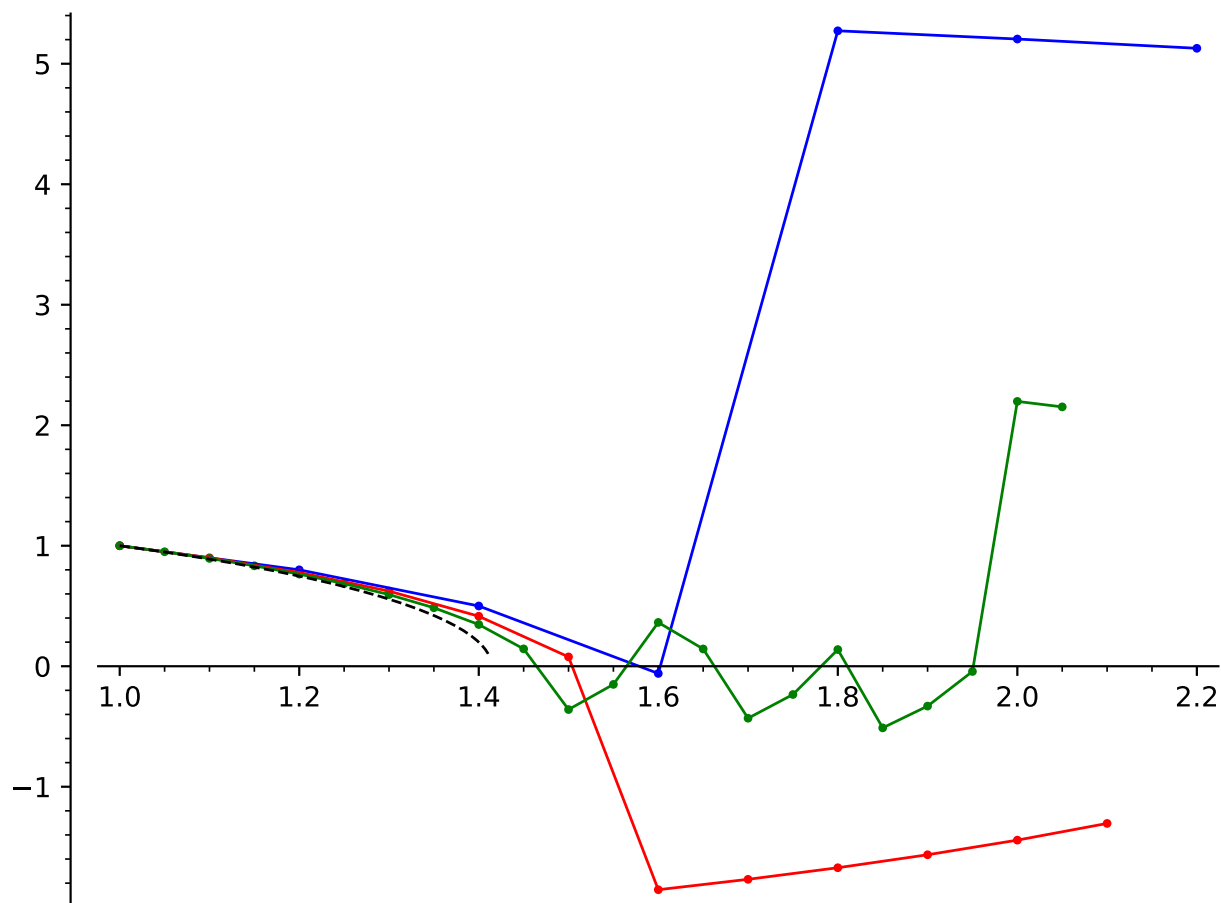


Рис. 1.4. Приближенные решения задачи Коши методом конечных разностей для уравнения Гамбургера при различных шагах $\Delta x = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ и $\frac{1}{20}$. Пунктиром изображен график точного решения $y = \sqrt{2 - x^2}$ этой задачи.

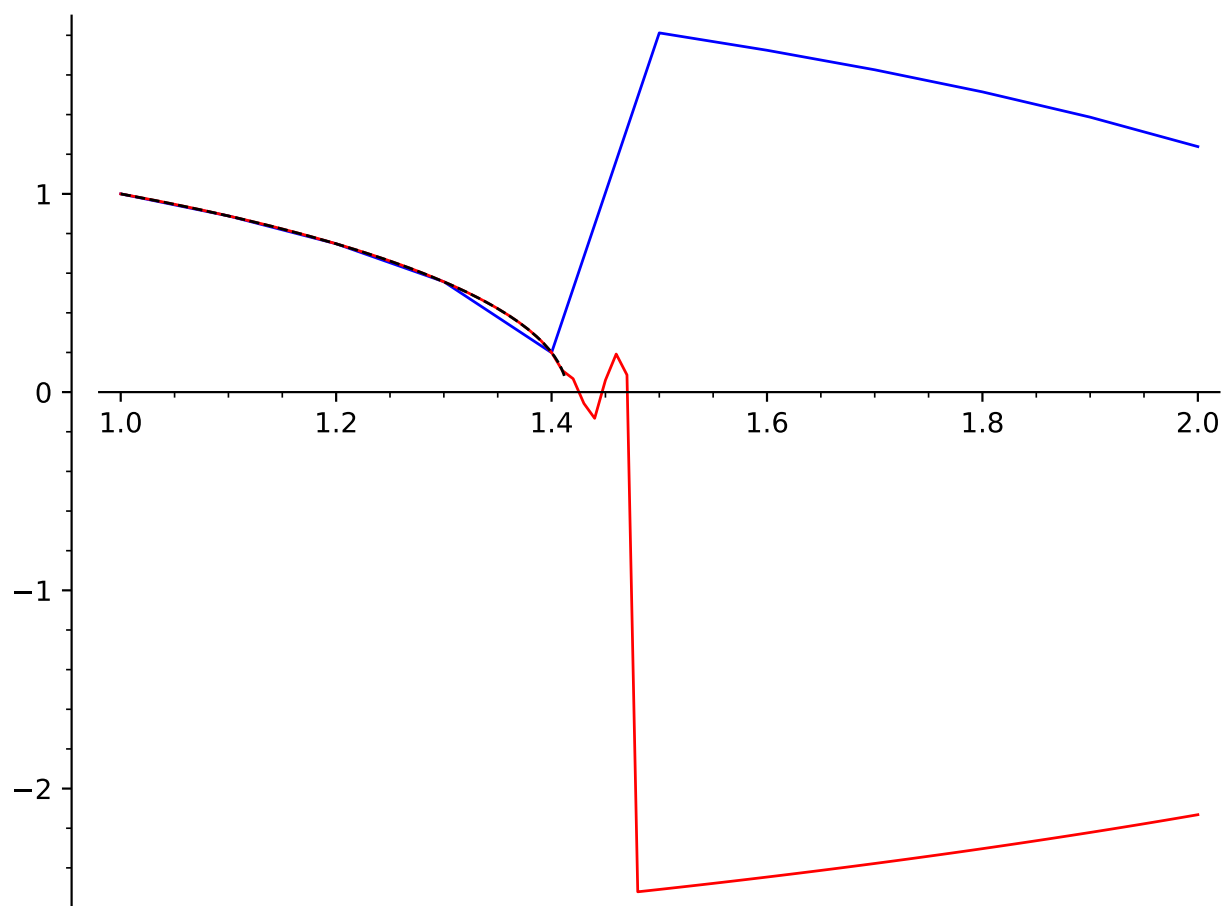


Рис. 1.5. Приближенные решения по методу Рунге-Кутты задачи Коши для уравнения Гамбургера при различных шагах.

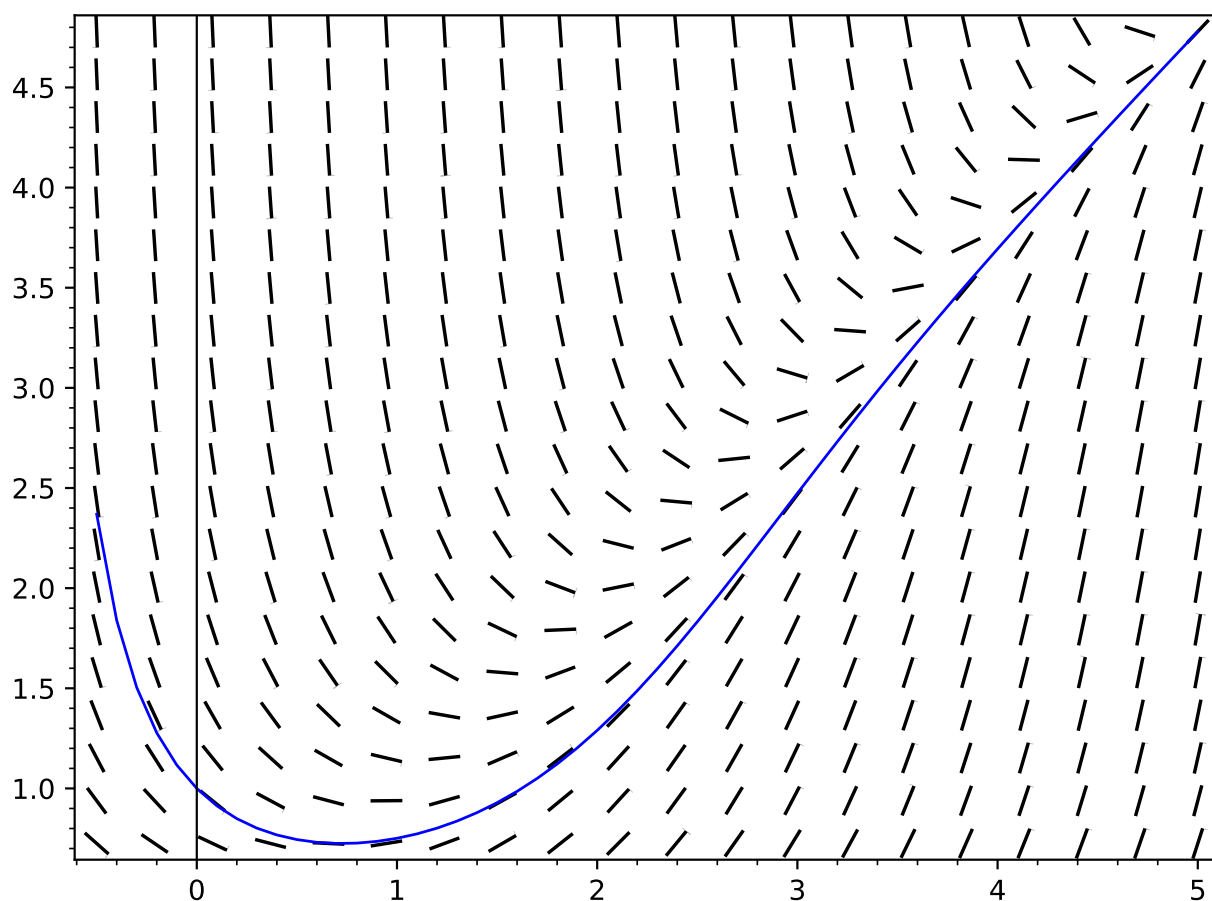


Рис. 1.6. Решение начальной задачи из примера 1.9 методом Рунге-Кутты.

По методу Рунге-Кутты решение можно построить на отрезке $-\frac{1}{2} < x < 5$, см. рис. 1.6, но можем ли мы быть уверенными в том, что при $x \simeq -\frac{1}{2}$ решение уходит на бесконечность?

1.6. Теорема Коши

В первой половине XIX века немногие ощущали всю нетривиальность гипотезы 1.1. Вот как описывает дело весьма популярный тогда учебник Штурма (ок. 1835 г.):

... Всякое дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

имеет интеграл, содержащий произвольное постоянное (...) Действительно, найти интеграл данного уравнения значит найти такую функцию x , которая обозначается через y , чтобы ее производная была равна $f(x, y)$, или другими словами, найти такую функцию, чтобы давая x -су бесконечно малое приращение dx , соответствующее приращение dy было равно $f(x, y)dx$. Так как дифференциальное уравнение $dy = f(x, y)dx$ определяет только приращение y , то, при частном значении величины x , можно взять произвольную величину y . Если, при $x = a$, возьмем $y = b$, то $f(x, y)h$ будет бесконечно малое приращение y , при переходе x к бесконечно малой величине $a + h$. Подобным образом, если положим

$$a + h = a', \quad b' = b + f(a, b)h,$$

то $f(a', b')h$ будет приращение y при переходе x от a' к $a' + h$. Итак, если продолжать увеличивать x незначительными приращениями до какой-нибудь величины, то дифференциальное уравнение определит последовательные приращения y , так что величина y , соответствующая каждой величине x , будет совершенно определена. Следовательно, y будет известной функцией от x , и эта функция необходимо будет зависеть от произвольного постоянного b , что и надо было доказать.⁷

Появление подвижных особых точек весьма затрудняет обоснование гипотезы 1.1 о существовании и единственности решения начальной задачи

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), & y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

Как учит пример Гамбургера решение, если и существует, то на некотором отрезке, концы которого зависят от начальных условий.

В 1842 г. Коши доказал существование решения в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) , единственность в классе дифференцируемых функций

⁷Штурм. Курс анализа. Т. 2, СПб.-М., 1868.

была установлена Липшицем, удобные на практике оценки для области, в которой существует решение, были получены Линделёфом. Связь с методом конечных разностей была рассмотрена чуть позже Пенлеве ⁸. Итог этих усилий обычно кратко называют *теоремой Коши*:

Теорема 1.1 (Коши). Пусть правая часть $f(x, y)$ дифференциального уравнения и ее производная по y непрерывны в области

$$|x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b.$$

Положим

$$M_0 = \sup |f(x, y_0)|, \quad K = \sup \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right|$$

Тогда задача Коши допускает и притом единственное решение, определенное на отрезке

$$|x - x_0| \leq h,$$

где h — наименьшее из двух чисел

$$a \quad \text{и} \quad \frac{1}{K} \ln \left(1 + \frac{bK}{M_0} \right).$$

Это решение может быть найдено методом конечных разностей.

Пример 1.10.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = xy, & y|_{x=0} = 1 \end{cases}$$

Поскольку правая часть xy непрерывна и дифференцируема при всех x, y , окно

$$|x| \leq a, \quad |y - 1| \leq b$$

можно взять каким угодно. Попробуем подобрать a и b , чтобы h получилось как можно большим. Каковы бы ни были a и b , имеем

$$M_0 = \sup |x| = a, \quad K = \sup |x| = a,$$

⁸*Painlevé P.* Bull. Soc. math. France. Vol. 27 (1899), p. 149 = Œuvres, t. 3; см. также его статью в Энциклопедии математических наук, II-3.

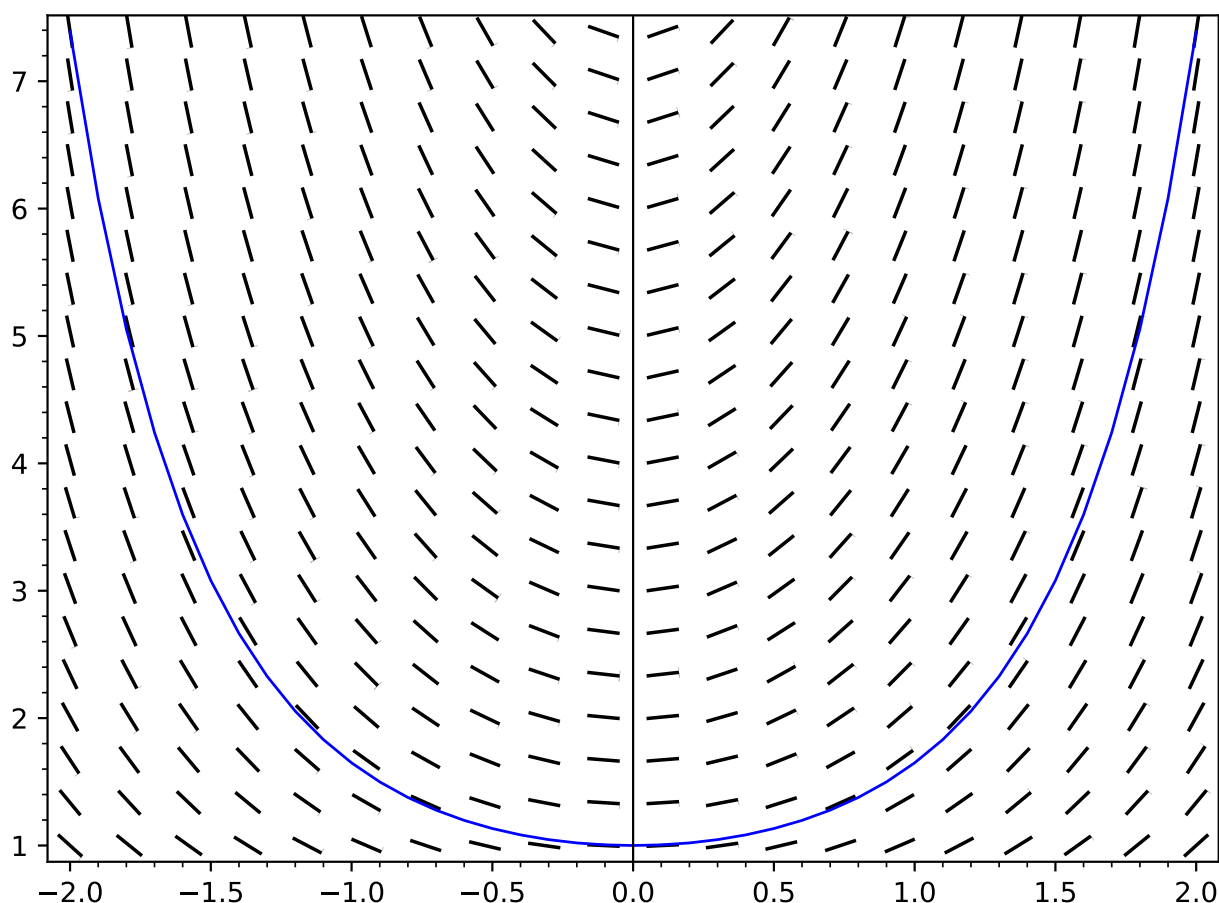


Рис. 1.7. Решение начальной задачи для примера 1.10

поэтому

$$h = \min \left(a, \frac{\ln(1+b)}{a} \right)$$

Величину b можно взять сколь угодно большой, поэтому $h = a$. Значение a тоже ничем не ограничено, поэтому $h = \infty$, то есть решение существует при всех x . Проверим это:

```
sage: p=desolve_rk4(x*y, y, ics=[0,1], output='
      slope_field', end_points=[-2,2], step=0.1)
```

16

Замечание 1.1. Доказательство теоремы Коши можно найти в любом учебнике по теории дифференциальных уравнений, слушатель, знакомый с теорией функциональных последовательностей и рядов, может ознакомить-

ся с ним, напр., по учебнику Степанова, [7], гл. 2, §1, Эльсгольца [8], §6. К сожалению, в учебной литературе ограничиваются обоснованием более грубых оценок для h :

$$h = \min \left(a, \frac{b}{\max |f(x, y)|} \right).$$

Эти оценки плохи даже для задачи

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y, & y|_{x=0} = 1 \end{cases}$$

поскольку

$$\frac{b}{\max |f(x, y)|} = \frac{b}{\max |y|} = \frac{b}{b-1} < 1,$$

а следовательно, и $h = 1$. Для той же задачи оценки Линделёфа дают $h = \infty$. Оценки точности метода конечных разностей можно отыскать в учебнике Н.Н. Калиткина [9].

Домашнее задание

1. Найдите интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

2. Найдите выражение в элементарных функциях для решения начальной задачи

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, \\ y|_{x=0} = 1 \end{cases}$$

3. Постройте график решения начальной задачи

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, \\ y|_{x=0} = 1 \end{cases}$$

на отрезке $0 < x < 1$, используя метод Эйлера с шагом $\Delta x = 1/4$ и $\Delta x = 1/5$. Сравните получившиеся графики с графиком точного решения, найденным в пред. задаче.

4. Сколько решений имеет начальная задача

$$\begin{cases} y \frac{dy}{dx} = x, \\ y|_{x=0} = 0? \end{cases}$$

5. Постройте график решения начальной задачи

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y(1 - y), \\ y|_{x=0} = \frac{1}{3}? \end{cases}$$

К чему стремится это решение при $x \rightarrow +\infty$?

6. Используя теорему Коши, выясните, на каком отрезке существует решение начальной задачи

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x^2 y + x^3, \\ y|_{x=0} = 1? \end{cases}$$

Лекция 2.

Интегрирующий множитель

2.1. Геометрическая теория интегральных кривых

Сама запись дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p(x, y)}{q(x, y)}$$

подразумевает, что мы рассматриваем переменную y как функцию x . Однако на самом деле это уравнение задает связь между бесконечно малыми приращениями этих переменных, которую можно записать и так

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0;$$

в такой записи переменные x и y равноправны. Мы можем принять по определению, что кривая C называется интегральной кривой для этого уравнения, если бесконечно малые приращения вдоль этой кривой подчинены этому условию. Желая избежать ссылки на бесконечно малые, можно сказать так: кривая C называется интегральной кривой, если наклон касательной, проведенной в любой точке кривой, равен $p : q$. При этом, конечно, наклон вертикальной касательной считается равным $1 : 0 = \infty$.

Это определение согласуется с данным в прошлой лекции определением решения дифференциального уравнения: если интегральную кривую можно задать уравнением вида $y = f(x)$, то

$$p(x, f(x))dx + q(x, f(x))f'(x)dx = 0,$$

то есть $y = f(x)$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p(x, y)}{q(x, y)}.$$

Однако интегральную кривую можно задавать и в других формах. Кривая, заданная параметрически как

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t = a..b$$

является интегральной кривой, если

$$p(x, y)\dot{x} + q(x, y)\dot{y} = 0$$

при всех t . Кривая, заданная уравнением

$$F(x, y) = 0,$$

является интегральной, если система

$$\begin{cases} p dx + q dy = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения во всех точках кривой, то есть если ее определитель, равный

$$q \frac{\partial F}{\partial x} - p \frac{\partial F}{\partial y},$$

обращается в нуль во всех точках кривой $F(x, y) = 0$.

Пример 2.1. Уравнение Гамбургера

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

можно переписать как

$$x dx + y dy = 0.$$

Кривая

$$x^2 + y^2 = 1$$

является его интегральной кривой, поскольку

$$y \cdot 2x - x \cdot 2y = 0.$$

Эту кривую можно представить параметрически как

$$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad t = 0..2\pi,$$

а формула

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

описывает лишь половину дуги этой кривой. Обе кривые $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ представляют собой графики решений исходного уравнения.

Интегралом u дифференциального уравнения называют функцию переменных x, y , постоянную на любом решении $y = f(x)$ этого уравнения. В силу теоремы Коши через любую точку (x_0, y_0) проходит решение $y = f(x)$, определенное хотя бы в малой окрестности этой точки. Дифференцируя тождество

$$u(x, f(x)) = u(x_0, y_0),$$

получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} f'(x) = 0.$$

В частности, в самой точке (x_0, y_0)

$$f'(x_0) = -\frac{p}{q}$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial x} q - \frac{\partial u}{\partial y} p = 0 \quad \text{при } (x, y) = (x_0, y_0).$$

Коль скоро (x_0, y_0) можно выбрать произвольным образом, это равенство верно при всех x, y . Отсюда получается, во-первых, что кривая

$$u(x, y) = C$$

является интегральной, а, во-вторых, что интеграл уравнения $pdx + qdy = 0$ удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial x} q - \frac{\partial u}{\partial y} p = 0.$$

Нетрудно доказать, что всякое решение этого дифференциального уравнения является интегралом исходного дифференциального уравнения, однако это последнее обстоятельство малополезно для его отыскания, поскольку решить уравнение в частных производных не проще, чем решить обыкновенное дифференциальное уравнение.

Если известен интеграл u дифференциального уравнения $pdx + qdy = 0$, то известно однопараметрическое семейство его интегральных кривых

$$u(x, y) = C.$$

Если бы дифференциальное уравнение допускало другую интегральную кривую, то некоторую ее дугу можно было бы записать как $y = f(x)$. Но в таком случае функция f должна быть решением дифференциального уравнения, а $u(x, f(x))$ не должна зависеть от x . Значит, эта новая интегральная кривая совпадает с куском одной из линий уровня. Поэтому обычно полагают, что задача отыскания всех решений дифференциального уравнения сводится к отысканию его интеграла.

Сказанное, однако, требует весьма нетривиального уточнения относительно утерянных решений. Мы ограничимся простым примером.

Пример 2.2. Уравнение

$$y(x - y'y) = 0$$

распадается на два

$$y = 0 \quad \text{и} \quad xdx - ydy = 0.$$

Второе уравнение дает семейство интегральных кривых

$$x^2 + y^2 = C,$$

к которому следует добавить решение $y = 0$. Небезынтересно отметить, что для интегральной прямой $y = 0$ определитель

$$q \frac{\partial F}{\partial x} - p \frac{\partial F}{\partial y} = -xy,$$

то есть он обращается в нуль на $y = 0$, но не равен нулю тождественно, как это бывает для интегральных кривых $u(x, y) = C$.

Термин интеграл дифференциального уравнения ввел в употребление И. Бернулли (J. Bernulli) в своих «Математических лекциях о методе интегралов и других вопросах» (1691- 1692), явившихся первым систематическим курсом теории дифференциальных уравнений. Само название связано с тем, что тогда казалось, что всякое дифференциальное уравнение любого порядка может быть сведено к одной или нескольким квадратурам, а теория дифференциальных уравнений — лишь раздел интегрального исчисления. Термин решение был введен много позже Лагранжем (Lagrange, 1774), но вошел во всеобщее употребление, главным образом, благодаря Пуанкаре (Poincare).

2.2. Интегрирующий множитель

Эйлер и Клеро систематически исследовали связь между отысканием интегралов дифференциальных уравнений и интегральным исчислением. Связующим звеном оказалось то, что мы теперь называем интегрирующим множителем 1-формы.¹

Как известно из курса Анализа, не всякую форму

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy$$

можно представить как дифференциал некоторой функции. Если рассматриваемая область изменения x и y представляет собой односвязную область на плоскости, то для этого необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Формы, ему удовлетворяющие, называют точными и их можно записать в виде

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = du,$$

¹В отдельных случаях, интегрирующим множителем пользовался еще И. Бернулли в своих «Математических лекциях о методе интегралов и ...» (1691- 1692). Систематическую разработку метода интегрирующего множителя предприняли Эйлер и Клеро, подробное изложение этого метода было дано в «Интегральном исчислении» Эйлера.

причем u можно вычислить как криволинейный интеграл

$$u = \int p dx + q dy.$$

Интегрирующим множителем называют такую функцию x и y , после умножения на которую форма становится точной. Допустим, что для заданной формы

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy$$

нам известен интегрирующий множитель μ , тогда

$$\mu \cdot (pdx + qdy)$$

является полным дифференциалом некоторой функции, то есть

$$\mu \cdot (pdx + qdy) = du.$$

Замечательное наблюдение Эйлера, увязывающее теорию 1-форм и интегрирование дифференциальных уравнений, состоит в том, что потенциал u формы

$$\mu \cdot (pdx + qdy)$$

является интегралом дифференциального уравнения

$$pdx + qdy = 0.$$

В самом деле, пусть $y = f(x)$ — любое решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q},$$

тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{dx}u(x, f(x)) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}f'(x) = \mu p + \mu q f' = \mu(p + q f') = 0.$$

Это означает, что потенциал u принимает постоянные значения на любом решении дифференциального уравнения.

Доказанное утверждение сводит интегрирование дифференциального уравнения $pdx + qdy = 0$ к отысканию интегрирующего множителя формы $pdx + qdy$. Его часто называют интегрирующим множителем не только

формы, но и самого дифференциального уравнения. Зная интегрирующий множитель μ , мы можем написать уравнение интегральных кривых уравнения при помощи квадратуры

$$\int \mu p dx + \mu q dy = C.$$

Пример 2.3. Метод разделения переменных с этой точки зрения можно изложить следующим образом. Дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dx} = X(x)Y(y)$$

соответствует форма

$$dy - X(x)Y(y)dy.$$

Если поделить ее на $Y(y)$, то получится точная форма

$$\frac{dy}{Y(y)} - X(x)dx.$$

В самом общем случае ее потенциал можно отыскать по формуле

$$u = \int \frac{dy}{Y(y)} - X(x)dx.$$

Это и есть выражение для интеграла, который получается в методе разделения переменных.

В частности уравнению

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

отвечает форма

$$dy + \frac{x}{y}dx.$$

После умножения на y , эта форма становится точной

$$ydy + xdx = du,$$

причем для вычисления потенциала можно при желании использовать формулу

$$u = \int ydy + xdx = \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Значит, $x^2 + y^2$ — интеграл исходного уравнения, а окружности $x^2 + y^2 = C$ — его интегральные кривые.

2.3. Отыскание множителей

В XVIII веке это открытие Эйлера не было оценено по заслугам, поскольку Эйлер не указал способ отыскания интегрирующего множителя. Казалось, что угадывание множителя мероприятие ничуть не менее формальное, чем отыскание подстановки. Однако процедуру подборки множителя можно формализовать, а следовательно, и использовать для отыскания множителей на ЭВМ. Эта процедура основана на след. соображении.

Теорема 2.1. Уравнение

$$pdx + qdy = 0$$

допускает интегрирующий множитель, зависящий только от x , в том и только в том случае, когда

$$\frac{1}{q} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right)$$

не зависит от y . Этот множитель можно вычислить по формуле

$$\mu = \exp \left(\int \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) \frac{dx}{q} \right).$$

Доказательство. Уравнение $pdx + qdy = 0$ допускает множитель, который зависит только от x , в том и только в том случае, когда форма

$$\mu(x) \cdot (p(x, y)dx + q(x, y)dy)$$

является точной. Это условие эквивалентно равенству

$$\frac{\partial \mu p}{\partial y} = \frac{\partial \mu q}{\partial x},$$

которое можно переписать как

$$\mu \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial q}{\partial x} + \mu' q$$

или

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{1}{q} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right).$$

Из этого выражение можно найти $\mu(x)$ в том и только в том случае, когда

$$\frac{1}{q} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right)$$

не зависит от y . □

Можно указать еще как минимум два таких типа множителей, что для заданного уравнения всегда можно выяснить, имеет ли оно множитель такого типа или нет. Именно такие множители и искал первый символьный интегратор — **Soldier**, который был написан Дж. Мозесом (Joel Moses) в начале 1960-х годов.²

Алгоритм 2.1 (Soldier). Чтобы проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$$

следует выполнить след. шаги.

- 1) Проверить, не выполняется ли при всех x, y равенство

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x};$$

в этом случае решение дается квадратурой

$$\int p(x, y)dx + q(x, y)dy = C.$$

- 2) Проверить, зависит ли

$$\frac{1}{q} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right)$$

от y ; если не зависит, то интегрирующим множителем служит

$$\mu = \exp \left(\int \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) \frac{dx}{q} \right),$$

а решение дается квадратурой

$$\int \mu(x)p(x, y)dx + \mu(x)q(x, y)dy = C.$$

²Moses, Joel. Symbolic Integration. AI Technical Reports, 1967.

3) Проверить, зависит ли

$$\frac{1}{p} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right)$$

от x ; если не зависит, то интегрирующим множителем служит

$$\mu = \exp \left(\int \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) \frac{dy}{p} \right),$$

а решение дается квадратурой

$$\int \mu(y)p(x, y)dx + \mu(y)q(x, y)dy = C.$$

4) Проверить, не выполняется ли при всех x, y равенство

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y};$$

если оно выполняется, то интегрирующим множителем служит

$$\mu = \frac{1}{p^2 + q^2},$$

а решение дается квадратурой

$$\int \frac{pdx + qdy}{p^2 + q^2} = C.$$

Замечание 2.1. Последний шаг, кажется, несколько экзотическим, в дальнейшем у нас не будет повода его сделать. Тем не менее, нетрудно видеть, что форма

$$\frac{pdx + qdy}{p^2 + q^2}$$

окажется точной в том и только в том случае, когда

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{p}{p^2 + q^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{q}{p^2 + q^2}$$

Вычисляя производные, получим

$$\frac{(q^2 - p^2)p_y - 2pq q_y}{(p^2 + q^2)^2} = \frac{(p^2 - q^2)q_x - 2pq p_x}{(p^2 + q^2)^2}.$$

Для выполнения этого равенства достаточно, чтобы

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y},$$

что и проверяется на 4-м шаге.

Для ускорения вычислений, определим след. дифференциальные операторы:

```
sage: D1=lambda p,q: diff(p,y)-diff(q,x) 17
```

```
sage: D2=lambda p,q: (diff(p,y)-diff(q,x))/q 18
```

```
sage: D3=lambda p,q: (diff(q,x)-diff(p,y))/p 19
```

Задача 2.1. Найдите решения уравнения

$$e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0.$$

Решение. Здесь

```
sage: x,y=var('x,y') 20
```

```
sage: p=exp(-y) 21
```

```
sage: q=-(2*y+x*exp(-y)) 22
```

Поскольку

```
sage: D1(p,q) 23
```

```
0 24
```

равно нулю тождественно, форма является точной. Решение дается формулой

$$\int e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = C;$$

при вычислении интеграла можно схитрить:

$$dxe^{-y} = e^{-y}dx - xe^{-y}dy,$$

поэтому

$$\int dxe^{-y} - 2ydy = C$$

или

$$xe^{-y} - y^2 = C.$$

Проверка:

```
sage: x=var('x') 25
```

```

sage: y=function('y')(x) 26
sage: desolve(exp(-y)-(2*y+x*exp(-y))*diff(y,x)==0,y 27
)
-(e^y(x)*y(x)^2 - x)*e^(-y(x)) == _C 28

```

Задача 2.2. Найдите решения уравнения

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} + 2x^2 = 0.$$

Решение. Здесь

```

sage: x,y=var('x,y') 29
sage: p=y/x+2*x^2 30
sage: q=1 31

```

Идем по пунктам алгоритма.

1. Поскольку

```

sage: D1(p,q) 32
1/x 33

```

не равно нулю тождественно, форма не является точной.

2. Поскольку

```

sage: D2(p,q) 34
1/x 35

```

не зависит от y , множителем будет

$$\mu = \exp \int \frac{dx}{x} = x$$

и решение дается квадратурой

$$\int x dy + (y + 2x^3) dx = C$$

Группируя $x dy + y dx = dxy$, в итоге имеем

$$xy + \frac{1}{2}x^4 = C$$

или

$$y = \frac{C}{x} - \frac{x^3}{2}.$$

Проверка:

```
sage: x=var('x') 36
```

```
sage: y=function('y')(x) 37
```

```
sage: desolve(y/x+2*x^2+diff(y,x)==0,y) 38
```

```
-1/2*(x^4 - 2*_C)/x 39
```

Задача 2.3. Найдите решения уравнения

$$(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0.$$

Решение. Здесь

```
sage: x,y=var('x,y') 40
```

```
sage: p=x^2+y^2+x 41
```

```
sage: q=y 42
```

Идем по пунктам алгоритма.

1. Поскольку

```
sage: D1(p,q) 43
```

```
2*y 44
```

не равно нулю тождественно, форма не является точной.

2. Поскольку

```
sage: D2(p,q) 45
```

```
2 46
```

не зависит от y , множителем будет

$$\mu = \exp \int 2dx = e^{2x}$$

и решение дается квадратурой

$$\int e^{2x}(x^2 + y^2 + x)dx + ye^{2x}dy = C.$$

Поскольку

$$dy^2 e^{2x} = 2y^2 e^{2x} dx + 2ye^{2x} dy,$$

подынтегральное выражение можно переписать как

$$e^{2x}(x^2 + y^2 + x)dx + ye^{2x}dy = (x^2 + x)e^{2x}dx + d\frac{y^2 e^{2x}}{2},$$

следовательно, решением дифференциального уравнения будет

$$\frac{y^2 e^{2x}}{2} + \int (x^2 + x)e^{2x}dx = C$$

или

$$(x^2 + y^2)e^{2x} = C.$$

Проверка:

```
sage: x=var('x') 47
sage: y=function('y')(x) 48
sage: desolve((x^2+y^2+x)+y*diff(y,x)==0,y) 49
1/2*x^2*e^(2*x) + 1/2*e^(2*x)*y(x)^2 == _C 50
```

Описанный алгоритм справляется с интегрированием наиболее распространенных дифференциальных уравнений, в том числе и с теми, которые традиционно решаются иными способами. При тестировании на примерах из задачника Шпигеля³ основные трудности были связаны с вычислением интегралов и упрощением выражений.⁴ Тем не менее несколько типовых примеров именно на определение множителя не удалось ни решить по алгоритму, ни дополнить алгоритм надлежащим образом. Все эти примеры использовали то очевидное для человека обстоятельство, что

$$dxy = ydx + xdy \quad \text{и} \quad y^2 d\frac{y}{x} = ydx - xdy.$$

Поэтому в учебной литературе полагали очевидным, что в этих примерах можно сделать замену.

³Murray R. Spiegel. Applied Differential Equations. Prentice-Hall, 1958.

⁴Moses, Joel. Symbolic Integration. AI Technical Reports, 1967. Pag. 188.

Пример 2.4. Рассмотрим уравнение

$$(x^2 + y^2 + y)dx - xdy = 0.$$

Здесь

`sage: x,y=var('x,y')` 51

`sage: p=x^2+y^2+y` 52

`sage: q=-x` 53

Идем по пунктам алгоритма.

`sage: D1(p,q)` 54

$2*y + 2$ 55

`sage: D2(p,q)` 56

$-2*(y + 1)/x$ 57

`sage: D3(p,q)` 58

$-2*(y + 1)/(x^2 + y^2 + y)$ 59

Четвертый шаг тоже не дает ответа. Не лишне будет заметить, что с этим уравнением не справился бы не только Soldier в 1965 г., но и Sage/Maxima в 2015 г., между тем этот номер предлагается в задачнике [2], № 196, и считается весьма простым. Дело в том, что можно усмотреть в уравнении конструкцию $ydx - xdy$, которую можно преобразовать в $y^2 d\frac{y}{x}$. Эта догадка позволяет переписать уравнение так

$$\left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right) dx + d\frac{x}{y} = 0.$$

Теперь напрашивается замена

$$u = \frac{x}{y},$$

тогда

$$(u^2 + 1)dx + du = 0.$$

В этом уравнении переменные легко делятся и ответ выписывается сразу

$$\int dx + \frac{du}{1 + u^2} = C$$

или

$$x + \arctan \frac{x}{y} = C.$$

Домашнее задание

Примените алгоритм поиска интегрирующего множителя и по возможности решите след. задачи № 186, 190, 205, 136, 139, 145, 149, 161, 163 из задачника А.Ф. Филиппова [2].

Лекция 3.

Замена переменной. Групповой анализ уравнений.

3.1. Замена переменных

Еще в «Математических лекциях о методе интегралов и других вопросах» Иоганна Бернулли были указаны некоторые дифференциальные уравнения, переменные в которых не делятся сразу, но лишь после введения введения новой переменной. Укажем простейшие из них.

3.1.1. $y' = F(ax + by)$

Чтобы решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = F(ax + by)$$

следует ввести новую переменную

$$z = ax + by.$$

Здесь y есть функция от x , поэтому z — тоже функция от x и

$$z' = a + by' = a + bF(ax + by) = a + bF(z).$$

В уравнении

$$z' = a + bF(z)$$

переменные разделяются:

$$\int \frac{dz}{a + bF(z)} = x + C.$$

Пример 3.1.

$$y' = \cos(y - x).$$

Полагая $z = y - x$, получим

$$\int \frac{dz}{\cos z - 1} = x + C.$$

Интеграл берется в элементарных функциях и получается, что

$$\cot \frac{y - x}{2} = x + C.$$

Мы можем нарисовать несколько интегральных кривых при помощи конструкции:

```
sage: x,y=var('x,y') 60
sage: desolve_rk4(cos(y-x), y, ics=[0,1], output=' 61
      plot', end_points=[-5,5], step=0.1)
Graphics object consisting of 1 graphics primitive 62
```

По не вполне понятным причинам эта тривиальная подстановка не была реализована в **Soldier**'е, по еще менее понятным причинам **Sage/Maxima** и в 2015 г. не может решить приведенный выше тривиальный пример.

3.1.2. $y' = F(y/x)$

Чтобы решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

следует ввести новую переменную

$$z = \frac{y}{x}.$$

Здесь y есть функция от x , поэтому z — тоже функция от x и

$$z' = \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{F(z) - z}{x}$$

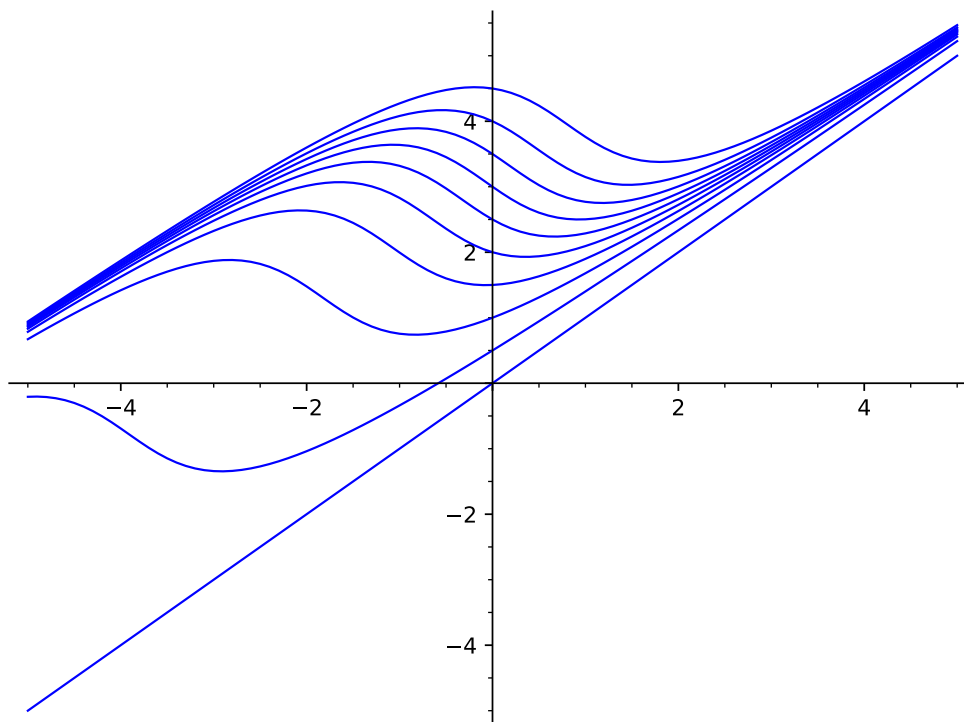


Рис. 3.1. Несколько интегральных кривых уравнения $y' = \cos(y - x)$

В уравнении

$$\frac{dz}{dx} = \frac{F(z) - z}{x}$$

переменные разделяются:

$$\int \frac{dz}{F(z) - z} = \int \frac{dx}{x} + C$$

или

$$\int \frac{dz}{F(z) - z} = \ln x + C$$

Пример 3.2. Уравнение

$$(x^2 + y^2)dx = yxdy$$

можно переписать как

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y},$$

поэтому оно принадлежит к уравнениям рассмотренного типа. Вводя,

$$z = \frac{y}{x},$$

имеем по общей формуле

$$\int \frac{dz}{z + z^{-1} - z} = \ln x + C.$$

В данном случае

$$\int z dz = \ln x + C$$

или

$$\frac{z^2}{2} = \ln x + C.$$

Возвращаясь к старым переменным, имеем

$$y^2 = x^2(\ln x^2 + C).$$

При построении интегральных кривых на $\mathbb{R}^2$, см. рис. 3.2, следует иметь ввиду, что

$$\ln x^2 + C = 0$$

уравнение имеет корни, зависящие от C , при переходе через эти точки решение будет уходить в комплексную область. Напр., при $C = 1$ мы имеем два решения

$$y = \pm x \sqrt{\ln x^2 + 1}.$$

Поскольку

```
sage: solve(ln(x^2)+1==0, x) 63
[ 64
x == -e^(-1/2), 65
x == e^(-1/2) 66
] 67
```

эта формула задает вещественное решение дифференциального уравнения только при

$$|x| > \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Нарисовать интегральные кривые при помощи **rk4** не удастся: возле особой точки, положение которой зависит от начальных данных, решение разваливается, см. рис. 3.3.

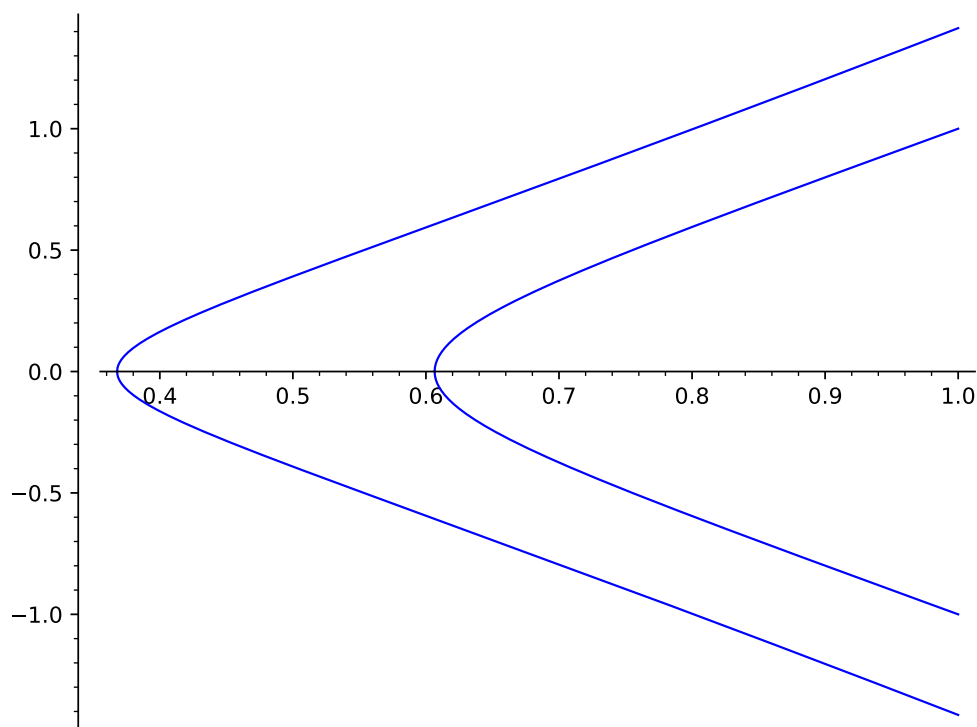


Рис. 3.2. Несколько интегральных кривых уравнения $(x^2 + y^2)dx = yxdy$.

```
sage: x,y=var('x,y') 68
sage: desolve_rk4(y/x+x/y, y, ics=[1,1], output=' 69
      plot', end_points=[0.1,2], step=0.1)
Graphics object consisting of 1 graphics primitive 70
```

3.1.3. Общие замечания о методе подстановки

Изложенные выше примеры наводят на мысль, что и вообще уравнение вида

$$y' = F(u(x, y))$$

всегда решается путем введения подстановки $z = u(x, y)$. Это, однако, не верно.

Пример 3.3. Сделаем в уравнении

$$y = F(xy)$$

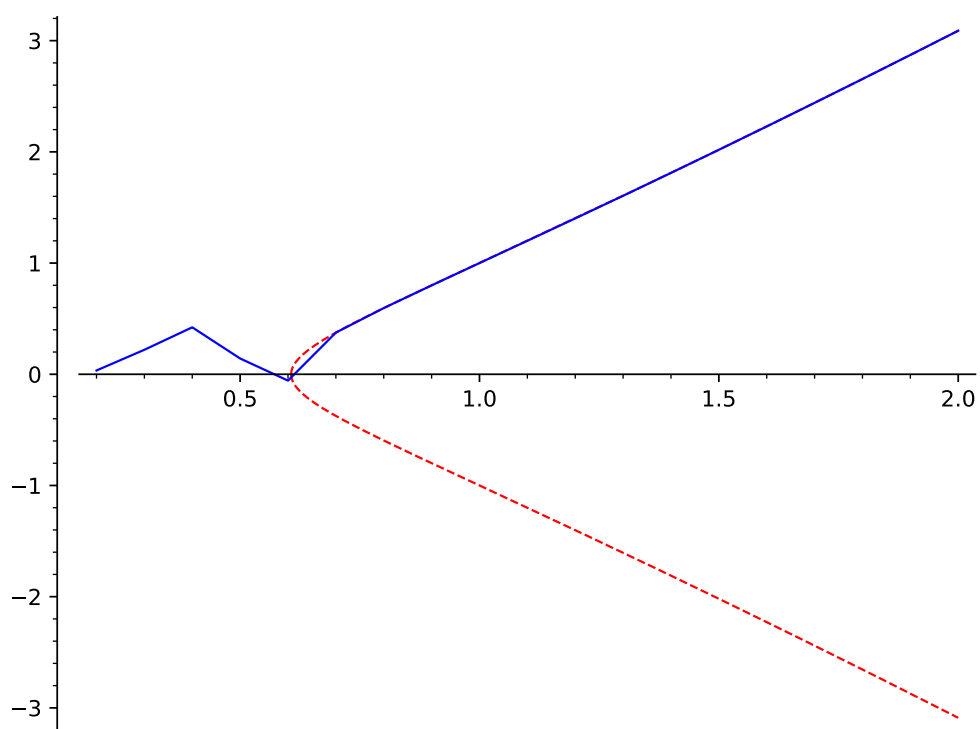


Рис. 3.3. Интегральная кривая уравнения $(x^2 + y^2)dx = yx dy$, вычисленная точно (пунктир) и приближенно.

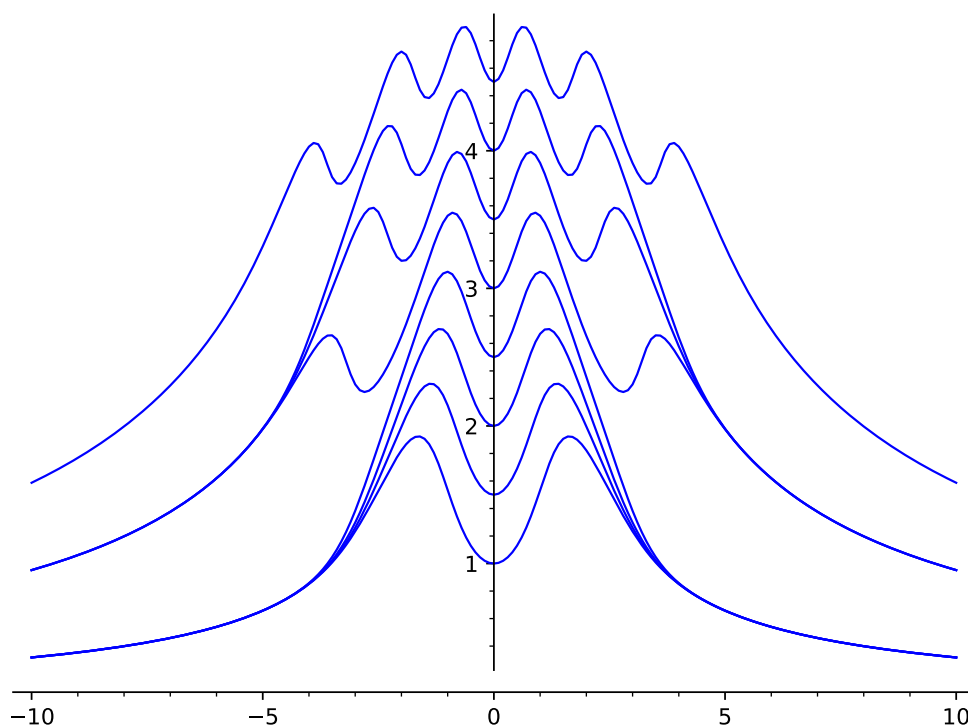


Рис. 3.4. Несколько интегральных кривых уравнения $y' = \sin xy$

подстановку $z = xy$, тогда

$$z' = xy' + y = xF(z) + \frac{z}{x}.$$

Переменные в этом уравнении не делятся. Более того, очень простое на вид уравнение

$$y' = \sin xy$$

не смогут решить не только Sage/maxima, но и Maple, и WolframAlpha.

По-началу отыскание интеграла сводилось к угадыванию подстановки и коллекционированию решенных уравнений, до сих пор в ходу одно такое собрание, составленное в 1942 г. Камке (Erich Kamke, 1890-1961). Еще недавно теория дифференциальных уравнений была не столько наукой, сколько собранием головоломок.

3.1.4. Симметрии и групповой анализ дифференциальных уравнений

Лишь во второй половине XIX века Софус Ли (Marius Sophus Lie, 1842-1899) заметил, что общее свойство проинтегрированных выше уравнений

$$y = F(ax + by) \quad \text{и} \quad y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

не в том, что их правая часть является функцией одной переменной, а в том, что их интегральные кривые подобны. Напр., на рис. 3.1 хорошо видно, что интегральные кривые уравнений

$$y' = \cos(y - x)$$

получаются одна из другой параллельным переносом. На рис. 3.4, напротив, хорошо видно, что интервальные кривые уравнения

$$y' = \sin xy$$

не подобны друг другу.

Говорят, что преобразование плоскости

$$x_1 = \varphi(x_0, y_0), \quad y_1 = \psi(x_0, y_0)$$

является *симметрией* дифференциального уравнения, если оно сохраняет множество интегральных кривых, лишь переставляя его элементы. Более развернуто, если задать произвольную интегральную кривую параметрически как

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad t = a..b$$

то формулы

$$x = \varphi(X(t), Y(t)), \quad y = \psi(X(t), Y(t)), \quad t = a..b$$

задают опять интегральную кривую. Кратко сказанное можно выразить так: если точка (x_0, y_0) пробегает интегральную кривую, то и точка (x_1, y_1) — пробегает интегральную кривую этого же уравнения.

Последовательное применение двух преобразований, переставляющих интегральные кривые, дает преобразование, которое опять переставляет интегральные кривые, то есть является симметрией. Поэтому множество всех симметрий дифференциального уравнения является группой, в которой в качестве умножения используется композиция преобразований. Из-за этого обстоятельства теорию Ли часто называют групповым анализом дифференциальных уравнений. Во времена Ли это обстоятельство казалось весьма важным, поскольку позволяло надеяться сохранить аналогию с теорией Галуа разрешимости алгебраических уравнений.

3.2. Аффинные симметрии

Преобразования плоскости, переводящие прямые линии опять в прямые, называют аффинными. Аналитически любое такое преобразование может быть задано при помощи двух линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + b_1, \\ y_1 = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + b_2, \end{cases}$$

причем определитель

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

3.2.1. $y' = F(ax + by)$

Уравнение вида

$$y' = F(ax + by)$$

имеет аффинную симметрию

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \frac{k}{a}, \\ y_1 = y_0 - \frac{k}{b}, \end{cases}$$

В самом деле, формулы

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad t = 0..1$$

задают интегральную кривую, если

$$\dot{Y} - F(aX + bY)\dot{X} = 0.$$

Но тогда и формулы

$$x = X(t) + \frac{k}{a}, \quad y = Y(t) - \frac{k}{b}, \quad t = 0..1$$

задают интегральную кривую, поскольку

$$\dot{y} - F(ax + by)\dot{x} = \dot{Y} - F(aX + bY)\dot{X} = 0.$$

Пример 3.4. Вернемся к уравнению

$$y' = \cos(y - x)$$

из примера 3.1. Мы утверждаем, что преобразование

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + k, \\ y_1 = y_0 + k, \end{cases}$$

переводит его интегральные кривые

$$\cot \frac{y - x}{2} = x + C$$

опять в интегральные кривые. В самом деле, если (x_0, y_0) пробегает кривую

$$\cot \frac{y_0 - x_0}{2} = x_0 + C,$$

то тогда (x_1, y_1) пробегает кривую

$$\cot \frac{y_1 - x_1}{2} = x_1 + (k + C),$$

которая тоже является интегральной.

Нарисовав одну интервальную кривую, мы можем нарисовать все прочие, применив к исходной кривой преобразования

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + k, \\ y_1 = y_0 + k. \end{cases}$$

Напр., можно найти одно решение задачи Коши методом **rk4**, а все остальные интегральные кривые нарисовать уже без сложных вычислений:

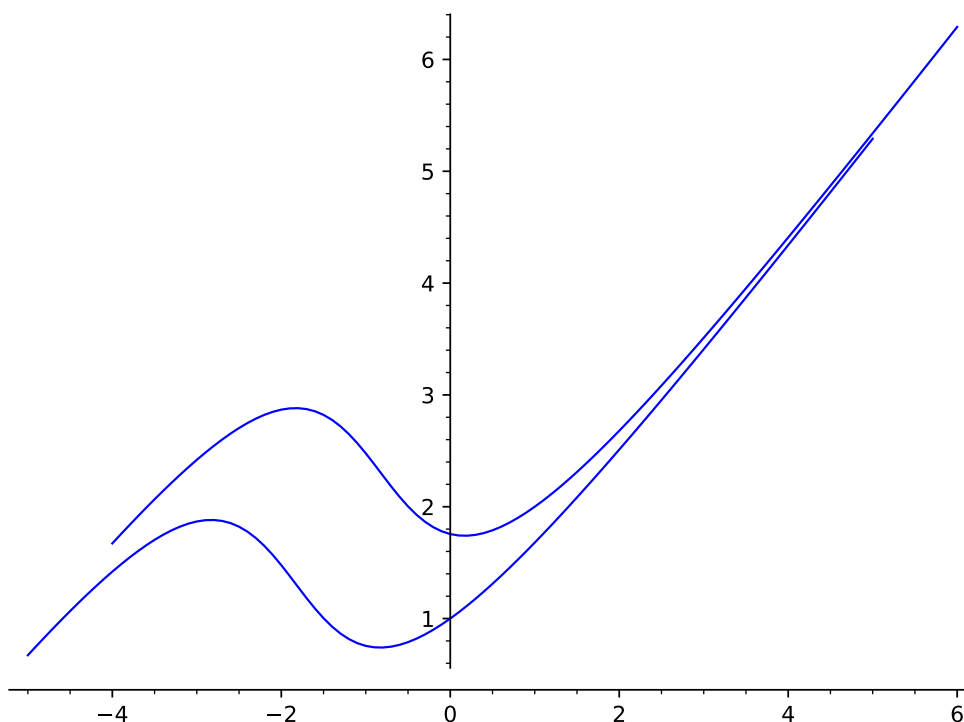


Рис. 3.5. Несколько интегральных кривых уравнения $y' = \cos(y - x)$

```

sage: x,y=var('x,y') 71
sage: p=desolve_rk4(cos(y-x), y, ics=[0,1], 72
    end_points=[-5,5], step=0.1)
sage: N=100 73
sage: k=1 74
sage: q=[(p[n][0]+k,p[n][1]+k) for n in range(N+1)] 75
sage: line(p)+line(q) 76
Graphics object consisting of 2 graphics primitives 77

```

При этом мы получим семейство решений в некоторой полосе между прямыми $y = x$ и $y = x + 2\pi$. Эти прямые тоже являются интегральными линиями, они потерялись при разделении переменных, когда делили на $\cos(y - x)$. Любопытно отметить, что интервальная прямая $y = x$ неподобна остальным интегральным кривым и при преобразованиях симметрии переходит сама в себя.

3.2.2. $y' = F(y/x)$

Уравнение вида

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

имеет аффинную симметрию

$$\begin{cases} x_1 = kx_0, \\ y_1 = ky_0. \end{cases}$$

В самом деле, формулы

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad t = 0..1$$

задают интегральную кривую, если

$$\dot{Y} - F\left(\frac{Y}{X}\right) \dot{X} = 0.$$

Но тогда и формулы

$$x = kX(t), \quad y = kY(t), \quad t = 0..1$$

задают интегральную кривую, поскольку

$$\dot{y} - F\left(\frac{y}{x}\right) \dot{x} = \dot{Y} - F\left(\frac{Y}{X}\right) \dot{X} = 0.$$

В дальнейшем мы будем сокращать эти размышления и говорить просто, что уравнения

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{и} \quad \frac{dky}{dkx} = F\left(\frac{ky}{kx}\right)$$

эквиваленты.

Аффинные преобразования такого вида называют преобразованием подобия с центром в нуле, а функции переменных x и y , которые не меняются при таких преобразованиях — однородными. Всякую однородную функцию можно представить как $F\left(\frac{y}{x}\right)$. Также функции, удовлетворяющие условию

$$F(kx, ky) = k^s F(x, y),$$

называют однородными функциями порядка s или формами порядка s . Дифференциальные уравнения, симметриями которого служит преобразование подобия, называют однородными дифференциальными уравнениями.

Пример 3.5. Уравнение Гамбургера

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

обладает указанной симметрией, преобразование подобия переродит его интегральные кривые

$$x^2 + y^2 = C$$

в интегральные кривые

$$x^2 + y^2 = k^2 C.$$

Небезынтересно заметить, что уравнение Гамбургера имеет и другое семейство симметрий — повороты на любой угол вокруг начала координат.

3.2.3. $y' = \frac{y}{x} F(x^n y)$

Попробуем теперь отыскать дифференциальные уравнения, симметричное относительно все преобразований

$$\begin{cases} x_1 = k^p x_0, \\ y_1 = k^q y_0 \end{cases}$$

в надежде, что и их будет легко проинтегрировать. Начнем с того, что

$$\frac{k^p x dk^q y}{k^q y dk^p x} = \frac{x dy}{y dx}$$

и

$$F(\sqrt[q]{k^q y} / \sqrt[p]{k^p x}) = F(\sqrt[q]{y} / \sqrt[p]{x}).$$

Поэтому уравнение

$$\frac{x dy}{y dx} = F(\sqrt[q]{y} / \sqrt[p]{x})$$

обладает всеми указанными симметриями. Обычно это уравнение записывают несколько в иной форме

$$y' = \frac{y}{x} F(x^n y),$$

приняв $p = -\frac{1}{n}$, а $q = 1$.

Уравнения этого вида решаются предсказываемой подстановкой $z = x^n y$. В самом деле,

$$z' = nx^{n-1}y + x^n y' = nx^{n-1}y + x^{n-1}yF(z) = \frac{nz + zF(z)}{x}.$$

В уравнении

$$z' = \frac{nz + zF(z)}{x}$$

можно разделить переменные:

$$\int \frac{dz}{nz + zF(z)} = \ln x + C.$$

Пример 3.6. Уравнение $(x - x^2 y)y' - y = 0$ можно переписать как

$$y' = \frac{y}{x} \frac{1}{1 - xy}.$$

Это уравнение принадлежит к уравнениям обсуждаемого типа, причем $n = 1$. Значит, подстановкой $z = xy$ оно сводится к квадратуре

$$\int \frac{dz}{z(1 + \frac{1}{1-z})} = \ln x + C.$$

Интеграл без труда берется:

<code>sage: z=var('z')</code>	78
<code>sage: integral(1/(z*(1+1/(1-z))),z)</code>	79
<code>1/2*log(z - 2) + 1/2*log(z)</code>	80

Отсюда

$$\ln(z - 2) + \ln z = \ln x^2 + C$$

или

$$z(z - 2) = Cx^2.$$

Возвращаясь к старым переменным, получим

$$y(xy - 2) = Cx.$$

Когда точка (x_0, y_0) пробегает интегральную кривую

$$y_0(x_0 y_0 - 2) = Cx_0,$$

то точка (x_1, y_1) , связанная с ней соотношениями

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{k}x_0, \\ y_1 = ky_0 \end{cases}$$

пробегает интервальную кривую

$$y_1(x_1 y_1 - 2) = k^2 C x_1.$$

Из одной интегральной кривой можно получить все прочие, за исключением интегральной линии

$$y(xy - 2) = 0,$$

она симметрична сама себе.

Этот метод, являющийся естественным обобщением метода интегрирования однородных уравнений, редко описывается в учебной литературе, но показал себя как весьма эффективное средство в Sodier'е. Он позволяет решить многие уравнения среди первых 365 уравнений Камке, причем сам Камке в ряде случаев предпочитает другие методы решения.¹

Пример 3.7. Камке, I:293, сообщает, что уравнение

$$x(y^2 - 3x)dy + (2y^3 - 5xy)dx = 0,$$

допускает интегрирующий множитель $x^{27}y^{16}$. Soldier не смог бы найти этот множитель, однако сам пример был бы решен подстановкой $u = x^{-1/2}y$.

`sage: y=function('y')(x)`

81

¹Moses, Joel. Symbolic Integration. AI Technical Reports, 1967. Pag. 137.

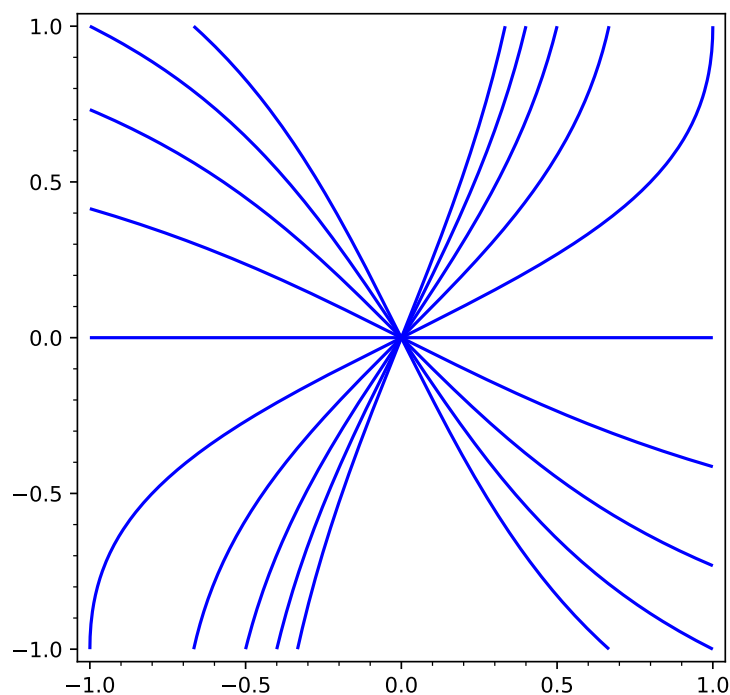


Рис. 3.6. Несколько интегральных кривых уравнения $(x - x^2y)y' - y = 0$

```
sage: desolve(x*(y^2 - 3*x)*diff(y,x)+2*y^3 - 5*x*y      82
      ==0 , y)
x == _C*e^(-3/13*log(y(x)^2/x) + 2/65*log((5*y(x)^2      83
      - 13*x)/x))
```

3.3. Отыскание интегрирующего множителя по известному семейству симметрий

Опишем теперь в общем виде как по известному однопараметрическому семейству симметрий отыскать интегрирующий множитель. Пусть для дифференциального уравнения

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$$

известно семейство симметрий

$$x_1 = \varphi(x_0, y_0, \varepsilon), \quad y_1 = \psi(x_0, y_0, \varepsilon)$$

и путь при $\varepsilon = 0$ мы получаем тождественное преобразование

$$x_1 = x_0, \quad y_1 = y_0.$$

По условию интегральная кривая

$$u(x_0, y_0) = c_0$$

переходит в кривую

$$u(x_1, y_1) = c_1,$$

причем значение c_1 зависит от c_0 и ε . Значит,

$$u(x_1, y_1) = f(u(x_0, y_0), \varepsilon)$$

В силу формулы Тейлора

$$x_1 = x_0 + \xi(x_0, y_0)\varepsilon + \dots \quad y_1 = y_0 + \eta(x_0, y_0)\varepsilon + \dots,$$

поэтому

$$u(x_1, y_1) = u(x_0, y_0) + (u_x\xi + u_y\eta)\varepsilon + \dots = f(u(x_0, y_0), \varepsilon),$$

откуда

$$u_x\xi + u_y\eta = g(u).$$

Остается вспомнить, что

$$\mu(pdx + qdy) = du,$$

откуда

$$\mu(p\xi + q\eta) = u_x\xi + u_y\eta = g(u)$$

Значит,

$$\frac{pdx + qdy}{p\xi + q\eta} = \frac{\mu(pdx + qdy)}{g(u)} = \frac{du}{g(u)} = d \int \frac{du}{g(u)}.$$

Теорема 3.1 (Софуса Ли). Если дифференциальное уравнение

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$$

обладает симметриями

$$x_1 = x_0 + \xi(x_0, y_0)\varepsilon + \dots \quad y_1 = y_0 + \eta(x_0, y_0)\varepsilon + \dots,$$

то оно обладает и интегрирующим множителем

$$\mu = \frac{1}{p\xi + q\eta}.$$

Замечание 3.1. Пару ξ, η называют инфинитезимальным оператором.

Замечание 3.2. Софус Ли, по воспоминаниям его однокашника Ф. Клейна, был идейным противником «теорем существования», будучи студентом берлинского университета отказывался посещать лекции Вейерштрасса, а в своих работах всячески избегал указания на особенности и вырождения. Выше в формулировке теоремы не оговорено, должно ли преобразование задавать взаимно-однозначное соответствие $\mathbb{R}^2$, или достаточно ограничиться какой-нибудь областью и проч. В современных изложениях группового анализа дифференциальных уравнений, напр., у П. Олвера², эту недоговоренность приходится закрывать дополнительными параграфами.

Пример 3.8. Как мы знаем, уравнение

$$\frac{dy}{dx} = F(y/x)$$

имеет семейство симметрий

$$x_1 = (1 + \varepsilon)x_0, \quad y_1 = (1 + \varepsilon)y_0.$$

Здесь

$$\xi(x, y) = x, \quad \eta(x, y) = y,$$

поэтому форма

$$\frac{dy - F(y/x)dx}{y - F(y/x)x}$$

точна, а интегральные кривые даются квадратурой

$$\int \frac{dy - F(y/x)dx}{y - F(y/x)x} = C.$$

²Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир. 1989.

Разумеется, для вычисления удобно перейти к переменным

$$x, t = \frac{y}{x}$$

и тогда

$$\frac{d(tx) - F(t)dx}{tx - F(t)x} = \frac{dt}{1 - F(t)} - \frac{dx}{x}$$

3.4. DETools в Maple

Задача отыскания симметрии в общем случае не проще исходной, однако она все же лучше задачи об отыскании интегрирующего множителя. Последний зависит от формы записи уравнения, поэтому успех применения алгоритма Soldier зависит от того, как было записано уравнение.

Семейство алгоритмов, позволяющих отыскивать симметрии средствами компьютерной алгебры, было разработано недавно, в 1990-х группой под руководством Чеб-Терраб (E.S. Cheb-Terrab) на базе Maple, пакет получил название DETools; на данный момент этот пакет способен вычислить подавляющее большинство примеров собранных в справочнике Камке.³ Основные алгоритмы можно разделить на две группы.

- Алгебраический способ, когда пару ξ, η считают рациональными функциями небольшой степени и определяют их коэффициенты из условия точности формы

$$\frac{pdx + qdy}{p\xi + q\eta}.$$

- Абак, когда пары ξ, η считают неизвестными функциями одной переменной или произведением таких функций. При этом оказывается, что за конечное число действий можно было выяснить, имеет ли заданное дифференциальное уравнение такие симметрии или нет. В качестве

³E.S. Cheb-Terrab. Computer Algebra Solving of First Order ODEs. // Computer physics Communications, 101 (1997). Pag. 254.

таковых используют:

$$\begin{aligned} \{\xi = 0, \eta = f(x)\}, \quad \{\xi = 0, \eta = f(y)\}, \\ \{\xi = f(x), \eta = 0\}, \quad \{\xi = f(y), \eta = 0\}, \end{aligned}$$

затем более сложные

$$\begin{aligned} \{\xi = 0, \eta = f(x)g(y)\}, \quad \{\xi = f(x)g(y), \eta = 0\}, \\ \{\xi = 0, \eta = f(y) + g(x)\}, \quad \{\xi = f(y) + g(x), \eta = 0\} \end{aligned}$$

и т.д.

Пример 3.9. Уравнение

$$x(y + 4)dy = (y^2 + 2y + 2x)dx$$

имеется в справочнике Камке за № 236. Sage/maxima на данный момент (2015 г.) не могут его решить, по крайней мере, без привлечения сторонних пакетов. Отыскание симметрий уравнения в Maple следует подтянуть пакет DETools и воспользоваться функцией `symgen`, которая возвращает пару (ξ, η) . Опция `way` позволяет выбрать алгоритм.

```
| \ ^ / |      Maple 17 (X86 64 LINUX)
._ | \ |      | / | _ . Copyright (c) Maplesoft, (...) 2013
 \  MAPLE   /  All rights reserved. Maple is a trademark of
< ____ ____ > Waterloo Maple Inc.
      |      Type ? for help.
> with(DETools):
> ode[236] := x*(y(x)+4)*(diff(y(x), x))-y(x)^2-2*y(x)-2*x:
> symgen(ode[236], way = 2);
memory used=3.1MB, alloc=32.3MB, time=0.14
      (x - y) (x - 2 y - 4)
[_xi = 0, _eta = -----],
                    y + 4
```

$$[_xi = 0, _eta = - \frac{(y^2 + 4x)(x - y)}{x(y + 4)}]$$

> symgen(ode[236], way = 3);

$$[_xi = x^2 + 4x, _eta = x(y + 4)]$$

> symgen(ode[236], way = 4);

> symgen(ode[236], way = abaco1);

$$[_xi = x^2 + 4x, _eta = x(y + 4)]$$

Все три найденные симметрии даются рациональными функциями, поэтому могут быть найдены число алгебраическим путем. Однако, напр., первая симметрия

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{(x - y)(x - 2y - 4)}{y + 4}$$

не может быть найдена средствами «абака», поскольку η нельзя представить как $f(x) \cdot g(y)$. Зная симметрию

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{(x - y)(x - 2y - 4)}{y + 4},$$

нетрудно решить само дифференциальное уравнение. Множителем служит

$$\mu_1 = \frac{1}{x(x - y)(x - 2y - 4)},$$

форма

$$\frac{(y^2 + 2y + 2x)dx - x(y + 4)dy}{x(x - y)(x - 2y - 4)}$$

является точной, а интегральные кривые даются квадратурой

$$\int \frac{(y^2 + 2y + 2x)dx - x(y + 4)dy}{x(x - y)(x - 2y - 4)} = C.$$

Вторая симметрия

$$\xi = x^2 + 4x, \quad \eta = x(y + 4),$$

дает другой множитель

$$\mu_2 = \frac{1}{(y^2 + 2y + 2x)(x^2 + 4x) - x^2(y + 4)^2}.$$

Однако после упрощений можно выяснить, что оба множителя отличаются на постоянную константу.

```
sage: x,y=var('x,y') 84
sage: mu1=1/(x*(x - y)*(x - 2*y - 4)) 85
sage: mu2=1/((y^2+2*y+2*x)*(x^2 + 4*x)-x^2*(y+4)^2) 86
sage: (mu1/mu2).rational_simplify() 87
2 88
```

Тестирование проводилось разработчиками DETools на задачах из справочника Камке. В этом справочнике собрано 576 уравнений первого порядка, ранее обсуждавшихся в литературе и имеющих, если угодно, большое прикладное значение. После исключения номеров, в которых или не дано решение, или рассматривается слишком общий вид уравнений, получился набор из 552 уравнений, важных для приложений. С большей частью из них DETools справился, при этом во время этой работы выяснилось удивительное обстоятельство: 78% из 552 уравнений, в том числе самые распространенные, имеют симметрии одного и того же вида:

$$\xi = f(x), \quad \eta = p(x)y + q(x).$$

Первооткрыватели называли симметрии из этого класса линейными и указали алгоритм, позволяющий для заданного уравнения, отличного от уравнения Риккати, найти его линейную группу, если таковая существует.⁴

Замечание 3.3. По всей видимости алгоритм abaco1 был доработан и теперь отыскивает и линейные симметрии. В частности в примере 3.9 мы имели

⁴*E.S. Cheb-Terrab, T. Kolokolnikov. First order ODEs, Symmetries and Linear Transformations. // European Journal of Applied Mathematics, Vol. 14, No. 2, pp. 231-246 (2003).*

```
> symgen(ode[236], way = abaco1);
```

$$[\xi = x^2 + 4x, \eta = x(y + 4)]$$

Здесь получается как раз линейная симметрия

$$\xi = f(x), \quad \eta = p(x)y + q(x).$$

Домашнее задание

- 1) Филиппов, № 65.
- 2) Решите однородные уравнения: Филиппов, № 107, 110.
- 3) Для Филиппов, № 115 подберите аффинную симметрию.
- 4) Решите уравнение

$$x(y^2 - 3x)dy + (2y^3 - 5xy)dx = 0,$$

приведенное у Камке, № 293, 1) воспользовавшись интегрирующим множителем $x^{27}y^{16}$ и 2) подстановкой $u = x^{-1/2}y$.

- 5) Для Камке, № 120 в Maple можно найти две симметрии:

```
| \ ^ / |      Maple 17 (X86 64 LINUX)
._ | \ |      | / | _ . Copyright (c) Maplesoft, (...) 2013
 \  MAPLE  /   All rights reserved. Maple is a trademark of
 < _ _ _ _ _ > Waterloo Maple Inc.
      |      Type ? for help.
> with(DETools):
> ode[120] := x*diff(y(x),x)-y(x)*(x*ln(x^2/y(x))+2):
> symgen(ode[120],way=abaco1);
memory used=3.1MB, alloc=32.3MB, time=0.11
```

2 y

$$[_xi = 1, _eta = \frac{y^2}{x}]$$

```
> symgen(ode[120],way=2);
> symgen(ode[120],way=3);
> symgen(ode[120],way=4);
```

$$[_xi = 1, _eta = \frac{y^2}{x}]$$

```
> symgen(ode[120],way=5);
```

$$[_xi = 0, _eta = y \ln(\frac{y^2}{x})]$$

Составьте соответствующие им множители и найдите решение уравнения. Ответ: $y = x^2 \exp(-C/e^x)$.

Лекция 4.

Общее решение дифференциального уравнения как функция константы

4.1. Общее решение

Пусть имеется уравнение

$$f(x, y, C) = 0; \quad (4.1)$$

придавая параметру C различные частные значения, получим уравнения, задающие кривые на плоскости xy . Эти кривые составляют множество, которое называют однопараметрическим семейством кривых, заданным уравнением $f(x, y, C) = 0$. Напр., уравнение

$$x^2 + y^2 = C$$

задает семейство концентрических окружностей.

Если переменные x, y меняются вдоль кривой (4.1), то бесконечно малые приращения dx и dy связаны соотношением

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, C)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, C)dy = 0. \quad (4.2)$$

Исключая из (4.1) и (4.2) параметр C , получим дифференциальное уравнение, связывающее переменные x, y и их дифференциалы dx, dy , скажем

$$g\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Поэтому кривые, принадлежащие одному однопараметрическому семейству, являются интегральными кривыми одного и того же дифференциального уравнения. Способ отыскания этого уравнения называют *исключением постоянной*.

Пример 4.1. Если x, y связаны соотношением

$$x^2 + y^2 = C,$$

то их дифференциалы связаны соотношением

$$x dx + y dy = 0,$$

то есть все кривые семейства

$$x^2 + y^2 = C$$

являются интегральными кривыми уравнения Гамбургера

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Допустим теперь, что для дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y)$$

нам известно однопараметрическое семейство интегральных кривых

$$f(x, y, C) = 0.$$

Тогда любая начальная задача

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y), \quad y|_{x=x_0} = y_0$$

сводится к определению подходящего значения параметра $C = C_0$ из уравнения

$$f(x_0, y_0, C) = 0$$

и выражению y как функции x из уравнения

$$f(x, y, C_0) = 0.$$

Поскольку начальная задача имеет хотя бы локально единственное решение, указанного однопараметрического семейства достаточно для отыскания всех решений дифференциального уравнения.

Гипотеза 4.1. Все интегральные кривые дифференциального уравнения 1-го порядка составляют некоторое однопараметрическое семейство кривых, причем по этому семейству можно восстановить исходное дифференциальное уравнение исключением постоянной.

Переменную y как функцию x и C , с которыми она связана уравнением семейства интегральных кривых

$$f(x, y, C) = 0,$$

называют общим решением дифференциального уравнения. Подставляя вместо параметра C частные значения, мы получим решения дифференциального уравнения, их называют частными решениями дифференциального уравнения.

Пример 4.2. Интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

составляют однопараметрическое семейство

$$x^2 + y^2 = C,$$

поэтому выражение

$$y = \sqrt{C - x^2}$$

является общим решением этого уравнения, а, напр.,

$$y = \sqrt{\pi - x^2}$$

будет его частным решением.

Выбор константы часто оправдан простотой вида уравнения интегральных кривых. Часто в качестве неопределенного параметра выбирают y_0 ,

значение решения при $x = x_0$. В этом случае можно ожидать, что общее решение $y = f(x, y_0)$ зависит от константы y_0 весьма просто. Решая, скажем, методом Эйлера, начальную задачу

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

на отрезке $x_0 < x < x_1$ мы по заданному начальному значению y_0 отыскиваем одно значение y при $x = x_1$; обозначим это конечное значение как y_1 .

Решив обратную задачу

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y|_{x=x_1} = y_1 \end{cases}$$

на отрезке $x_0 < x < x_1$ мы отыщем значение y при $x = x_0$ по конечному известному y_1 . Это заставляет думать, что общее решение

$$y_1 = f(x_1, y_0)$$

задает взаимно-однозначное соответствие между начальным и конечным значениями, между y_0 и y_1 . На самом деле, это не так.

Пример 4.3. Уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

задает связь между y_0 и y_1 , которая дается соотношением

$$x_1^2 + y_1^2 = x_0^2 + y_0^2,$$

отсюда по заданному значению y_0 можно отыскать два значения y_1 и наоборот по заданному значению y_1 — два значения y_0 . Более точно, если для заданного y_0 это уравнение имеет два вещественных корня $y_1 = y_1', y_1''$, то интегральная кривая на плоскости xy проходит через три точки (x_0, y_0) , (x_1, y_1') и (x_1, y_1'') , но лишь две из них можно соединить интегральной кривой вида $y = f(x)$. Если же корни мнимые, то по пути из $x = x_0$ в $x = x_1$ мы приходим в особую точку.

При моделировании прикладных задач, конечно, стремятся использовать уравнения, задающие между начальными и конечными данными взаимно-однозначное соответствие. Поэтому важно познакомиться с основными типами таких уравнений.

4.2. Линейные уравнения

4.2.1. Опознавание линейных дифференциальных уравнений

Простейший тип взаимно-однозначного соответствия — линейное:

$$y_1 = ky_0 + b.$$

Уравнение 1-го порядка, общее решение которого зависит от константы интегрирования линейно, называют линейным дифференциальным уравнением.

Теорема 4.1. Общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка зависит от константы интегрирования линейно:

$$y = C\varphi(x) + \psi(x),$$

в том и только в том случае, когда уравнение имеет форму

$$y' = p(x)y + q(x).$$

Доказательство. (i) Если общее решение дается формулой

$$y = C\varphi(x) + \psi(x),$$

то

$$\frac{dy}{dx} = C\varphi'(x) + \psi'(x)$$

и исключая C из двух последних равенств, имеем

$$\varphi(x)\frac{dy}{dx} - y\varphi'(x) = \varphi\psi' - \psi\varphi'$$

Поэтому линейное уравнение неизбежно имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x), \quad (4.3)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — некоторые функции x .

(ii) Обратно, всякое уравнение вида

$$dy - (py + q)dx = 0,$$

какими бы ни были функциями $p(x)$ и $q(x)$, допускает множитель вида $\mu(x)$, поскольку

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = -p(x)$$

зависит только от x . При этом

$$\mu = e^{\int -p(x)dx}$$

и

$$\int \mu(x)dy - \mu(py + q)dx = C.$$

Это выражение можно преобразовать так

$$\int d\mu(x)y - \mu q dx = C$$

или

$$\mu y = \int \mu q dx + C.$$

Таким образом, общее решение уравнения (4.3) дается формулой

$$y = \frac{1}{\mu} \int \mu q dx + \frac{C}{\mu(x)}.$$

□

4.2.2. Отыскание общего решения заданного линейного дифференциального уравнения

По ходу доказательства мы получили и способ отыскания общего решения заданного дифференциального уравнения

$$y' = py + q.$$

Сначала следует отыскать множитель по формуле

$$\mu = e^{\int -p(x)dx},$$

а затем вычислить общее решение квадратурой

$$y = \frac{1}{\mu} \left(\int \mu q dx + C \right).$$

Пример 4.4. Рассмотрим линейное уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x.$$

Находим множитель:

$$\mu = e^{-\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x},$$

составляем общее решение:

$$y = x \left(\int \frac{x}{x} dx + C \right) = x^2 + Cx.$$

Проверка:

<code>sage: x=var('x')</code>	89
<code>sage: y=function('y')(x)</code>	90
<code>sage: desolve(diff(y,x)==y/x+x,y, show_method=True)</code>	91
<code>[(_C + x)*x, 'linear']</code>	92

4.2.3. Соотношение между тремя частными решениями

При линейных преобразованиях отношение трех точек

$$\frac{y_1 - y_2}{y_2 - y_3}$$

не меняется, поэтому для любых трех частных решений $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ и $y = y_3(x)$ верно

$$\frac{y_1(x) - y_2(x)}{y_2(x) - y_3(x)} = \text{const.}$$

В справедливости этой формулы можно убедиться непосредственным вычислением:

$$y_i(x) = C_i \varphi(x) + \psi(x), \quad i = 1, 2, 3;$$

поэтому

$$y_1 - y_2 = (C_1 - C_2)\varphi(x),$$

$$y_2 - y_3 = (C_2 - C_3)\varphi(x),$$

и отсюда

$$\frac{y_1(x) - y_2(x)}{y_2(x) - y_3(x)} = \frac{C_1 - C_2}{C_2 - C_3}.$$

Пример 4.5. Общее решение линейного уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x$$

дается формулой

$$y = x^2 + Cx.$$

Положим

$$y_1 = x^2, \quad y_2 = x^2 + x, \quad y_3 = x^2 + 2x,$$

тогда

$$\frac{y_1 - y_2}{y_2 - y_3} = \frac{x^2 - x^2 - x}{x^2 + x - x^2 - 2x} = 1.$$

4.2.4. Трансцендентные функции, возникающие при интегрировании линейных уравнений

При интегрировании линейного дифференциального уравнения получаются интегралы, которые, вообще говоря, не берутся в элементарных функциях.

Пример 4.6. `sage: x=var('x')`

`sage: y=function('y')(x)` 94

`sage: desolve(diff(y,x)==x*y+1,y, show_method=True)` 95

`[1/2*(sqrt(2)*sqrt(pi)*erf(1/2*sqrt(2)*x) + 2*_C)*e` 96
`^(1/2*x^2), 'linear']`

Если p и q являются рациональными функциями x , то разность любых двух частных решений уравнения является элементарной функцией. В самом деле, пусть $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ — два частных решения уравнения

$$y' = py + q,$$

то их разность $z = y_2(x) - y_1(x)$ удовлетворяет уравнению

$$z' = pz.$$

Это линейное уравнение без свободного члена q называют однородным линейным уравнением. Его можно решить, разделив переменные

$$\int \frac{dz}{z} = \int p(x)dx + C,$$

откуда

$$y_2(x) - y_1(x) = Ce^{\int p(x)dx}.$$

Интеграл

$$\int p(x)dx$$

в любом случае представляет собой линейную комбинацию рациональной функции x , логарифмов и арктангенсов. Поэтому разность $y_2(x) - y_1(x)$ всегда является элементарной функцией.

Замечание 4.1. Используемый выше интегрирующий множитель

$$\mu = e^{-\int p dx}$$

можно интерпретировать как величину, обратно пропорциональную к решению однородного уравнения $y' = py$.

Через два любых частных решения всегда можно выразить общее решение без всякого интегрирования:

$$y = (y_2(x) - y_1(x))C + y_1(x),$$

поскольку

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = C.$$

Отсюда ясно, что в общем решении

$$y = \varphi(x)C + \psi(x)$$

линейного уравнения

$$y' = p(x)y + q(x)$$

с рациональными p и q коэффициент $\varphi(x)$ при C всегда является элементарной функцией x , а свободный член — частное решение исходного линейного уравнения — может и не быть таковой.

4.3. Уравнение Риккати

4.3.1. Бирациональные соответствия

Следующий по сложности тип взаимно-однозначного соответствия — соответствие, которое дается в обе стороны рациональными функциями и поэтому именуемое бирациональным. Допустим, что y_1 есть рациональная функция y_0 :

$$y_1 = \frac{ay_0^m + \dots + a_m}{by_0^n + \dots b_n}.$$

Из уравнения

$$ay_0^m + \dots + a_m - y_1 \cdot (by_0^n + \dots b_n) = 0$$

можно выразить y_0 как рациональную функцию y_1 в том и только в том случае, когда $n = m = 1$. Поэтому бирациональное соответствие между y_0 и y_1 дается дробно-линейной функцией

$$y_1 = \frac{\alpha y_0 + \beta}{\gamma y_0 + \delta}.$$

Уравнение 1-го порядка, общее решение которого зависит от константы интегрирования дробно-линейно, называют уравнением Риккати.

Замечание 4.2. Строго говоря, преобразование

$$y_1 = \frac{\alpha y_0 + \beta}{\gamma y_0 + \delta}.$$

станет взаимно-однозначным, если добавить к значениям еще и бесконечно удаленную точку: значению $y_0 = -\delta/\gamma$ как раз отвечает $y_1 = \infty$, а $y_0 = \infty$ отвечает $y_1 = \alpha/\gamma$.

4.3.2. Соотношение между тремя частными решениями

При дробно-линейных преобразованиях отношение

$$\frac{y_1 - y_3}{y_3 - y_2} : \frac{y_1 - y_4}{y_4 - y_2},$$

составленное для 4-х произвольных точек не меняется. Его называют ангармоническим отношением и обозначают как

$$(y_1, y_2, y_3, y_4).$$

Отсюда получается, что ангармоническое отношение любых четырех частных решений уравнения Риккати является константой:

$$(y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x)) = \text{const}$$

или, более развернуто,

$$\frac{y_1(x) - y_3(x)}{y_3(x) - y_2(x)} : \frac{y_1(x) - y_4(x)}{y_4(x) - y_2(x)} = \text{const.}$$

Пример 4.7. Общее решение линейного уравнения

$$x \frac{dy}{dx} = (2x + 1)y - y^2 - x^2$$

дается формулой

$$y = x + \frac{x}{x + C}.$$

```
sage: anharmonic= lambda y1,y2,y3,y4: (y1-y3)/(y3-y2  97
    )/((y1-y4)/(y4-y2))
sage: anharmonic(x,x+1,x+x/(x+1),x+x/(x-1)).  98
    rational_simplify()
-1  99
```

Возьмем теперь в качестве одного из решений — общее, тогда

$$\frac{y_1 - y}{y - y_2} : \frac{y_1 - y_3}{y_3 - y_2} = C.$$

или

$$\left(\frac{y_1 - y_2}{y - y_2} - 1 \right) : \frac{y_1 - y_3}{y_3 - y_2} = C.$$

Из этой формулы видно, что

- $z = \frac{y_1 - y}{y - y_2}$ зависит от константы C линейно и однородно: $z = \varphi(x)C$
- $z = \frac{1}{y - y_2}$ зависит от константы C линейно, но неоднородно: $z = \varphi(x)C + \psi(x)$

Отсюда:

- если известно два частных решения уравнения Риккати, то заменой $z = \frac{y_1 - y}{y - y_2}$ оно сводится к линейному однородному уравнению $z' = p(x)z$;
- если известно одно частное решение уравнения Риккати, то заменой $z = \frac{1}{y - y_2}$ оно сводится к линейному уравнению $z' = p(x)z + q(x)$.

4.3.3. Оpozнание уравнений Риккати

Теорема 4.2. Общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка зависит от константы интегрирования дробно-линейно:

$$y = \frac{\alpha(x)C + \beta(x)}{\gamma(x)C + \delta(x)}$$

в том и только в том случае, когда уравнение имеет форму

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x).$$

Замечание 4.3. Формально линейное преобразование — частный случай дробно-линейного, а линейное уравнение $y' = qy + r$ — частный случай уравнения Риккати $y' = py^2 + qy + r$. Однако обычно избегают называть линейное уравнение уравнением Риккати.

Доказательство. (i) Если общее решение дается формулой

$$y = \frac{\alpha(x)C + \beta(x)}{\gamma(x)C + \delta(x)},$$

то и C выражается через y дробно-линейно, то есть

$$C = \frac{f_1(x)y + f_2(x)}{f_3(x)y + f_4(x)}.$$

Продифференцировав это тождество по x , получим дифференциальное уравнение

$$0 = \frac{(f_1y' + f_1'y + f_2')(f_3y + f_4) - (f_3y' + f_3'y + f_4')(f_1y + f_2)}{(f_3y + f_4)^2}$$

или

$$(f_1(f_3y + f_4) - f_3(f_1y + f_2))y' + g_1(x)y^2 + g_2(x)y + g_3(x) = 0$$

или уравнение вида

$$y' = py^2 + qy + r.$$

(ii) Обратно, пусть $y = y_1(x)$ — произвольное частное решение уравнения $y' = py^2 + qy + r$. Если это уравнение и в правду уравнение Риккати, то заменой

$$z = \frac{1}{y - y_1(x)}$$

оно сводится к линейному. Но это можно проверить прямым вычислением: переменная $u = y - y_1$ удовлетворяет уравнению

$$u' + y_1' = p(u + y_1)^2 + q(u + y_1) + r$$

или

$$u' = pu^2 + (2py_1 + q)u.$$

Полагая $z = u^{-1}$, видим

$$z' = -u'/u^2 = -p - (2py_1 + q)z.$$

Таким образом, $z = (y - y_1(x))^{-1}$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению и, следовательно,

$$z = (y - y_1(x))^{-1} = \varphi(x)C + \psi(x).$$

Отсюда видно, что

$$y = y_1(x) + \frac{1}{\varphi(x)C + \psi(x)},$$

то есть y является дробно-линейной функцией C . □

4.3.4. Отыскание общего решения заданного уравнения Риккати

Если задано уравнение Риккати

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

и одно его частное решение $y = y_1(x)$, то заменой

$$z = \frac{1}{y - y_1(x)}$$

это уравнение сводится к линейному, которое всегда можно проинтегрировать при помощи двух квадратур.

Пример 4.8. Уравнение Риккати

$$x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4$$

имеет частное решение вида

$$y = \frac{a}{x}.$$

Для подбора константы имеем

$$-a + a + a^2 = 4,$$

откуда

$$a = \pm 2.$$

Полагая

$$y = \frac{2}{x} + \frac{1}{z},$$

имеем

$$\frac{4 - xy - x^2 y^2}{x^2} = -\frac{2}{x^2} - \frac{z'}{z^2}$$

или

$$\frac{6}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2 = -\frac{z'}{z^2}$$

Подставляя сюда

$$y = \frac{2}{x} + \frac{1}{z},$$

получим

$$\frac{6}{x^2} - \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{xz} \right) - \left(\frac{4}{x^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{4}{xz} \right) = -\frac{z'}{z^2}$$

или, после упрощений

$$-\frac{5}{xz} - \frac{1}{z^2} = -\frac{z'}{z^2}$$

В итоге, для z получается линейное уравнение

$$z' = \frac{5z}{x} + 1.$$

Это уравнение легко решить:

`sage: z=function('z')(x)` 100

`sage: desolve(diff(z,x)==5*z/x +1,z)` 101

`1/4*(4*_C - 1/x^4)*x^5` 102

Таким образом,

$$z = Cx^5 - \frac{x}{4}$$

и

$$y = \frac{2}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{x} + \frac{4}{Cx^5 - x}.$$

Если известно два решения, то можно сразу свести решение к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 4.9. Уравнение Риккати

$$x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$$

имеет два частных решения вида

$$y = \frac{a}{x}.$$

Для подбора константы имеем

$$-a + a + a^2 = 4,$$

откуда

$$a = \pm 2.$$

Подстановка

$$z = \frac{2/x - y}{y + 2/x} = \frac{2 - xy}{2 + xy}$$

должна привести к линейному однородному уравнению.

```
sage: z=function('z')(x) 103
```

```
sage: y = -2*(z - 1)/(x*z + x) 104
```

```
sage: (x^2*diff(y,x)+ x*y+x^2*y^2-4) . 105
```

```
    rational_simplify()
```

```
-4*(x*diff(z(x), x) + 4*z(x))/(z(x)^2 + 2*z(x) + 1) 106
```

Отсюда ясно, что таковым будет

$$xz' + 4z = 0,$$

общим решением которого служит

$$z = C/x^4.$$

Ответ:

$$\frac{2 - xy}{2 + xy} = \frac{C}{x^4}.$$

4.3.5. Трансцендентные функции, возникающие при интегрировании уравнения Риккати

Впервые с уравнением рассматриваемого типа столкнулся Яков Бернулли в 1697 году, он отписал Лейбницу, что совершил множество безуспешных попыток решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + x^2.$$

Многие пытались угадать его частное решение и тем самым свести к линейному, пока в 1830-х Лиувилль не доказал тщетность этих попыток: решения этого уравнения не выражаются при помощи элементарных функций и любого числа квадратур.¹ Таким образом, в общем случае уравнение

¹Теоремы, доказанные тогда Лиувиллем, критически рассмотрены *Ватсоном Г.* в гл. IV его «Теории бесселевых функций». С современной точки зрения эти теоремы принадлежат дифференциальной алгебре, о ней см.: *Капланский И.* Введение в дифференциальную алгебру. М.: ИЛ, 1959.

Риккати вводит одну трансцендентную функцию, которую не удастся выразить обычным способом, вторая трансцендентная функция — выражается при помощи двух интегралов (решение линейного уравнения), третья — при помощи одной квадратуры.

4.3.6. Задача о падении тела в среде с сопротивлением

Рассмотрим падение тела массы m вертикально вниз в среде с сопротивлением. Если направить ось Ox вертикально вниз и обозначить скорость тела $\dot{x} = v$, то закон Ньютона дает

$$\dot{v} = g - f(v);$$

здесь $f(v)$ — сила, описывающая сопротивление воздуха. В курсе механике в качестве таковой берут обычно kv или kv^2 не столько из механических, сколько из чисто математических соображений. В первом случае получается линейное уравнение и поэтому

$$v = a(t) + b(t)v_0,$$

а во втором — уравнение Риккати и поэтому

$$v = \frac{a(t) + b(t)v_0}{c(t) + d(t)v_0}.$$

При любой другой зависимости силы от скорости получилось бы общее решение, зависящее от v_0 нерациональным образом.

Небезынтересно отметить, что уравнение

$$\dot{v} = g - kv^2$$

можно дорешать до конца в элементарных функциях. В самом деле, мы имеем

$$\int \frac{dv}{g - kv^2} = \int dt$$

или

$$-\frac{1}{2\sqrt{gk}} \ln \frac{kv - \sqrt{gk}}{kv + \sqrt{gk}} = t + C$$

или

$$\frac{kv - \sqrt{gk}}{kv + \sqrt{gk}} = Ce^{-2\sqrt{gk}t}.$$

Если обозначить скорость при $t = 0$ как v_0 , тогда константа легко выразится через нее:

$$C = \frac{kv_0 - \sqrt{gk}}{kv_0 + \sqrt{gk}}$$

Разумеется, скорость, оказывается дробно-линейной функцией константы:

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}} \frac{1 + Ce^{-2\sqrt{gk}t}}{1 - Ce^{-2\sqrt{gk}t}}$$

С ростом $t \rightarrow +\infty$ эта величина монотонно стремится к предельной скорости

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}},$$

величина которой не зависит от начальных данных (то есть C).

Зная зависимость скорости от t нетрудно найти закон движения тела, записав квадратуру

$$x = \int v dt = \sqrt{\frac{g}{k}} \int \frac{1 + Ce^{-2\sqrt{gk}t}}{1 - Ce^{-2\sqrt{gk}t}} dt$$

Подынтегральная функция является рациональной функцией e^{at} , поэтому интеграл берется в элементарных функциях. В данном случае удобно преобразовать интеграл как

$$\int \frac{1 - Ce^{-2\sqrt{gk}t}}{1 - Ce^{-2\sqrt{gk}t}} dt + \int \frac{2Ce^{-2\sqrt{gk}t}}{1 - Ce^{-2\sqrt{gk}t}} dt = t - \frac{1}{\sqrt{gk}} \int \frac{du}{1 - u}.$$

В итоге,

$$x = \sqrt{\frac{g}{k}} t - \frac{1}{k} \ln \frac{1 - Ce^{-2\sqrt{gk}t}}{1 - C} + x_0.$$

Небезынтересно отметить, что x не является рациональной функцией x_0 и v_0 .

4.4. Уравнение Бернулли

Если общее решение зависит от константы алгебраически, то его алгебраической заменой можно свести к уравнению Риккати.²

Мы ограничимся здесь рассмотрением одного такого уравнения, именно,

$$\frac{dy}{dx} = Py + Qy^n,$$

где P и Q — функции x . Это уравнение было предложено Я. Бернулли в 1695, и сведено к линейному уравнению И. Бернулли³. Поэтому теперь уравнения такого типа носят название *уравнений Бернулли*.

Сведение к линейному уравнению можно провести так. Умножим все уравнение на y^{-n} , получаем

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} = Py^{1-n} + Q$$

Положив

$$y^{1-n} = z$$

и замечая, что

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx},$$

представим данное уравнение в виде:

$$Pz + Q = \frac{dz}{dx} \frac{1}{1-n}$$

Для переменной z имеем однородное уравнение.

Пример 4.10. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^2 y^2;$$

это уравнение Бернулли с $n = 2$. Полагаем

$$y^{-1} = z,$$

²*Painlevé P.* Memoire sur les equations differentielles du premier ordre // Œuvres. T. 2. Paris, 1974. Pag. 237-461.

³Acta Eroditorum, март 1697

делим на y^2 :

$$-\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} + x^2$$

— линейное уравнение. Множитель равен

$$\mu = e^{\int \frac{dx}{x}} = x,$$

а общее решение линейного уравнения

$$xy = - \int x^3 dx = -\frac{x^4}{4} + C,$$

следовательно,

$$z = -\frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}, \quad y = \frac{1}{-\frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}} = \frac{4x}{4c - x^4}.$$

Проверим:

```
sage: x=var('x') 107
sage: y=function('y')(x) 108
sage: desolve(diff(y,x)==y/x+x^2*y^2,y,show_method= 109
      True)
[-1/4*(x^4*y(x) + 4*x)/y(x) == _C, 'exact'] 110
```

И по ответу, и по комментарию `exact` понятно, что Sage решил это уравнение другим способом.

Домашнее задание

Задачи: [2], № 136, 141, 151, 157, 168, 171. Обратите внимание, что здесь требуется найти все решения, в т.ч. которые теряются при делении на функцию от x, y .

Часть II

Уравнения второго порядка

Лекция 5.

Дифференциальные уравнения 2-го порядка. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

5.1. Дифференциальные уравнения 2-го порядка и метод конечных разностей

Уравнение, которое задает связь между x , функцией этой переменной и ее первой и второй производной, называют уравнением 2-го порядка. В общем случае, такое уравнение можно записать так

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Обычно имеют дело с уравнениями, разрешенными относительно старшей производной

$$y'' = f(x, y, y').$$

Уравнения этого типа решаются приближенно методом конечных разностей. Пусть x — независимая переменная принимает значения на отрезке $[a, b]$, а y — функция переменной x , удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Разделим отрезок $[a, b]$ на N частей так, чтобы

$$\Delta x = \frac{b - a}{N}$$

и перенумеруем границы этого разбиения от a к b

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + \Delta x, x_2 = x_0 + 2\Delta x, \dots x_N = x_0 + N\Delta x = b.$$

Приближенные значения функции y в этих точках обозначим как $y_0, \dots, y_N$. Производная в точке x_i приближенно равна

$$\frac{dy}{dx} \simeq \frac{\Delta y_i}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x},$$

а вторая производная равна

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \simeq \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{\Delta y_{i+1} - \Delta y_i}{\Delta x^2} = \frac{y_{i+2} + y_i - 2y_{i+1}}{\Delta x^2}.$$

Поэтому дифференциальное уравнение можно заменить на алгебраическое

$$\frac{y_{i+2} + y_i - 2y_{i+1}}{\Delta x^2} = f \left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \right)$$

или

$$y_{i+2} = 2y_{i+1} - y_i + f \left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \right) \Delta x^2.$$

Зная y_0 и y_1 , можно вычислить все остальные значения y . Величина y_0 — это значение функции y в начальной точке $x = a$. Вместо y_1 обычно используют

$$\frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = y'_0,$$

то есть примерно производную y в начальной точке $x = a$.

Гипотеза 5.1. Имеется одна единственная функция y от x , которая удовлетворяет заданному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f \left(x, y, \frac{dy}{dx} \right)$$

и двум начальным условиям:

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = y'_0.$$

Это решение можно приближенно вычислить методом конечных разностей.

Утверждение о существовании и единственности решения начальной задачи называют опять теоремой Коши, а решение, зависящее от двух произвольных констант, называется общим решением. Более общо, мы будем предполагать, что интегрирование дифференциального уравнения n -го порядка всегда вводит n констант, а n -параметрическое семейство решений называть общим решением дифференциального уравнения.

Пример 5.1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

на отрезке $[0, 2\pi]$ с начальными условиями

$$y|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 1.$$

Решение этого уравнения нетрудно угадать — это $y = \sin x$. Сравним его с тем, что дает метод конечных разностей. В первых двух точках

$$y_0 = 0, \quad y_1 = \Delta x,$$

а дальше

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n(1 + \Delta x^2).$$

```

sage: N=500 111
sage: dx=(2*pi/N).n() 112
sage: P = [[0,0],[dx,dx]] 113
sage: for n in range(0,N): P.append([P[n+1][0]+dx 114
    ,2*P[n+1][1]-P[n][1]*(1+dx^2)])
sage: line(P)+plot(sin,(0,2*pi),color='red') 115
Graphics object consisting of 2 graphics primitives 116

```

5.2. Уравнение колебаний пружинного маятника

1. Рассмотрим точку массы m , прикрепленную к пружине жесткости k . В надлежащем образом выбранной системе координат 2-ой закон Ньютона

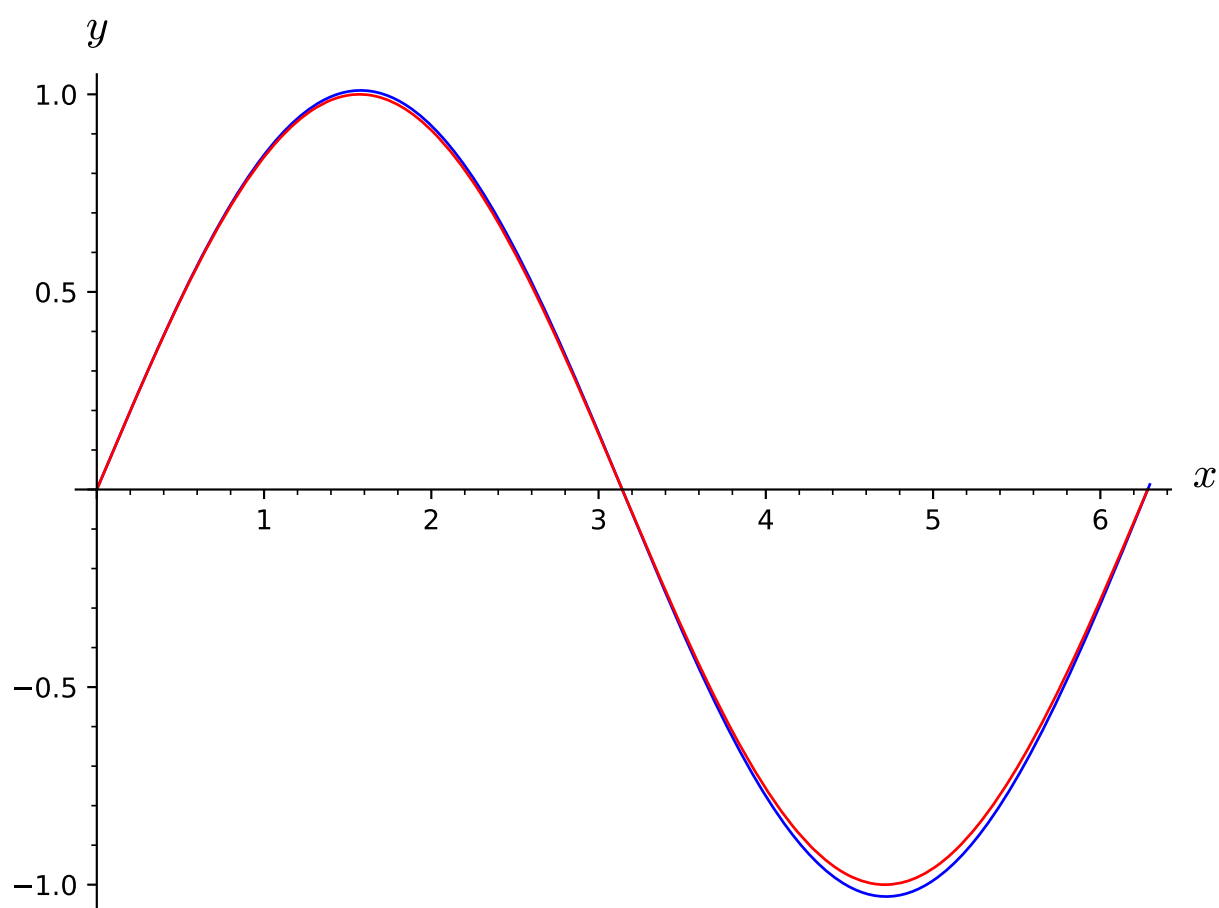


Рис. 5.1. Решение начальной задачи из примера 5.1 методом Эйлера и ее точное решение (красный).

для этой точки записывается так

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Таким образом, движение тела описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Подобрать пару частных решений этого уравнения не трудно:

$$x = \sin \omega t, \quad x = \cos \omega t.$$

В дифференциальное уравнение является линейным и однородным относительно x и ее производных. Поэтому линейная комбинация любых его частных решений тоже является решением. Итак, общим решением исходного уравнения будет

$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t,$$

где A и B — произвольные константы. Других решений не будет, поскольку для задачи Коши всегда можно отыскать решение в этом семействе.

В самом деле, пусть в начальный момент времени точка имела положение x_0 и скорость v_0 , то есть

$$x|_{t=0} = x_0, \quad \dot{x}|_{t=0} = v_0,$$

тогда

$$\begin{cases} B = x_0 \\ \omega A = v_0 \end{cases}$$

В итоге получается след. решение задачи Коши:

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Точка m колеблется с частотой $\omega = \sqrt{k/m}$ и амплитудой

$$\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2 k}{m}}.$$

2. Добавим теперь сопротивление воздуха, которое будем считать пропорциональным скорости тела:

$$m\ddot{x} = -kx - f\dot{x}$$

или

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2x = 0.$$

Здесь δ/ω можно считать малой величиной. Попробуем подобрать пару частных решений вида

$$x = e^{\lambda t}.$$

Подставив это выражение в дифференциальное уравнение, получим квадратное уравнение для отыскания параметра λ , именно

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0.$$

Два корня этого уравнения дают два частных решения, из которых опять можно составить общее решение

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}.$$

Если в начальный момент времени точка имела положение x_0 и скорость v_0 :

$$x|_{t=0} = x_0, \quad \dot{x}|_{t=0} = v_0,$$

тогда

$$\begin{cases} A + B = x_0 \\ \lambda_1 A + \lambda_2 B = v_0 \end{cases}$$

откуда

$$A = \frac{-\lambda_2 x_0 + v_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad B = \frac{\lambda_1 x_0 - v_0}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

В итоге получается след. решение задачи Коши:

$$x = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} x_0 + \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} v_0. \quad (5.1)$$

Необычно то, что оба корня квадратного уравнения — комплексные. В самом деле, дискриминант

$$4(\delta^2 - \omega^2) < 0$$

при малых δ , а корни

$$\lambda_{12} = -\delta \pm \sqrt{\omega^2 - \delta^2}i = -\delta \pm \omega i \sqrt{1 - \delta^2/\omega^2} = -\delta \pm \omega i \left(1 + \frac{\delta^2}{2\omega^2} + \dots\right)$$

Поэтому

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 2i\sqrt{\omega^2 - \delta^2}$$

и

$$x = \frac{(-\delta + i\sqrt{\omega^2 - \delta^2})e^{-\sqrt{\omega^2 - \delta^2}it} - (-\delta - i\sqrt{\omega^2 - \delta^2})e^{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}it}}{2i\sqrt{\omega^2 - \delta^2}}e^{-\delta t}x_0 + \frac{e^{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}it} - e^{-\sqrt{\omega^2 - \delta^2}it}}{2i\sqrt{\omega^2 - \delta^2}}e^{-\delta t}v_0.$$

Отсюда по формуле Эйлера

$$x = e^{-\delta t} \left(x_0 \cos(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}t) + \frac{v_0 + \delta x_0}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}} \sin(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}t) \right).$$

Сопротивление среды приводит к тому, что амплитуда колебаний экспоненциально убывает.

Пример 5.2. `sage: t=var('t')`

`sage: x=function('x')(t)` 118

`sage: desolve(diff(x,t,2)+2*0.1*diff(x,t)+x==0,x,` 119

`ivar=t,ics=[0,1,2])`

`1/11*(7*sqrt(11)*sin(3/10*sqrt(11)*t) + 11*cos(3/10*sqrt(11)*t))*e^(-1/10*t)` 120

3. Добавим теперь периодически меняющуюся внешнюю силу, понуждающую к колебаниям с частотой $\omega_e \neq \omega$, напр.,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f \sin \omega_e t.$$

Вынуждающая сила $y = f \sin \omega_e t$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{y} + \omega_e^2 y = 0,$$

поэтому

$$\frac{d^2(\ddot{x} + \omega^2 x)}{dt^2} + \omega_e^2(\ddot{x} + \omega^2 x) = 0$$

или

$$\ddot{\ddot{x}} + (\omega^2 + \omega_e^2)\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Это — уравнение 4-го порядка, линейное и однородное относительно x и его производных.

Решить однородное уравнение не трудно. Подстановка

$$x = e^{\lambda t}$$

в уравнение 4-го порядка дает биквадратное уравнение

$$\lambda^4 + (\omega^2 + \omega_e^2)\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

или

$$(\lambda^2 + \omega^2)(\lambda^2 + \omega_e^2) = 0.$$

Отсюда получает общее решение уравнения 4-го порядка:

$$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} + C_3 e^{i\omega_e t} + C_4 e^{-i\omega_e t}.$$

Всякое решение исходного уравнения 2-го порядка является решением этого уравнения, но не всякое решение этого уравнения является решением исходного. Поэтому подставляя это выражение в исходное уравнение, мы должны получить два условия на четыре константы. Так и есть:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = C_3(\omega^2 - \omega_e^2)e^{i\omega_e t} + C_4(\omega^2 - \omega_e^2)e^{-i\omega_e t} = f \sin \omega_e t.$$

По формуле Эйлера

$$f \sin \omega_e t = \frac{f}{2i} (e^{i\omega_e t} - e^{-i\omega_e t}),$$

что позволяет однозначно определить C_3 и C_4 . Но для нас важно лишь то, что

$$C_3 e^{i\omega_e t} + C_4 e^{-i\omega_e t} = \frac{f}{\omega^2 - \omega_e^2} \sin \omega_e t.$$

Поэтому среди решений уравнения 4-го порядка исходному уравнению 2-го порядка удовлетворяют лишь след.

$$x = \frac{f}{\omega^2 - \omega_e^2} \sin \omega_e t + C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}.$$

Применяя формулу Эйлера мы можем переписать это общее решение так:

$$x = \frac{f}{\omega^2 - \omega_e^2} \sin \omega_e t + A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Константы A и B определим из начальных условий:

$$\begin{cases} A = x_0 \\ \frac{f\omega_e}{\omega^2 - \omega_e^2} + B\omega = v_0, \end{cases}$$

поэтому

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{f}{\omega^2 - \omega_e^2} \left(\sin \omega_e t - \frac{\omega_e}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (5.2)$$

Движение тела m складывается из колебаний с собственной частотой и частотой вынуждающей силы.

Пример 5.3. `sage: t=var('t')`

`sage: x=function('x')(t)` 122

`sage: desolve(diff(x,t,2)+x==sin(2*t),x,ivar=t,ics` 123
`= [0,1,2])`

`cos(t) - 1/3*sin(2*t) + 8/3*sin(t)` 124

4. Если частота вынуждающей силы $\omega_e = \omega$, изложенный выше способ не годится: для вспомогательного уравнения 4-го порядка нельзя отыскать четыре решения вида $e^{\lambda t}$. Это и не удивительно, в рассматриваемом случае вынуждающая сила попадает в резонанс, поэтому амплитуда колебаний должна расти с ростом t . Выписать решение в случае резонанса не трудно,

поскольку в формуле (5.2) можно перейти к пределу $\omega_e \rightarrow \omega$ по правилу Лопиталя:

$$\lim_{\omega_e \rightarrow \omega} \frac{\omega \sin \omega_e t - \omega_e \sin \omega t}{\omega(\omega^2 - \omega_e^2)} = \lim_{\omega_e \rightarrow \omega} \frac{\omega t \cos \omega_e t - \sin \omega t}{-2\omega_e \omega} = \frac{\sin \omega t - \omega t \cos \omega t}{2\omega^2}$$

Отсюда

$$x = \left(x_0 - \frac{f}{2\omega} t \right) \cos \omega t + \frac{2\omega v_0 + f}{2\omega^2} \sin \omega t.$$

При больших t решение ведет себя как

$$x \simeq -\frac{f}{2\omega} t \cos \omega t,$$

то есть при резонансе амплитуда колебаний растет как первая степень t .

Утверждение о том, что предел решения при $\omega_e \neq \omega$ дает решение задачи при $\omega_e = \omega$, называют принципом непрерывности. В данном случае в его справедливости можно убедиться непосредственной подстановкой найденного решения в уравнение и начальные условия:

```
sage: t,x0,v0,f,omega=var('t,x0,v0,f,omega') 125
```

```
sage: x=(x0-f*t/(2*omega))*cos(omega*t) + (2*omega* 126
      v0+f)/(2*omega^2)*sin(omega*t)
```

```
sage: x.subs(t=0) 127
```

```
x0 128
```

```
sage: diff(x,t).subs(t=0).full_simplify() 129
```

```
v0 130
```

```
sage: (diff(x,t,2)+omega^2*x-f*sin(omega*t)). 131
      full_simplify()
```

```
0 132
```

Пример 5.4. sage: t=var('t')

```
sage: x=function('x')(t) 134
```

```
sage: desolve(diff(x,t,2)+x==sin(t),x,ivar=t,ics 135
      =[0,1,2])
```

```
-1/2*t*cos(t) + cos(t) + 5/2*sin(t) 136
```


5.3. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть $\mathbb{F}$ — множество всех гладких функций переменной x , определенных на некотором отрезке вещественной оси. Мы будем рассматривать эти функции как линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Дифференцирование $D = \frac{d}{dx}$ ставящее в соответствие функции ее производную, является линейным оператором, равно как и оператор умножения на число a . Важно заметить, что

$$aD = Da,$$

поскольку

$$a \frac{df(x)}{dx} = \frac{da f(x)}{dx}.$$

Сложение и умножение позволяет составить из оператора D и чисел всевозможные многочлены. При алгебраических преобразованиях с оператором D можно обращаться как с обычной независимой переменной.

Пример 5.5.

$$(D + 1)(D - 1) = D^2 - 1,$$

поскольку

$$(D + 1)(D - 1)y = (D + 1)(y' - y) = y'' - y' + y' - y = y'' - y = (D^2 - 1)y.$$

Замечание 5.1. Два оператора A и B называют равными, если для всех функций f верно

$$Af = Bf.$$

Всякому многочлену p кольца многочленов $\mathbb{C}[\lambda]$ поставим в соответствие оператор $p(D)$, множество всех таких операторов образует кольцо $\mathbb{C}[D]$. Двум различным многочленам p_1 и p_2 из $\mathbb{C}[\lambda]$ соответствуют неравные операторы $p_1(D)$ и $p_2(D)$, то есть соответствие взаимно-однозначное. В самом деле, в противном случае многочлену

$$q = p_1 - p_2 = a\lambda^n + \dots + b$$

отвечал бы оператор

$$q(D) = aD^n + \dots + b = 0.$$

Это равенство означает, что любая функция является решением дифференциального уравнения

$$(aD^n + \dots + b)y = 0.$$

Это невозможно, поскольку, напр., $y = e^{\lambda t}$ не является его решением, если

$$a\lambda^n + \dots b \neq 0.$$

Следует также заметить, что это построенное отображение $\mathbb{C}[\lambda]$ на $\mathbb{C}[D]$ сохраняет арифметические действия, напр., из $p = qr$ следует, что $p(D) = q(D)r(D)$. В Высшей алгебре такого рода взаимно-однозначные соответствия между кольцами называют изоморфизмами.

Пусть $p(D)$ — какой-нибудь многочлен от D , тогда уравнение

$$p(D)y = 0$$

или

$$y^{(n)} + \dots + a_n y = 0$$

называют однородным линейным дифференциальным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами.

Если уравнение

$$p(\lambda) = 0$$

имеет n различных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то дифференциальное уравнение можно факторизовать:

$$(D - \lambda_1) \dots (D - \lambda_n)y = 0.$$

Здесь множители можно переставлять местами и расставлять скобки любым способом. Напр., так

$$(D - \lambda_1) \dots ((D - \lambda_n)y) = 0.$$

Уравнение

$$(D - \lambda_n)y = 0$$

или

$$y' = \lambda_n y$$

имеет своим решением $y = e^{\lambda_n x}$. Переставляя местами линейные множители, мы получим n частных решений однородного уравнения

$$e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}.$$

Поскольку уравнение однородное, их линейная комбинация

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

тоже будет его решением. Константы $C_1, \dots, C_n$ всегда можно подобрать так, чтобы отыскать единственное решение задачи Коши

$$p(D)y = 0, \quad y|_{x=x_0} = y_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}.$$

В самом деле, начальные условия дают систему линейных уравнений для отыскания $C_1, \dots, C_n$:

$$\begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x_0} + \dots + C_n e^{\lambda_n x_0} = y_0, \\ C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x_0} + \dots + C_n \lambda_n e^{\lambda_n x_0} = y'_0, \\ \dots C_1 \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x_0} + \dots + C_n \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x_0} = y_0^{(n-1)}, \end{cases}$$

Определитель этой системы равен

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x_0} & e^{\lambda_2 x_0} & \dots & e^{\lambda_n x_0} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x_0} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x_0} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x_0} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x_0} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x_0} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x_0} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

назван в честь Вандермонда (Alexandre-Théophile Vandermonde; 1735-1796) и он, как известно, не равен нулю, если среди чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ нет равных. Это означает, что при любых начальных данных среди решений

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$$

можно отыскать решение задачи Коши. В силу единственности ее решения, других решений уравнение $p(D)y = 0$ иметь не может.

Правило 5.1. Если все комплексные корни многочлена p простые, то для отыскания общего решения дифференциального уравнения

$$p(D)y = 0$$

следует отыскать эти корни, скажем $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, и составить линейную комбинацию экспонент

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

Пример 5.6. `sage: x=var('x')`

`sage: y=function('y')(x)` 138

`sage: desolve(diff(y,x,2)+3*diff(y,x)+y==0,y,ivar=x, 139
ics=[0,1,2])`

`-1/10*(7*sqrt(5) - 5)*e^(-1/2*x*(sqrt(5) + 3)) + 140
1/10*(7*sqrt(5) + 5)*e^(1/2*x*(sqrt(5) - 3))`

Если многочлен p имеет кратные корни, то дифференциальное уравнение можно переписать так.

$$(D - \lambda_1)^{n_1} \dots (D - \lambda_m)^{n_m} y = 0$$

Нам нужно связать с первым множителем не одно, а n_1 различных решений.

1. Уравнение

$$(D - \lambda_1)y = 0$$

имеет частное решение

$$y = e^{\lambda_1 x}.$$

2. Уравнение

$$(D - \lambda_1)^2 y = 0$$

можно переписать так

$$(D - \lambda_1)((D - \lambda_1)y) = 0;$$

если

$$(D - \lambda_1)y = e^{\lambda_1 x},$$

то

$$(D - \lambda_1)^2 y = 0.$$

Уравнение же

$$(D - \lambda_1)y = e^{\lambda_1 x}$$

или

$$y' - \lambda_1 y = e^{\lambda_1 x}$$

является линейным неоднородным уравнением первого порядка. Его решение дается общей формулой

$$e^{-\lambda_1 x} y = \int e^{-\lambda_1 x} e^{\lambda_1 x} dx = x + C,$$

откуда в частности получается

$$y = x e^{\lambda_1 x}.$$

3. Уравнение

$$(D - \lambda_1)^3 y = 0$$

можно переписать так

$$(D - \lambda_1)^2 ((D - \lambda_1)y) = 0.$$

Мы отыщем новое решение этого уравнения, положив

$$(D - \lambda_1)y = x e^{\lambda_1 x}$$

или

$$y' - \lambda_1 y = x e^{\lambda_1 x}.$$

Отсюда

$$e^{-\lambda_1 x} y = \int e^{-\lambda_1 x} x e^{\lambda_1 x} dx = \frac{x^2}{2} + C,$$

откуда в частности получается

$$y = \frac{x^2}{2} e^{\lambda_1 x}.$$

Правило 5.2. Для отыскания общего решения дифференциального уравнения

$$p(D)y = 0$$

следует отыскать эти корни, скажем $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, и составить линейную комбинацию экспонент

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

Если корень имеет кратность r , то вместе с экспонентой $e^{\lambda x}$ следует использовать $e^{\lambda x}, \dots, x^{r-1} e^{\lambda x}$.

Замечание 5.2. Вычисление констант по заданным начальным данным и здесь приводит к линейной системе уравнений, только теперь вычислить ее определитель в общем виде затруднительно. Доказательство того, что он отличен от нуля требует знакомства со свойствами определителя Вроньского, поэтому пока мы оставим его в стороне.

Пример 5.7.

$$y^{(4)} + 8y^{(3)} + 18y'' - 27y = 0$$

Поскольку

$$\lambda^4 + 8\lambda^3 + 18\lambda^2 - 27 = (\lambda - 1)(\lambda + 3)^3,$$

общим решением дифференциального уравнения будет

$$y = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x + C_4 x^2) e^{-3x}.$$

Уравнение вида

$$p(D)y = f(x)$$

называют линейным неоднородным дифференциальным уравнением. Если заданная функция f сама является решением какого-нибудь однородного дифференциального уравнения, скажем

$$q(D)f = 0,$$

то всякое решение исходного уравнения является решением уравнения

$$q(D)p(D)y = 0;$$

оно получается применением к исходному оператору $q(D)$. Общее решение однородного уравнения можно найти по указанному выше правилу:

$$y = C_1y_1(x) + \cdots + C_my_m(x).$$

Подставляя это выражение в уравнение $p(D)y = f(x)$, получим

$$C_1p(D)y_1 + \cdots + C_mp(D)y_m = f(x),$$

откуда найдем $C_1, \dots, C_m$.

Правило 5.3. Для отыскания общего решения дифференциального уравнения

$$p(D)y = f(x)$$

следует 1.) подобрать $q(D)$ так, чтобы

$$q(D)f = 0;$$

2.) составить общее решение однородного уравнения

$$y = C_1y_1(x) + \cdots + C_my_m(x)$$

и 3.) из условия

$$C_1p(D)y_1 + \cdots + C_mp(D)y_m = f(x),$$

определить константы $C_1, \dots, C_m$.

Пример 5.8.

$$y'' + y = xe^x.$$

Функция xe^x уже встречалась выше как решение уравнения

$$(D - 1)^2 y = 0.$$

Поэтому все решения исходного уравнения удовлетворяют уравнению

$$(D - 1)^2(D^2 + 1)y = 0.$$

Общее решение этого уравнения 4-го порядка дается как

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 e^x + C_4 x e^x.$$

Для отыскания тех значений констант, при которых получаются решения исходного уравнения, имеем условие

$$C_1(D^2 + 1) \sin x + C_2(D^2 + 1) \cos x + C_3(D^2 + 1)e^x + C_4(D^2 + 1)xe^x = xe^x$$

или

$$C_3 2e^x + C_4(2xe^x + 2e^x) = xe^x.$$

Это тождество будет верно при всех x , если

$$\begin{cases} 2C_3 + 2C_4 = 0 \\ 2C_4 = 1 \end{cases}$$

то есть при

$$C_4 = \frac{1}{2}, \quad C_3 = -\frac{1}{2}.$$

Общее решение исходного дается формулой

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}xe^x.$$

Для подбора $q(D)$ по заданной f следует представить ее как линейную комбинацию функций вида

$$x^r e^{\lambda x}.$$

Эта функция является решением уравнения

$$(D - \lambda)^{r+1} y = 0,$$

а стало быть в качестве q можно принять произведение $(D - \lambda)^{r+1}$.

Пример 5.9.

$$x \sin x = x \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

поэтому

$$q(D) = (D - i)^2(D + i)^2 = (D^2 + 1)^2.$$

Домашнее задание

Филиппов, № 511-516, 536-538, 541.

Лекция 6.

Нелинейные дифференциальные уравнения 2-го порядка

6.1. Дифференциальное уравнение 2-го порядка и его интеграл

Интегрирование дифференциального уравнения второго порядка, скажем,

$$F(y'', y', y, x) = 0,$$

вводит две константы. Для отыскания общего решения обычно стремятся отыскать т.н. промежуточный интеграл, то есть дифференциальное уравнение 1-го порядка, зависящее от одной произвольной константы C , скажем

$$G(y', y, x) = C,$$

которому удовлетворяет любое решение исходного уравнения при надлежащем выборе константы C .

Пример 6.1. Общим решением дифференциального уравнения

$$y'' = 6x$$

будет

$$y = x^3 + C_1x + C_2,$$

уравнение

$$y' - 3x^2 = C$$

будет его промежуточным интегралом, поскольку на любом решении исходного уравнения

$$y' - 3x^2 = 3x^2 + C_1 - 3x^2 = C_1.$$

Промежуточный интеграл всегда можно отыскать, если функция F зависит только от двух аргументов.

6.2. Уравнение $F(y'', x) = 0$

Выразим y'' через x :

$$y'' = f(x)$$

и проинтегрируем обе части этого равенства по x :

$$y' = \int f(x)dx = \int_{\xi=0}^x f(\xi)d\xi + C_1.$$

Это соотношение и будет промежуточным интегралом. Впрочем нетрудно выписать и общее решение, проинтегрировав равенство еще раз

$$y = \int_{\eta=0}^x \int_{\xi=0}^{\eta} f(\xi)d\xi d\eta + C_1x + C_2.$$

Обычно в этом интеграле меняют порядок интегрирования, воспользовавшись формулой Дирихле, которую мы изучим в след. семестре. А пока приведем результат:

$$y = \int_{\xi=0}^x f(\xi)(x - \xi)d\xi + C_1x + C_2.$$

В его справедливости нетрудно убедиться непосредственным дифференцированием: поскольку вообще

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x, \xi)d\xi = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial g(x, \xi)}{\partial x} d\xi + g(x, \beta(x))\beta'(x) - g(x, \alpha(x))\alpha'(x),$$

то

$$y' = \int_{\xi=0}^x f(\xi) \frac{\partial(x-\xi)}{\partial x} d\xi + f(x)(x-x) + C_1 = \int_{\xi=0}^x f(\xi) d\xi + C_1$$

Пример 6.2. Общим решением уравнения

$$y'' = \sin x$$

будет

$$y = \int_{\xi=0}^x \sin(\xi) \cdot (x-\xi) d\xi + C_1 x + C_2.$$

Интеграл легко берется по частям:

```
sage: x,xi=var('x,xi') 141
sage: integral(sin(xi)*(x-xi),xi) 142
-x*cos(xi) + xi*cos(xi) - sin(xi) 143
sage: assume(x>0) 144
None 145
sage: integral(sin(xi)*(x-xi),(xi,0,x)) 146
x - sin(x) 147
```

Ответ:

$$y = x - \sin x + C_1 x + C_2 = -\sin x + K_1 x + K_2.$$

Проверка:

```
sage: y=function('y')(x) 148
sage: desolve(diff(y,x,2)==sin(x),y) 149
_K2*x + _K1 - sin(x) 150
```

Уравнения этого типа появляются в механике, когда рассматривают прямолинейное движение тела m под действием внешней силы F , зависящей от времени. В этом случае уравнение Ньютона дает

$$m\ddot{x} = F(t).$$

Пример 6.3. Опишем движение тела под действием периодической силы:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = A \sin \omega t, \\ x|_{t=0} = 0, \\ \dot{x}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Общим решением уравнения будет

$$x = \frac{A}{m} \int_{\tau=0}^t \sin(\omega\tau) \cdot (t - \tau) d\tau + C_1 t + C_2.$$

Интеграл берется по частям:

```
sage: t,tau,omega,m,A=var('t,tau,omega,m,A') 151
sage: integral(sin(omega*tau)*(t-tau),tau) 152
-(t*cos(omega*tau) - (omega*tau*cos(omega*tau) - sin 153
(omega*tau))/omega)/omega
sage: assume(t>0) 154
None 155
sage: integral(sin(omega*tau)*(t-tau),(tau,0,t)) 156
t/omega - sin(omega*t)/omega^2 157
```

Общим решением будет

$$x = \frac{At}{m\omega} - \frac{A \sin \omega t}{m\omega^2} + C_1 t + C_2.$$

Константы подберем из начальных условий:

$$\begin{cases} 0 = C_2, \\ 0 = \frac{A}{m\omega} - \frac{A}{m\omega} + C_1, \end{cases}$$

откуда $C_1 = C_2 = 0$. Ответ:

$$x = \frac{At}{m\omega} - \frac{A \sin \omega t}{m\omega^2}.$$

Проверка:

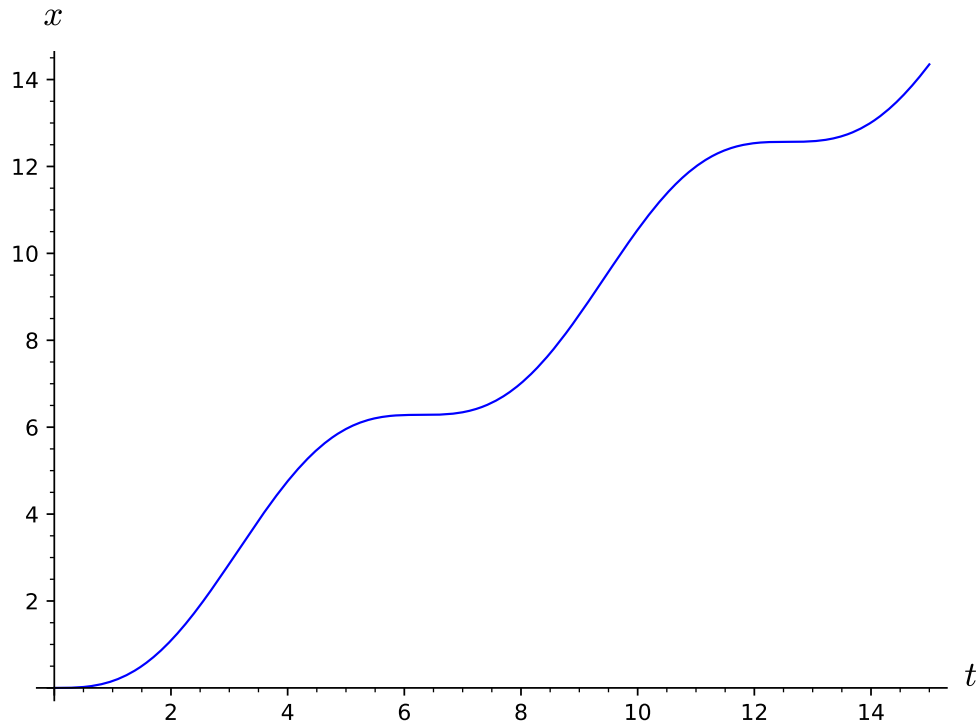


Рис. 6.1. График движения тела при частоте внешней силы $\omega = 1$ [рад./с.], взято $A/m = 1$ [Н/кг].

```
sage: x=function('x')(t) 158
```

```
sage: desolve(m*diff(x,t,2)==A*sin(omega*t),x,ics 159
      =[0,0,0],ivar=t)
```

```
A*t/(m*omega) - A*sin(omega*t)/(m*omega^2) 160
```

Вопрос: растет ли x монотонно со временем? — Скорость

$$\dot{x} = \frac{A}{m\omega} - \frac{A \cos \omega t}{m\omega} = \frac{1 - \cos \omega t}{m\omega} \geq 0,$$

поэтому x монотонно возрастает, останавливаясь при

$$t = \frac{\pi n}{\omega} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Эти значения t являются стационарными точками в терминологии Анализа. Ср. рис. 6.2.

6.3. Уравнение $F(y'', y') = 0$

Вводя новую переменную $z = y'$, получаем уравнение 1-го порядка, его интеграл

$$G(z, x) = C$$

дает промежуточный интеграл

$$G(y', x) = C$$

исходного уравнения.

Пример 6.4. Пусть дано уравнение

$$y'' = (y')^2,$$

тогда для $z = y'$ имеется уравнение 1-го порядка

$$z' = z^2,$$

в котором делятся переменные

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int dx$$

или

$$-\frac{1}{z} = x + C.$$

Поэтому

$$\frac{1}{y'} + x = C$$

будет промежуточным интегралом исходного уравнения. Выражая отсюда y' , получим

$$y' = \frac{1}{C - x}$$

откуда

$$y = C_2 - \ln(C - x).$$

Проверка:

`sage: x=var('x')`

<code>sage: y=function('y')(x)</code>	162
<code>sage: desolve(diff(y,x,2)==diff(y,x)^2,y)</code>	163
<code>_K2 - log(_K1 + x)</code>	164

Уравнения такого типа возникают в механике при рассмотрении задачи о движении тела в среде с сопротивлением.

Пример 6.5. Для примера рассмотрим падение тела массы m вертикально вниз в среде с сопротивлением. Если направить ось Ox вертикально вниз, то закон Ньютона дает

$$m\ddot{x} = mg - F(\dot{x}),$$

здесь F — сила, описывающая сопротивление воздуха. Полагая $v\dot{x}$, получим уравнение

$$m\dot{v} = mg - F(v),$$

в котором переменные делятся:

$$\int \frac{dv}{g - f(v)} = \int dt,$$

где для краткости принято, что $f = F/m$. Поэтому задача допускает промежуточный интеграл

$$\int_{v=0}^{\dot{x}} \frac{dv}{g - f(v)} = t + C,$$

который в общем случае нельзя переписать без квадратуры. Если сопротивление среды пропорционально v или v^2 получатся табличный интеграл. Напр., пусть $f(v) = kv^2$, тогда

$$\int \frac{dv}{g - kv^2} = -\frac{1}{2\sqrt{gk}} \ln \frac{kv - \sqrt{gk}}{kv + \sqrt{gk}}$$

и поэтому

$$\frac{kv - \sqrt{gk}}{kv + \sqrt{gk}} = Ce^{-2\sqrt{gk}t}.$$

Если в начальный момент тело покоилось, то

$$C = \frac{-\sqrt{gk}}{\sqrt{gk}} = -1$$

и

$$v = \sqrt{\frac{g}{k} \frac{1 - e^{-2\sqrt{gk}t}}{1 + e^{-2\sqrt{gk}t}}}$$

С ростом $t \rightarrow +\infty$ эта величина монотонно стремится к предельной скорости

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{g}{k}},$$

поэтому при временах, значительно превышающих $1/\sqrt{gk}$, падение тела в среде с сопротивлением происходит с почти постоянной скоростью.

Зная зависимость скорости от t нетрудно найти закон движения тела, записав квадратуру

$$x = \int v dt = \sqrt{\frac{g}{k}} \int \frac{1 - e^{-2\sqrt{gk}t}}{1 + e^{-2\sqrt{gk}t}} dt$$

Подынтегральная функция является рациональной функцией e^{at} , поэтому интеграл берется в элементарных функциях. В данном случае удобно преобразовать интеграл как

$$\int \frac{1 + e^{-2\sqrt{gk}t}}{1 + e^{-2\sqrt{gk}t}} dt - \int \frac{2e^{-2\sqrt{gk}t}}{1 + e^{-2\sqrt{gk}t}} dt = t - \frac{1}{\sqrt{gk}} \int \frac{du}{1 - u}.$$

В итоге, принимая начальное положение за точку отсчета,

$$x = \sqrt{\frac{g}{k}} t + \frac{1}{k} \ln \frac{1 + e^{-2\sqrt{gk}t}}{2}.$$

или

$$x = v_{\infty} t + \frac{1}{k} \ln \frac{1 + e^{-2\sqrt{gk}t}}{2}.$$

С ростом t логарифм становится все ближе к $\ln 1 = 0$, см. рис. 6.3.

Замечание 6.1. В данном случае Sage трудно использовать для проверки:

```
sage: t,k,g=var('t,k,g') 165
```

```
sage: x=function('x')(t) 166
```

```
sage: assume(k>0) 167
```

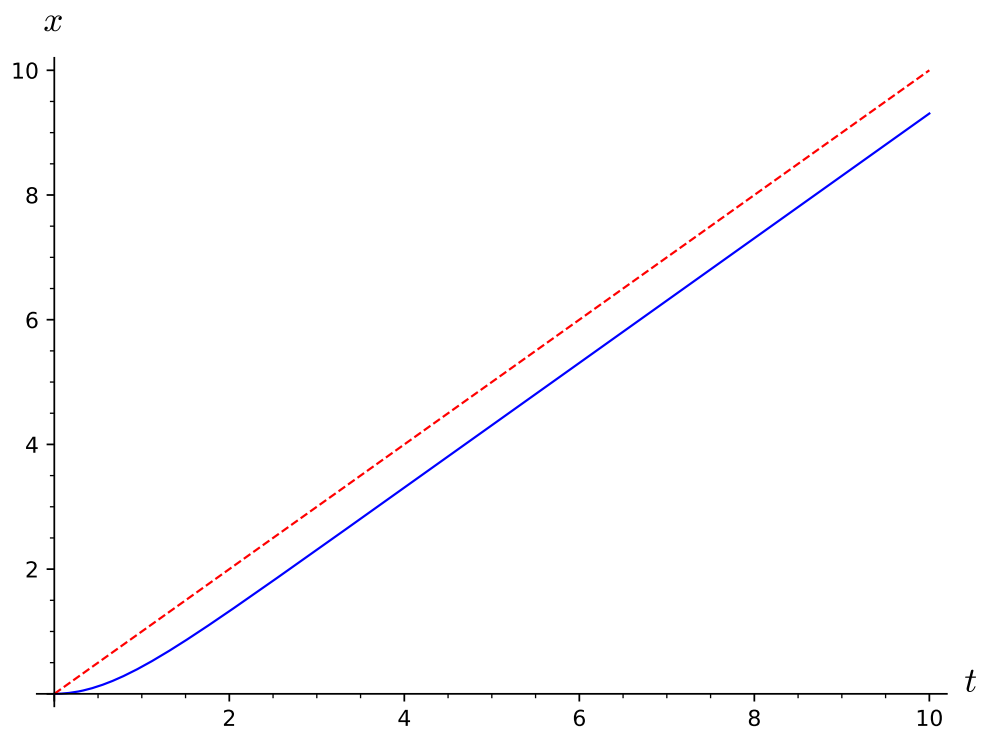


Рис. 6.2. График движения тела, падающего в среде с сопротивлением, пропорциональным v^2 , взято $v_\infty = 1$ [м/с.] и $\sqrt{gk} = 1$ [с $^{-1}$]). Пунктиром изображен график равномерного движения по закону $x = v_\infty t$.

```

None 168
sage: assume(g>0) 169
None 170
sage: desolve(diff(x,t,2)==g-k*diff(x,t)^2,x,ivar=t) 171
-sqrt(g*k)*((sqrt(g*k)*_K1 + sqrt(g*k)*t)/(sqrt(g*k) 172
*k) - log(e^(2*sqrt(g*k)*_K1 + 2*sqrt(g*k)*t) - 1)
/(sqrt(g*k)*k)) + _K2

```

К сожалению, Sage не может выразить константы K_1 и K_2 через начальные данные:

```

sage: desolve(diff(x,t,2)==g-k*diff(x,t)^2,x,ivar=t, 173
ics=[0,0,0])
[] 174

```

6.4. Уравнение $F(y'', y) = 0$

Выразим y'' через y :

$$y'' = f(y);$$

теперь умножим обе части на y' и проинтегрируем по x . Интеграл от левой части легко берется

$$\int y'' y' dx = \int \frac{dy'}{dx} y' dx = \int y' dy' = \frac{(y')^2}{2},$$

поэтому уравнение

$$\frac{(y')^2}{2} = \int f(y) dy + C$$

будет промежуточным интегралом исходного уравнения.

Уравнения такого типа встречаются в механике, когда рассматривается движение точки m под действием силу, величина которой зависит от положения тела. В этом случае закон Ньютона дает дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$m\ddot{x} = F(x).$$

Умножая его на $\dot{x}$ и интегрируя по t , получим промежуточный интеграл

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = \int F(x)dx + C;$$

величину

$$U = - \int F(x)dx$$

в механике называют потенциальной энергией, сам промежуточный интеграл

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = C$$

— законом сохранения энергии.

Пример 6.6. Решим этим способом хорошо известное нам уравнение колебаний пружинного маятника

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

По предыдущему промежуточным интегралом этого уравнения будет

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \omega^2 \frac{x^2}{2} = C.$$

В этом соотношении нетрудно узнать закон сохранения энергии. Выражая отсюда $\dot{x}$, получим

$$\dot{x} = \sqrt{C - \omega^2 x^2},$$

если закрыть глаза на вопрос о выборе знака. В этом уравнении переменные делятся:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{C - \omega^2 x^2}} = \int dt$$

или, пользуясь неопределенностью C ,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{C_1^2 - x^2}} = \omega t + C_2. \quad (6.1)$$

Отсюда

$$\arcsin \frac{x}{C_1} = \omega t + C_2$$

или

$$x = C_1 \sin(\omega t + C_2).$$

Такой способ получения ответа вызывает ряд вопросов относительно области применения этой формулы. Напр., в точках экстремума $x = \pm C_1$ и подынтегральное выражение в (6.1) обращается в бесконечность и формально следовало бы исключить их из рассмотрения.

6.5. Нелинейное уравнение колебаний маятника

Колебания обычного маятника длины l описывается дифференциальным уравнением

$$l\ddot{\vartheta} + g \sin \vartheta = 0,$$

где ϑ — угол отклонения маятника. В курсе механики это уравнение линеаризуют, приняв, что при малых углах

$$\sin \vartheta \simeq \vartheta.$$

На самом деле, при отклонениях порядка 30° ошибка вполне заметна:

```
sage: abs(sin(pi/6) - pi/6).n() 175
0.0235987755982988 176
```

Отказавшись от линеаризации, можно попытаться решить исходное уравнение описанным выше способом. Умножив его на $\dot{\vartheta}$ и проинтегрировав по t , получим закон сохранения энергии

$$l\dot{\vartheta}^2 = 2g \cos \vartheta + C.$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ маятник был отклонен на угол ϑ_0 и отпущен без придания ему начальной скорости. Тогда

$$l\dot{\vartheta}^2 = 2g(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)$$

или

$$l\dot{\vartheta}^2 = 4g \left(\sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right)$$

При малых временах t угол отклонения уменьшается, поэтому $\dot{\vartheta} < 0$ и

$$\dot{\vartheta} = -2\sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} - \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}.$$

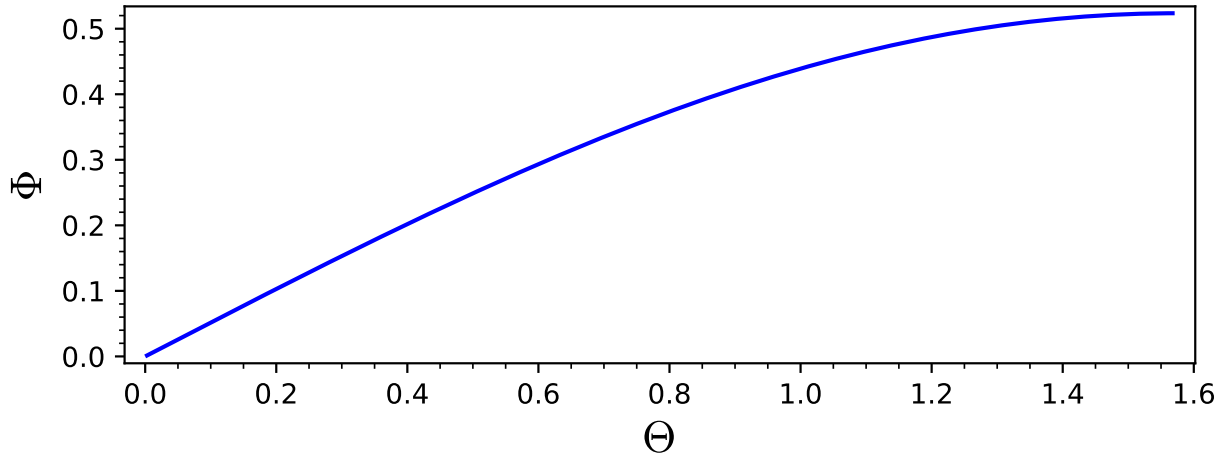


Рис. 6.3. График кривой (6.3) при $\vartheta_0 = \frac{\pi}{6}$.

В этом уравнении можно поделить переменные:

$$\int \frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} - \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}} = -2\sqrt{\frac{g}{l}}t + C. \quad (6.2)$$

Преобразуем интеграл, перейдя от ϑ к новой переменной φ , связанной с ней соотношением

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \sin \frac{\vartheta_0}{2} \sin \varphi, \quad (6.3)$$

когда ϑ меняется от ϑ_0 до нуля, переменная φ меняется от $\frac{\pi}{2}$ до 0 и связь взаимно однозначная. Для примера график этой зависимости при $\vartheta_0 = \frac{\pi}{6}$ приведен на рис. 6.5, он был построен при помощи след. конструкции:

```
sage: theta, phi, theta0 = var('theta, phi, theta0') 177
sage: eq = sin(theta/2) == sin(theta0/2)*sin(phi) 178
sage: implicit_plot(eq.subs(theta0=pi/6), (phi, 0, pi 179
      /2), (theta, 0, pi/6))
Graphics object consisting of 1 graphics primitive 180
```

Примем для краткости, что

$$k = \sin \frac{\vartheta_0}{2},$$

тогда

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = k \sin \varphi$$

и

$$\cos \frac{\vartheta}{2} \cdot d\vartheta = 2k \cos \varphi \cdot d\varphi.$$

Поэтому интеграл в (6.2) можно преобразовать так:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = -\sqrt{\frac{g}{l}} t + C. \quad (6.4)$$

Интеграл, стоящий в левой части, не берется в элементарных функциях.

Период колебания. Эта формула позволяет выписать точную формулу для периода маятника. В самом деле, когда ϑ меняется от максимального угла отклонения ϑ_0 до нуля, φ меняется от $\frac{\pi}{2}$ до нуля, а время t пробегает отрезок, равный четверти периода. Поэтому период маятника равен

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

По предложению Лежандра, определенный интеграл

$$\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

называют полным эллиптическим интегралом первого рода и обозначают как $K(k)$. Таким образом, *период маятника равен*

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\sin \frac{\vartheta_0}{2}\right),$$

где ϑ_0 — амплитуда его колебаний.

Полный эллиптический интеграл при любом заданном k можно вычислить приближенно как определенный интеграл, нарезав подынтегральную область на столбики. Напр., для $\vartheta_0 = \frac{\pi}{6}$

```

sage: x=var('x') 181
sage: numerical_integral(1/sqrt(1-(sin(pi/12))^2*( 182
sin(x))^2),0,pi/2)
(1.59814200211254, 1.7742940473658877e-14) 183

```

Разумеется, в Sage имеется встроенная функция `elliptic_kc`, только по каким-то внутренним соображениям она считается не функцией k , а $m = k^2$.

```

sage: elliptic_kc(sin(pi/12)^2).n() 184
1.59814200211254 185

```

Когда пишут

$$K \simeq \frac{\pi}{2}$$

ошибаются на несколько сотых:

```

sage: (elliptic_kc(sin(pi/12)^2)-pi/2).n() 186
0.0273456753176435 187

```

Можно ли заметить эту ошибку при выполнении задач физ. практикума?

Численное решение. Обратимся теперь к численному решению уравнения колебаний маятника. Требуется решить уравнение колебаний маятника

$$l\ddot{\vartheta} + g \sin \vartheta = 0$$

на отрезке $[0, a]$ с начальными условиями

$$\vartheta|_{t=0} = \vartheta_0, \quad \dot{\vartheta}|_{x=0} = 0.$$

Применим метод конечных разностей.

```

sage: l=1 188
sage: g=9.8 189
sage: theta0=(pi/3).n() 190
sage: a=2 191

```

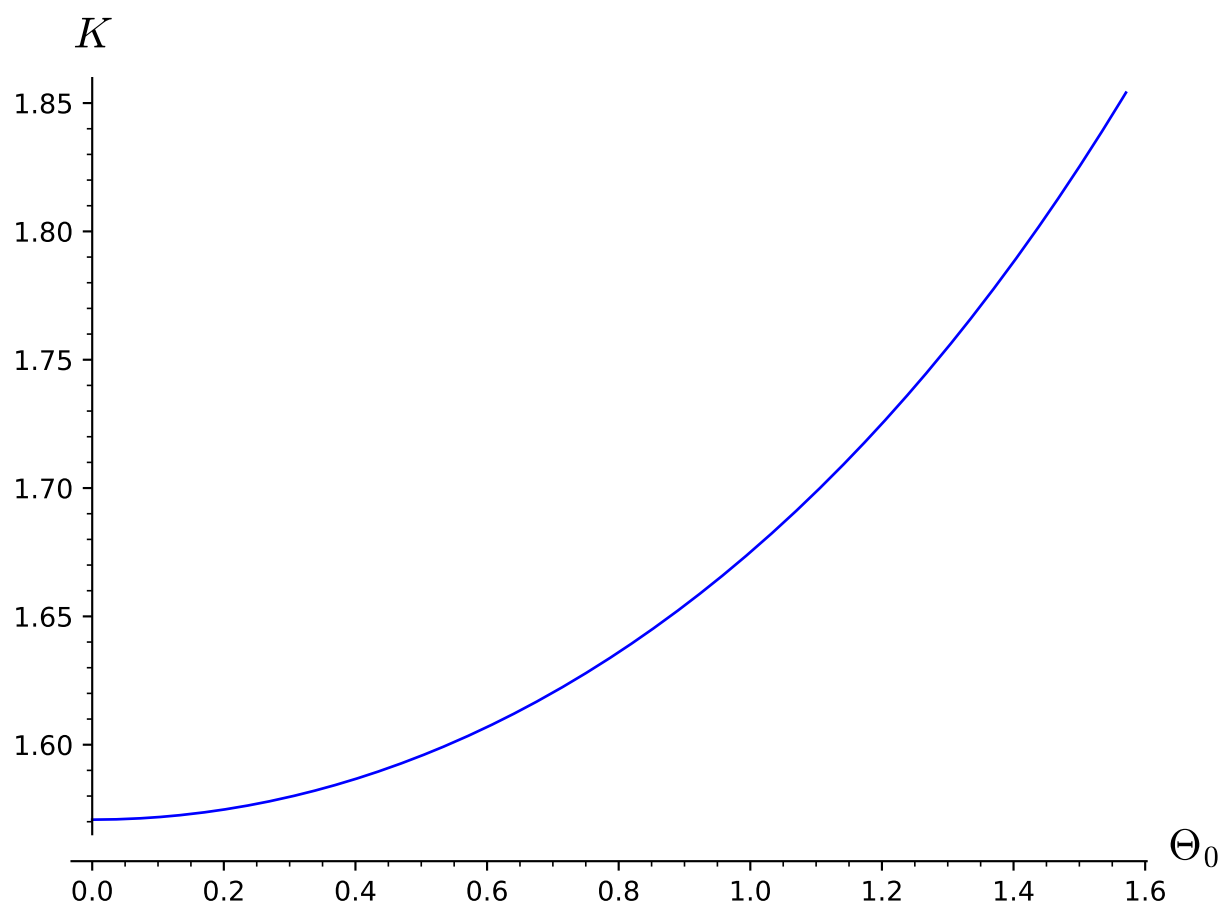



Рис. 6.4. График зависимости полного эллиптического интеграла K от амплитуды отклонения маятника.

```

sage: N=5000 192
sage: dt=(a/N).n() 193
sage: P =[[0,theta0],[dt,theta0]] 194
sage: for n in range (0,N): P.append([P[n+1][0]+dt 195
    ,2*P[n+1][1]-P[n][1]-(g/l)*sin(P[n][1])*dt^2])

```

График решения представлен на рис. 6.5, при выбранном угле отклонения в $\pi/3$, расхождение в истинном периоде маятника и $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ становится заметно, однако качественно зависимость ϑ от t ничем не отличается от косинуса.

Домашнее задание

Задачи: [2], № 423, 436, 437, 451.

Дополнительные задачи:

1. Найдите решение начальной задачи

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dot{x}^2, \\ x|_{t=0} = 1, \dot{x}|_{t=0} = 2. \end{cases}$$

Ответ:

```

sage: t=var('t') 196
sage: x=function('x')(t) 197
sage: desolve(diff(x,t,2)==diff(x,t)^2,x,ics 198
    =[0,1,2])
I*pi + log(1/2) - log(t - 1/2) + 1 199

```

2. Найдите общее решение уравнения $\ddot{x} = x^3 - \frac{5}{2}x$.

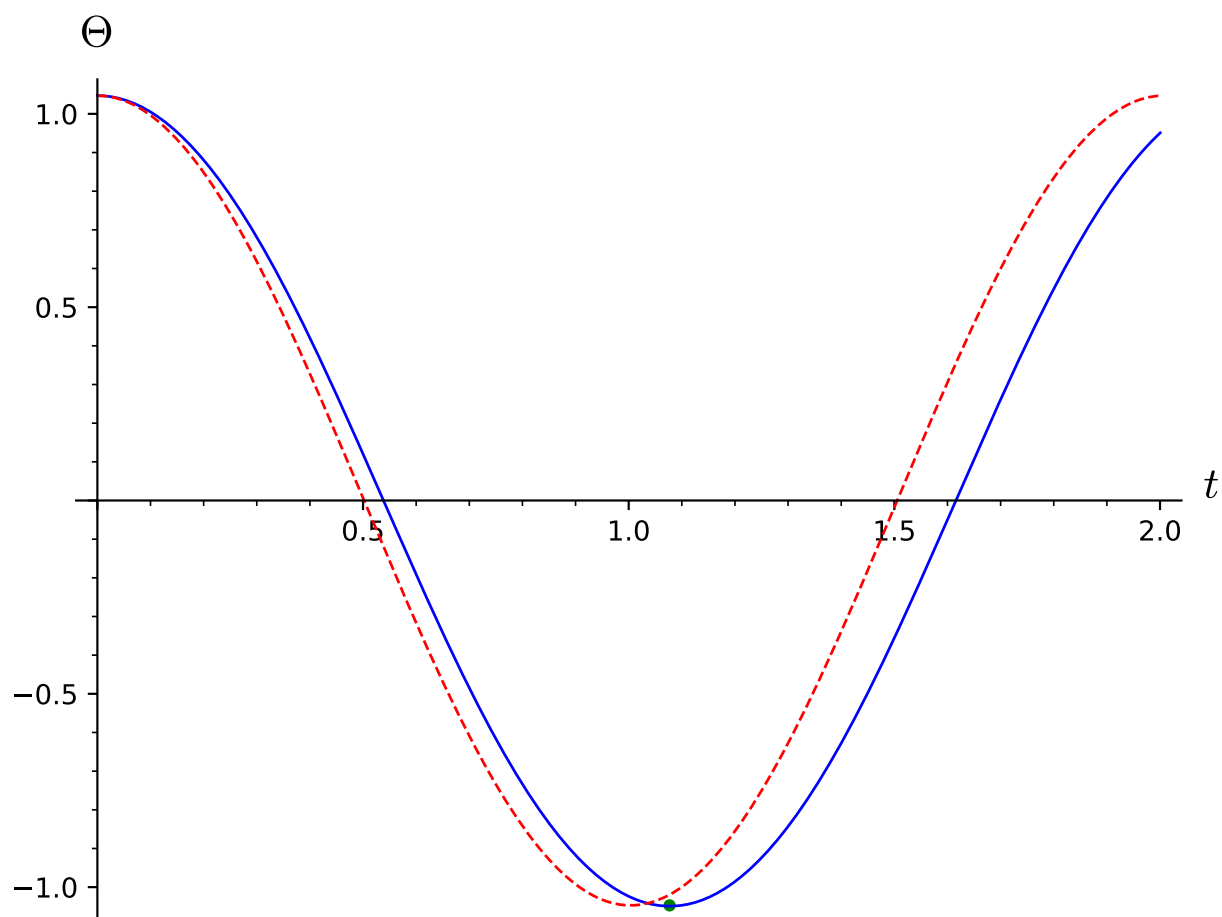


Рис. 6.5. Зависимость угла отклонения ϑ маятника от времени, начальный угол $\vartheta = \frac{\pi}{3}$, $l = 1$ [м]. Для сравнения пунктиром изображено решение линейаризованной задачи (красный); на графике отмечена точка $(T/2, \pi/3)$, координаты которой вычислены с точностью до 10^{-14} .

Часть III

Дополнительные вопросы

Лекция 7.

Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно старшей производной

7.1. Неявные функции

Зависимость переменной y от x называют заданной неявно, если задано уравнение

$$F(x, y) = 0,$$

связывающее эти переменные. При этом еще говорят, что y — неявная функция переменной x . Если к тому же F является многочленом относительно x и y , то y называют алгебраической функцией x .

Пример 7.1. Уравнение Кеплера

$$y + \varepsilon \sin y = x \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

задает y как неявную функцию x . Поскольку

$$\frac{d}{dy}(y + \varepsilon \sin y) = 1 + \varepsilon \cos y > 0,$$

левая часть уравнения является монотонной функцией y , меняющейся от $-\infty$ до ∞ . Поэтому уравнение Кеплера при любом заданном x имеет и притом единственный корень y , функция, сопоставляющая x этот корень,

является неявной функцией x . Нельзя однако сказать, что эта функция является алгебраической, поскольку $y + \varepsilon \sin y - x$ не является многочленом.

Пример 7.2. Алгебраическое уравнение

$$y^2 + x^2 = 1$$

задает y как алгебраическую функцию x . С точки зрения вещественного анализа этому уравнению удовлетворяют две различные функции

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2},$$

имеющие в своей области определения $|x| < 1$ производные всех порядков и бесконечно число других разрывных функций, которые обычно сразу исключают из рассмотрения. С точки же зрения комплексного анализа этому уравнению удовлетворяет одна двузначная аналитическая функция

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Задача о построении графика функции, заданной неявно, кажется весьма сложной, поскольку требует решения нелинейного уравнения. Однако, если известно значение $y = y_0$ при одном каком-нибудь значении $x = x_0$, то эта задача решается весьма просто средствами теории дифференциальных уравнений.

В самом деле, если переменные x и y связаны соотношением

$$F(x, y) = 0,$$

то их дифференциалы связаны соотношением

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0.$$

Стало быть, y как функция от x удовлетворяет начальной задаче

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} \\ y|_{x=x_0} = y_0. \end{cases}$$

В силу теоремы Коши в некоторой окрестности начальных данных эта задача имеет и притом единственное решение, которое к тому же можно отыскать по методу конечных разностей.

Пример 7.3. Функция, заданная уравнением

$$y + \frac{1}{2} \sin y = xe^x$$

удовлетворяет начальной задаче

$$\begin{cases} y' = \frac{(1+x)e^x}{1 + \frac{1}{2} \cos y} \\ y|_{x=0} = 0. \end{cases}$$

На рис. 7.1 построен ее график, точки которого вычислены по методу конечных разностей:

```
sage: x,y=var('x,y') 200
sage: desolve_rk4(exp(x)*(1+x)/(1+0.5*cos(y)), ivar= 201
      x, dvar=y, ics=[0,0], end_points=[-2,2], output='
      plot')
Graphics object consisting of 1 graphics primitive 202
```

Из теоремы Коши сразу следует и теорема о существовании неявной функции.

Теорема 7.1 (о неявной функции). Если $F(x, y)$ — гладкая функция переменных x, y в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

то в некоторой окрестности этой точки существует и притом единственная функция $y = f(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$F(x, f(x)) = 0$$

при всех рассматриваемых x .

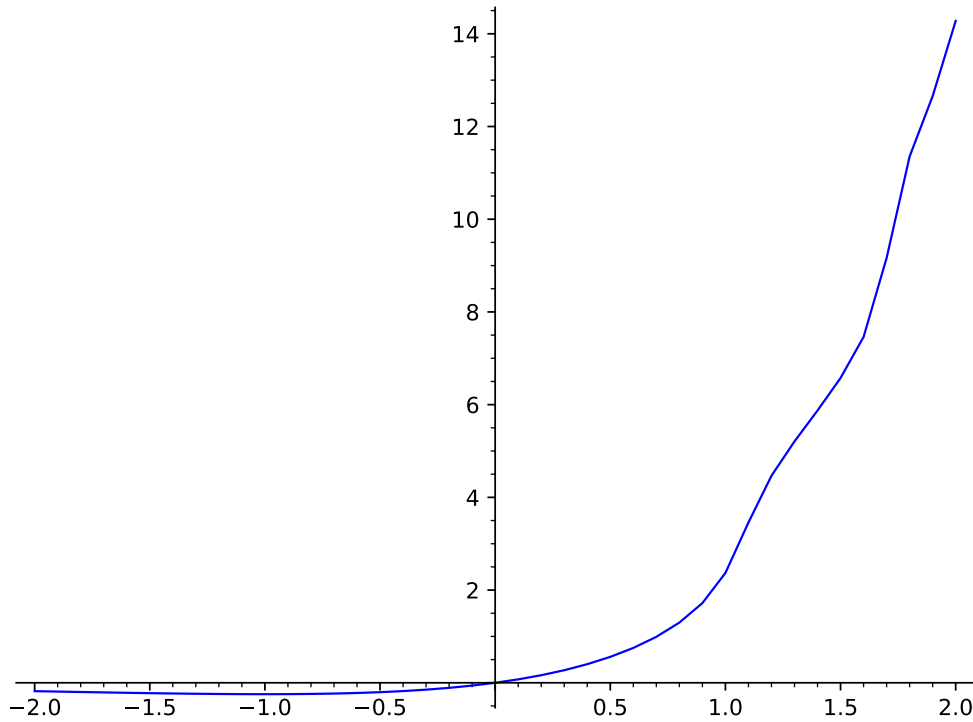


Рис. 7.1. График функции из примера 7.3.

Эта теорема допускает естественное обобщение на функции любого числа переменных. Напр., если

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

то в некоторой окрестности этой точки существует и притом единственная функция $z = f(x, y)$, удовлетворяющая уравнению

$$F(x, y, f(x, y)) = 0.$$

Следует заметить, что при интегрировании дифференциального уравнения стремятся получить интеграл вида

$$u(x, y) = C,$$

но из этого уравнения далеко не всегда можно выразить y как явную функцию x . Если зависимость между y и C достаточно сложная, то для построения интегральных кривых при известном интеграле u все равно переходят обратно к дифференциальному уравнению и применяют метод конечных

разностей. Подобная ситуация ставит под сомнение целесообразность отыскания интегралов в квадратурах с какой либо иной целью кроме оценивания ошибки метода конечных разностей.

Пример 7.4. Решение начальной задачи

$$\begin{cases} y' = \frac{(1+x)e^x}{1 + \frac{1}{2} \cos y} \\ y|_{x=0} = 0. \end{cases}$$

аннулирует функцию

$$u = y + \frac{1}{2} \sin y - x e^x.$$

Проверим выполнение этого равенства на приближенном решении:

```
sage: u=lambda x,y: y + 0.5*sin(y) - x*exp(x) 203
sage: P=desolve_rk4(exp(x)*(1+x)/(1+0.5*cos(y)), 204
      ivar=x, dvar=y, ics=[0,0], end_points=[0,2],
      output='list', step = 0.5)
sage: [u(P[n][0],P[n][1]) for n in range(1,5)] 205
[0.0005060416979048021, -0.0013805975386866898, 206
 0.0028006340213515557, -0.2451705157218047]
```

Как видно, u на решении принимает значения по началу близкие к нулю, однако весьма далекие от «машинного нуля». Уменьшив шаг, мы можем сделать эти значения сколь угодно малыми:

```
sage: P=desolve_rk4(exp(x)*(1+x)/(1+0.5*cos(y)), 207
      ivar=x, dvar=y, ics=[0,0], end_points=[0,2],
      output='list', step = 0.01)
sage: max([abs(u(P[n][0],P[n][1])) for n in range(1, 208
      len(P))])
8.339205207263944e-06 209
```

7.2. Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

7.2.1. Модификация метода Эйлера

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

где f — рациональная функция y , называют разрешенным относительно производной. Уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0,$$

где F — многочлен относительно y и y' называют неразрешенным относительно производной, если порядок F по y' выше первого.

При описании метода Эйлера предположение о том, что дифференциальное уравнение разрешено относительно производной, существенно. Попробуем методом конечных разностей отыскать интегральную кривую уравнения

$$F(x, y, y') = 0,$$

проходящую через точку (x_0, y_0) . Заменяя бесконечно малые приращения на конечные, получим

$$F\left(x_n, y_n, \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x}\right) = 0,$$

то есть нелинейное уравнение для отыскания y_{n+1} по известному y_n . Эта проблема едва ли проще исходной.

Можно, однако, поднять порядок дифференциального уравнения и избежать этого затруднения. Решение уравнения

$$F(x, y, y') = 0$$

удовлетворяет и уравнению 2-го порядка

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' = 0,$$

разрешенному относительно старшей производной, причем уравнение

$$F(x, y, y') = C$$

является промежуточным интегралом этого уравнения 2-го порядка.

Пример 7.5. Рассмотрим начальную задачу

$$(y')^2 = (1 - y^2)(2 - y^2), \quad y|_{x=0} = 0.$$

Продифференцировав по x , получим

$$y'' = 2y^3 - 3y, \quad y|_{x=0} = 0.$$

Теперь ясно, что нам не хватает начального условия на производную. Однако из исходного уравнения

$$(y')^2 = (1 - y^2)(2 - y^2)$$

при $x = 0$ получается

$$(y'_0)^2 = 2,$$

поэтому производная может принимать одно из двух значений $y'_0 = \pm\sqrt{2}$.

Поэтому исходная задача имеет два решения, которые можно вычислить как решения двух начальных задач

$$y'' = 2y^3 - 3y, \quad y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = \pm\sqrt{2}.$$

Встроенный в Sage солвер умеет работать только с системами 1-го порядка, поэтому перейдем к задачам

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = 2y^3 - 3y, \\ y|_{x=0} = 1, \quad z|_{x=0} = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

Решения этих двух задач представлено на рис. 7.2; как видно, оба решения являются периодическими и подобны синусоиде.

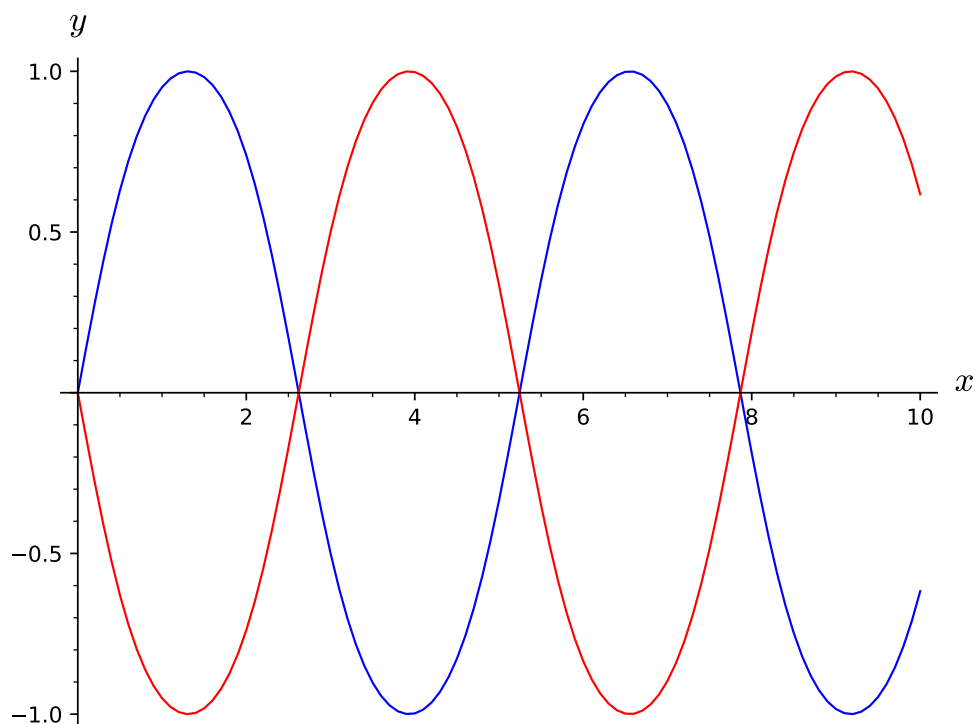


Рис. 7.2. Два решение начальной задачи из примера 7.5.

```

sage: var('x, y, z')
210
(x, y, z)
211
sage: P=desolve_system_rk4([z, 2*y^3-3*y],[y,z],ics
212   =[0,0,sqrt(2)],ivar=x,end_points=10)
sage: Q=desolve_system_rk4([z, 2*y^3-3*y],[y,z],ics
213   =[0,0,-sqrt(2)],ivar=x,end_points=10)

```

7.2.2. Теорема Коши

Всякое решение начальной задачи

$$F(x, y, y') = 0, \quad y|_{x=x_0} = y_0 \quad (7.1)$$

удовлетворяет начальной задаче

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = 0, \\ y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = z, \end{cases} \quad (7.2)$$

где z — надлежащим образом выбранный корень уравнения

$$F(x_0, y_0, z) = 0.$$

Обратно, каждому корню z этого уравнения отвечает в силу теоремы Коши одно единственное решение начальной задачи (7.2), которое будет решением и исходной задачи. Следовательно, начальная задача (7.1) имеет столько различных решений, сколько различных корней имеет уравнение

$$F(x_0, y_0, z) = 0$$

относительно z . Исключение составляет тот случай, когда уравнения

$$F(x_0, y_0, z) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'}(x_0, y_0, z) = 0$$

имеют общий корень и к задаче (7.2) нельзя применить теорему Коши.

7.2.3. Общее решение

7.2.4. Исключение постоянной

Однопараметрическое семейство кривых

$$u(x, y, C) = 0$$

называется алгебраическим, если u — многочлен относительно всех своих аргументов. Если x и y связаны при некотором фиксированном значении C уравнением

$$G(x, y, C) = 0,$$

то их дифференциалы связаны уравнением

$$\frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy = 0.$$

Исключая константу C из системы

$$\begin{cases} G(x, y, C) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0, \end{cases}$$

получим дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y') = 0,$$

для которого кривые рассматриваемого семейства являются интегральными.

Если исходное семейство кривых было линейным, то есть давалось уравнением вида

$$u(x, y) = C,$$

то получится уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial u}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial y},$$

разрешенное относительно производной. В общем же случае, получится уравнение, не разрешенное относительно производной.

Пример 7.6. Семейство прямых

$$y = Cx + C^2$$

удовлетворяет уравнению, которое получается из системы

$$\begin{cases} y = Cx + C^2 \\ y' = C, \end{cases}$$

исключением C , то есть уравнению

$$y = xy' + (y')^2.$$

Гипотеза 7.1 (Эйлера). Все интегральные кривые дифференциального уравнения

$$F(x, y', y'') = 0$$

можно объединить в однопараметрическое семейство, задающееся уравнением вида

$$G(x, y, C) = 0;$$

по этому уравнению можно обратно восстановить исходное дифференциальное уравнение.

Со временем за решением уравнения

$$G(x, y, C) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = g(x, C)$$

закрепилось название общее решение, а за решениями, которые получаются при частных значениях C , — название частные решения.

Замечание 7.1. Ситуация кажется вполне аналогичной алгебраической. В алгебре по заданному уравнению

$$x^n + ax^{n-1} + \dots + b = 0$$

ищут n корней, а по корням могут восстановить уравнение. В теории дифференциальных уравнений по заданному дифференциальному уравнению

$$F(x, y, y') = 0$$

ищут общее решение, заданное неявно уравнением

$$G(x, y, C) = 0,$$

а по общему решению можно восстановить само уравнение.

7.2.5. Уравнение Клеро

Обратимся вслед за Клеро, 1736¹ к уравнению

$$y = xy' + g(y'),$$

названному в его честь. Дифференцируя обе части по x , получим

$$y' = y' + xy'' + g'(y')y''$$

или

$$y''(x + g'(y')) = 0.$$

¹ *Clairaut A.C.* Мém. Ac. Paris, 1736. На существование особых интегралов впервые было указано в «Метод приращений» *Б. Тейлора*, Meth. increm. Londres, 1715, p. 9-14.

Следовательно, всякое решение уравнения Клеро или является линейной функцией x , или удовлетворяет еще одному дифференциальному уравнению

$$x + g(y') = 0.$$

Все линейные функции, удовлетворяющие уравнению Клеро, найти не трудно:

$$y = Cx + g(C).$$

Этот интеграл зависит от константы C и потому дает общее решение уравнения Клеро. Однако и уравнения

$$y = xy' + g(y'), \quad x + g'(y') = 0$$

имеют совместное решение, которое не входит в общее решение.

Напр., общим решением уравнения

$$y = xy' + y'^2$$

служит

$$y = Cx + C^2,$$

где C — произвольное постоянное, в чем можно убедиться и прямо: подстановка $y' = C$ в дифференциальное уравнение, дает тождество

$$Cx + C^2 = Cx + C^2.$$

Но и система

$$y = xy' + y'^2, \quad x + 2y' = 0$$

или, после преобразований,

$$y' = -\frac{x}{2}, \quad y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}$$

имеет решение

$$y = -\frac{x^2}{4},$$

которое не входит в найденное выше общее решение.

В 1730-х годах это открытие произвело примерно такое же впечатление, как если бы у квадратного уравнения отыскался бы третий корень. Эйлер высказался по этому поводу так:

«...если интегральное уравнение, найденное по точным правилам, не в состоянии охватить дифференциальное уравнение, то проблема допускает решения, которые совершенно не могут быть получены интегрированием, и, следовательно, приводят к несовершенному решению, что представляется, без сомнения, опрокидывающим обычные понятия интегрального исчисления»².

Приходится принять, что помимо общего решения, которое обычно только и интересно, могут иметься еще и другие, особые решения.

Определение 7.1. Уравнение

$$G(x, y, C) = 0,$$

называют общим решением дифференциального уравнения

$$F(x, y, y') = 0,$$

если исключение постоянной C из системы

$$G(x, y, C) = 0, \quad G_x + G_y y' = 0$$

дает уравнение $F(x, y, y') = 0$. Интегралы дифференциального уравнения, которые получаются при частных в т.ч. и бесконечно больших значениях C , называют частными решениями. Решения, которые не получаются ни при каких значениях C , называют особыми.

Пример 7.7. Уравнение

$$y = Cx + C^2$$

служит общим решением дифференциального уравнения

$$y = xy' + y'^2,$$

²Euler L. Opera omnia, series I, v. 22, p. 230; цит. по [4].

поскольку исключение C из системы

$$\begin{cases} y - Cx - C^2 = 0 \\ y' - C = 0 \end{cases}$$

дает

$$y = xy' + y'^2,$$

уравнения

$$y = x + 1, \quad y = \pi x + \pi^2, \dots$$

его частными решениями, а

$$y = -\frac{x^2}{4}$$

будет особым решением этого дифференциального уравнения.

7.3. Уравнения, квадратные относительно производной

Обратимся к уравнению

$$a(x, y)(y')^2 + b(x, y)y' + c(x, y) = 0,$$

коэффициенты которого a, b, c суть многочлены от x и y . Разрешая его относительно y' , получим

$$y' = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac.$$

Исходное дифференциально уравнение не имеет решения там, где $D < 0$ или $a = 0$. Через произвольную точку (x_0, y_0) области $D > 0$, в которой a не обращается в нуль, то задача Коши

$$a(x, y)(y')^2 + b(x, y)y' + c(x, y) = 0, \quad y|_{x=x_0} = y_0$$

имеет в точности два решения, которые получаются из теоремы Коши, примененной к двум задачам:

$$y' = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad y|_{x=x_0} = y_0.$$

Кривая

$$D(x, y) = 0$$

называется дискриминантной; она отделяет ту область, где лежат интегральные кривые, от области, где таковых нет. Если точка (x_0, y_0) лежит на дискриминантной кривой, то к задаче

$$y' = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad y|_{x=x_0} = y_0$$

нельзя применять теорему Коши, поскольку корень $\sqrt{D}$ может не иметь частных производных в точке (x_0, y_0) .

Пример 7.8. Уравнение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 - x^2 - y^2$$

не имеет решений вне круга

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Через точку $(x, y) = (0, 0)$ проходят два решения, которые не касаются окружности. В каждой точке (x, y) наклон решения может быть равен одному из двух значений $\pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, поэтому поле наклонов двухзначное, на рис. 7.3 оно представлено наложением двух полей наклонов.

Последим за одно интегральной кривой, заданной уравнением

$$y' = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad y|_{x=x_0} = y_0.$$

Выйдя из точки (x_0, y_0) , она или пересекает кривую $a(x, y) = 0$, на которой наклон интегральной кривой становится бесконечно большим, или упирается в дискриминантную кривую $D(x, y) = 0$. Через каждую точку интегральной кривой можно провести другую интегральную кривую, удовлетворяющую уравнению

$$y' = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},$$

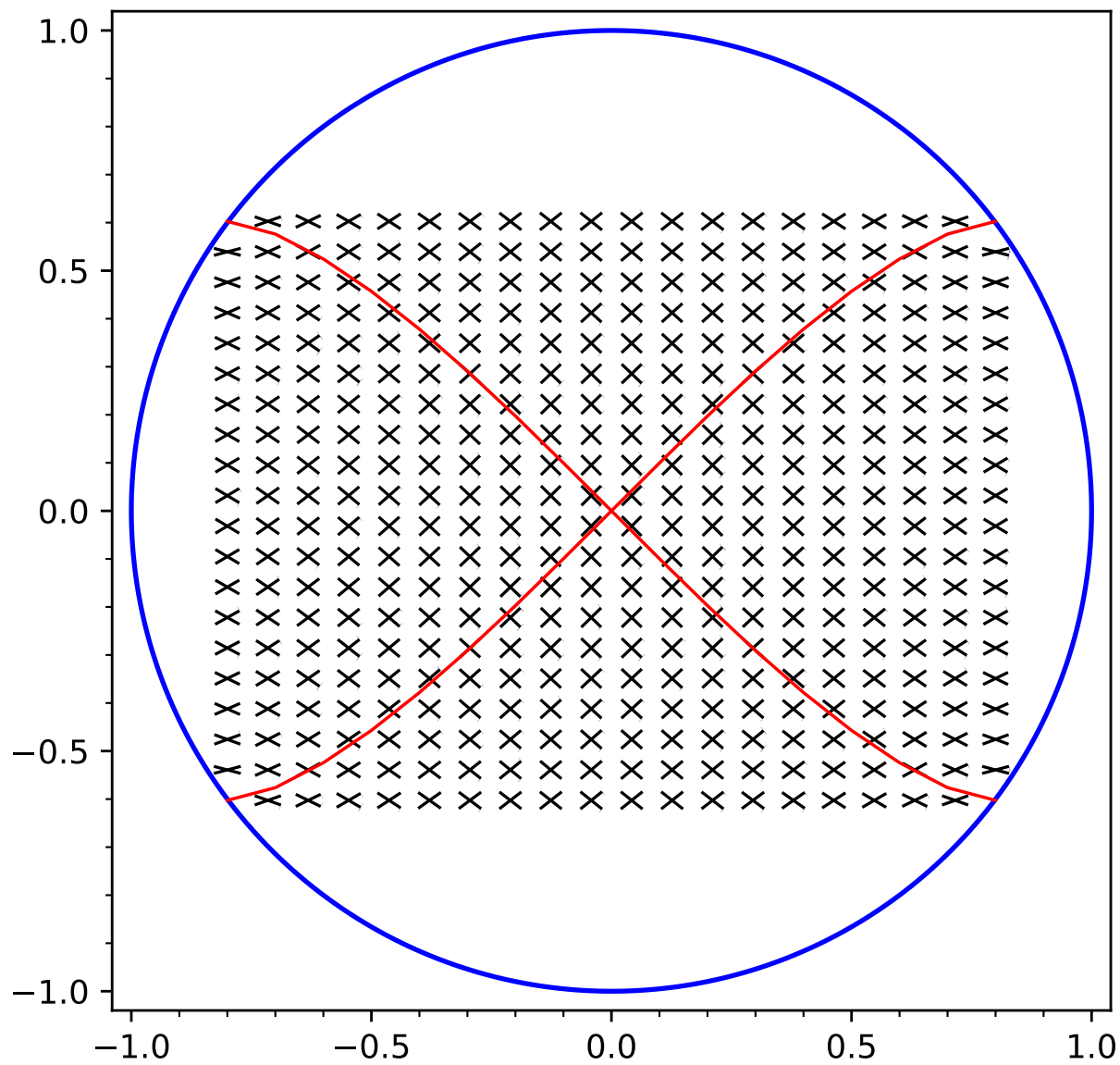


Рис. 7.3. Численные решения задачи Коши, на графике отмечено двузначное поле наклонных.

причем наклоны этих интегральных кривых отличаются от наклона исходно интегральной кривой тем менее, чем ближе мы подходим к дискриминантной кривой, на которой они имеют одинаковый наклон

$$y' = -\frac{b}{2a}.$$

В примере 7.8 интегральные кривые не касались дискриминантной кривой: из каждой ее точки выходят две интегральные кривые имеющие равный наклон и расходящиеся в виде острия. Если же интегральные кривые касаются дискриминантной кривой, то в каждой ее точке (x, y) наклон дискриминантной кривой $D = 0$ совпадает с наклоном интегральной кривой, а следовательно, дискриминантная кривая сама является решением исходного дифференциального уравнения. Это новое решение, которое не получается из теоремы Коши, обычно и оказывается особым решением в смысле определения 7.1, впрочем часто это свойство принимают за определение особого решения.

Пример 7.9. Уравнение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y}{x}$$

легко решить разделением переменных и выписать его общий интеграл

$$\sqrt{y} = \pm\sqrt{x} + \text{const}$$

или

$$(y - x)^2 - 2xc - 2yc + c^2 = 0.$$

Дискриминантная кривая $y = 0$, как нетрудно проверить прямой подстановкой, является особым решением дифференциального уравнения. В каждой точке (x, y) наклон решения может быть равен одному из двух значений $\pm\sqrt{y/x}$, поэтому поле наклонов двухзначное, на рис. 7.4 оно представлено наложением двух полей наклонов. Задачи Коши

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y}{x}, \quad y|_{x=1} = \frac{1}{2}$$

имеет два решения, которые можно найти решая численно

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}}, \quad y|_{x=1} = \frac{1}{2}$$

или аналитически из

$$(y-x)^2 - 2xc - 2yc + c^2|_{(x,y)=(1,1/2)} = 0$$

найдя два подходящих значения c , которым отвечают две интегральные кривые (параболы, изображенные на графике синим), проходящие через точку $(x, y) = (1, 1/2)$.

```
sage: var('c') 214
c 215
sage: eq=(y-x)^2-2*x*c-2*y*c+c^2==0 216
sage: solve((eq.subs(x==1)).subs(y==0.5),c) 217
[ 218
c == -sqrt(2) + 3/2, 219
c == sqrt(2) + 3/2 220
] 221
sage: cp= implicit_plot(eq.subs(c==3/2-sqrt(2)), (x 222
,0,3), (y,0,2))
sage: cm= implicit_plot(eq.subs(c==3/2+sqrt(2)), (x 223
,0,3), (y,0,2))
sage: pm=desolve_rk4(-sqrt(y/x), y, ivar=x, ics 224
=[1,0.5], end_points=[0.2,3], output='slope_field',
,color='red')
sage: pp=desolve_rk4(sqrt(y/x), y, ivar=x, ics 225
=[1,0.5], end_points=[0.2,3], output='slope_field',
,color='red')
```

Каждая из этих парабол касается координатных осей, на которых уравнение имеет особенности. Если двигаться вдоль широко раскрытой параболы из начальной точки $x_0 = 1$ к $x = +\infty$, см. рис. 7.5, то до точки касания с

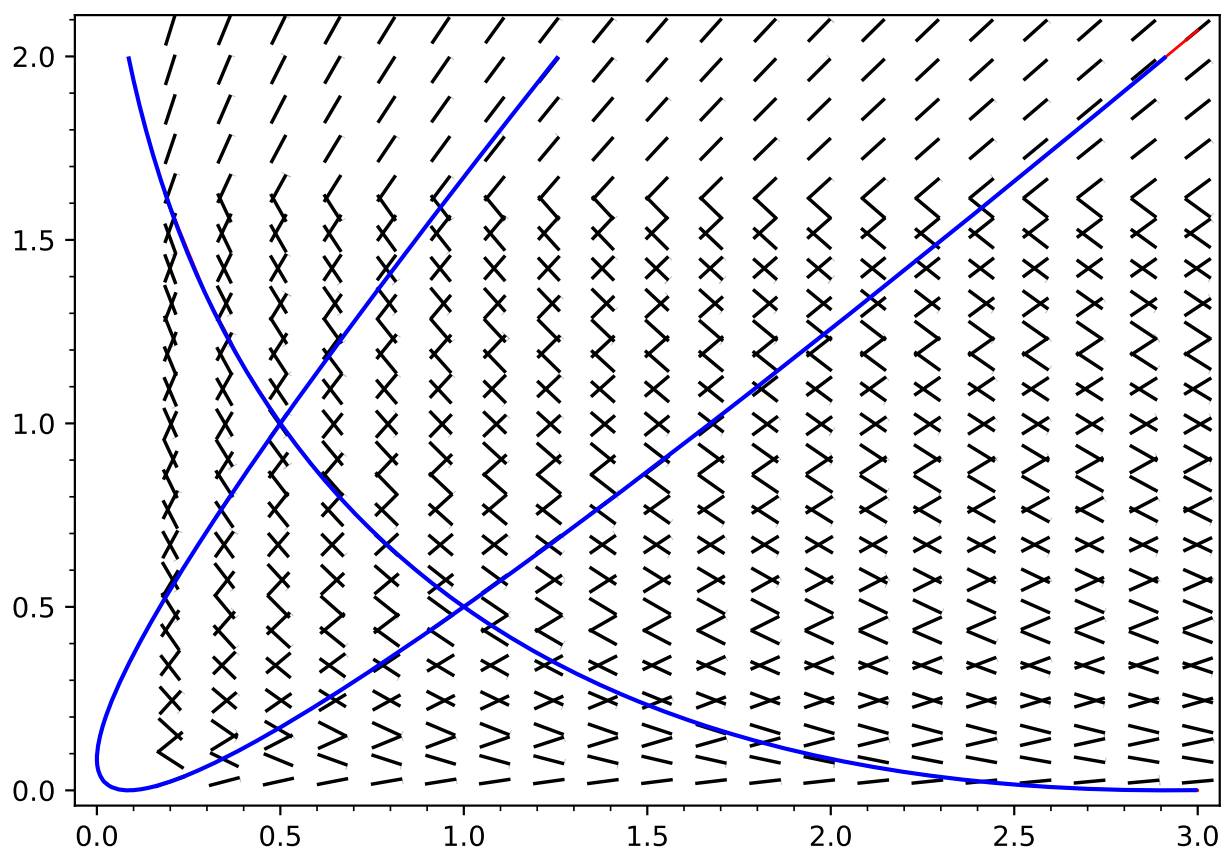


Рис. 7.4. Численное (красное) и аналитическое (синие) решения задачи Коши, на графике отмечено двузначное поле наклонов.

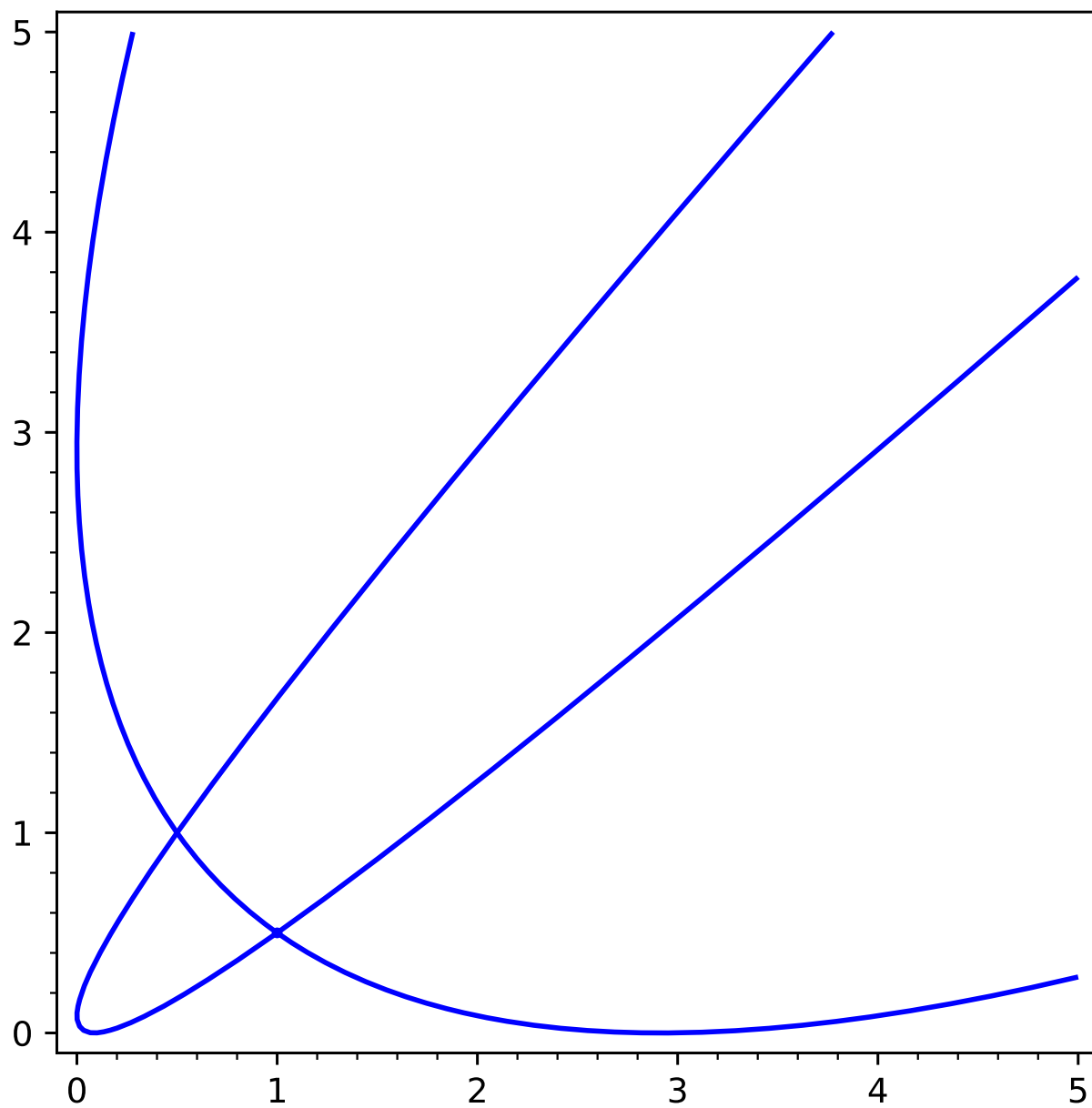


Рис. 7.5. Аналитические решения задачи Коши на большем интервале.

осью Ox кривая убывает и представляет решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}},$$

а после она возрастает и представляет решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Таким образом, в этой собой точке мы переходим с одной ветви дифференциального уравнения на другую.

В аналитической теории дифференциальных уравнений доказывают, что и в общем случае при пересечении дискриминантной кривой решение не покидает некоторой аналитической кривой, таким образом, сшивая интегральные кривые, пересекающие дискриминантную кривую в одной точке, получим одну аналитическую кривую. Таковой в рассмотренном примере является парабола, куски которой служат решениями уравнений

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Домашнее задание

Задачи: Филиппов, 290, 294, 255, 261, 297. Указ.: прочитать про решение уравнения Лагранжа в начале параграфа.

Лекция 8.

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

8.1. Системы дифференциальных уравнений

Уравнение n -го порядка всегда можно переписать как систему уравнений 1-го порядка. Напр., для уравнения 2-го порядка

$$F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0$$

можно рассмотреть производную $\dot{x}$ как новую функцию y , удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\dot{x} = y.$$

Тогда вместо одного уравнения 2-го порядка получится система 2-х уравнений 1-го порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ F(t, x, y, \dot{y}) = 0. \end{cases}$$

Хотя такая запись кажется более громоздкой, на практике она более удобна.

Чтобы решить систему уравнений 1-го порядка, скажем,

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t), \\ \dot{y} = g(x, y, t), \end{cases}$$

приближенно мы должны разбить рассматриваемый отрезок изменения переменной t на N частей длины Δt и заменить первые производные на конечные разности. В итоге получатся рекуррентные формулы для вычисления значений искомых функций

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + f(x_i, y_i, t_i)\Delta t, \\ y_{i+1} = y_i + g(x_i, y_i, t_i)\Delta t, \end{cases}$$

Мы замкнем систему, если добавим явно значения x и y в начальный момент.

Гипотеза 8.1. Имеется одна единственное решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t), \\ \dot{y} = g(x, y, t), \end{cases}$$

которое удовлетворяет двум начальным условиям

$$x|_{t=t_0} = x_0, \quad y|_{t=t_0} = y_0.$$

Это решение можно приближенно вычислить методом конечных разностей. Наконец, общее решение системы двух дифференциальных уравнений зависит от 2-х констант.

В Sage алгоритм приближенного решения реализован для систем, но не для уравнений n -го порядка.

Пример 8.1. Система Вольтерра-Лотки описывает динамику систем типа хищник/жертва (y/x).

$$\begin{cases} \dot{x} = (a - by)x, \\ \dot{y} = -(d - cx)y, \\ x|_{t=0} = x_0, \\ y|_{t=0} = y_0, \end{cases}$$

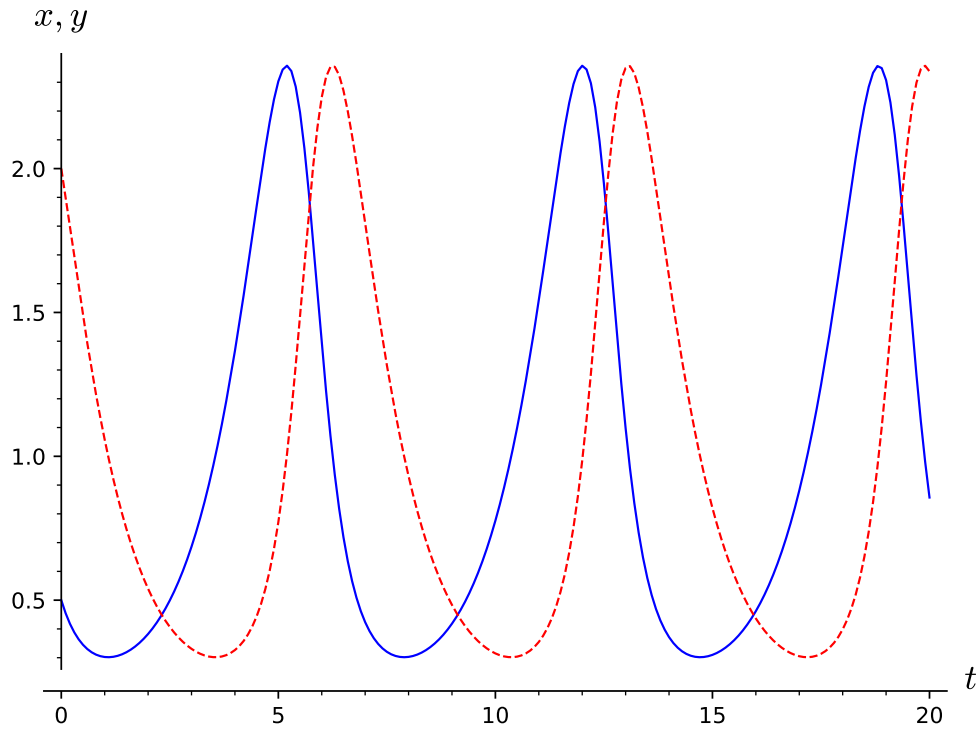


Рис. 8.1. Решение начальной задачи для системы Вольтерра-Лотки, число жертв x — сплошная линия, число хищников y — пунктирная.

Суть в том, что при устранении связи ($b = c = 0$) хищники вымирают, а численность жертв экспоненциально растет. Штатный способ решения в Sage:

```
sage: from sage.calculus.desolvers import                226
      desolve_system_rk4
sage: x,y,t=var('x,y,t')                                227
sage: P=desolve_system_rk4([x*(1-y),-y*(1-x)], [x,y],    228
      ics=[0,0.5,2], ivar=t, end_points=20)
sage: Q=[ [i,j] for i,j,k in P]                          229
sage: R=[ [i,k] for i,j,k in P]                          230
sage: line(Q)                                             231
Graphics object consisting of 1 graphics primitive      232
```

При желании и систему можно и наоборот свести систему к одному уравнению.

Пример 8.2.

$$\begin{cases} y' = -z, \\ z' = y. \end{cases}$$

Продифференцировав 1-ое уравнение, получим

$$y'' = -z' = y.$$

Поэтому всякое решение исходной системы состоит из решения y дифференциального уравнения

$$y'' + y = 0$$

и $z = -y'$.

Если закрыть глаза на чисто алгебраические проблемы с исключением неизвестных любую систему можно свести к одному уравнению. Напр., пусть имеется система

$$\begin{cases} F(x, y, z, y', z') = 0, \\ G(x, y, z, y', z') = 0, \end{cases}$$

Исключив переменную z' , найдем

$$R(x, y, z, y') = 0.$$

Продифференцировав его по x , получим

$$p + qy'' = 0,$$

где p и q зависят от x, y, z, y', z' . Из исходной системы можно выразить z и z' через x, y, y' , поэтому можно считать p и q функциями x, y, y' . Таким образом, всякое решение исходной системы состоит из двух функций y и z , первая удовлетворяет уравнению второго порядка

$$p + qy'' = 0,$$

а вторая выражается через нее, коль скоро z есть известная функция x, y, y' .

8.2. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Условимся обозначать столбцы строчными буквами $\hat{x}, \hat{y}$ и т.д., а квадратные матрицы — заглавными буквами $\hat{A}, \hat{B}$ и т.д. При этом элементы $\hat{x}$ будем обозначать как $x_1, \dots, x_k$ в общем случае, при $k = 2$ и $k = 3$ эти элементы будем обозначать как x, y и x, y, z соответственно. Элементы матрицы $\hat{A}$ будем обозначать как a_{ij} и пока считать заданными постоянными величинами. В дальнейшем для простоты мы будем считать $k = 2$, хотя все сказанное верно для любого k .

Систему вида

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x},$$

где $\hat{x}$ — столбец, элементами которого зависят от t , а $\hat{A}$ — матрица, образованная заданными постоянными числами, называют системой однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, образующими матрицу $\hat{A}$. В таком виде можно переписать, напр., систему двух уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y. \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases}$$

8.2.1. Матричная экспонента

Поглядев на уравнение

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x},$$

хочется сказать, что его решением является $e^{\hat{A}t}$. У нас есть единственный способ ввести экспоненту от матрицы, принять

$$e^{\hat{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \hat{A}^n = \hat{E} + t\hat{A} + \frac{t^2}{2}\hat{A}^2 + \dots$$

При этом мы держимся обычного соглашения, что

$$\hat{A}^0 = \hat{E}.$$

Получается, что $e^{\hat{A}t}$ — матрица $k \times k$.

Теорема 8.1. Решение начальной задачи

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x}, \quad \hat{x}|_{t=0} = \hat{x}_0$$

выражается при помощи матричной экспоненты

$$\hat{x} = e^{t\hat{A}} \cdot \hat{x}_0$$

при всех значениях t .

Замечание 8.1. Во избежание недоразумений, следует отметить, что формула

$$e^{t_1+t_2} = e^{t_1} \cdot e^{t_2}$$

для скалярного аргумента должна следовать из

$$e^{t_1+t_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t_1+t_2)^n}{n!}$$

и формулы бинома Ньютона

$$(t_1+t_2)^n = \sum C_n^m t_1^m t_2^{n-m}.$$

Эта формула остается в силе для аргумента $(t_1+t_2)\hat{A}$, поэтому

$$e^{(t_1+t_2)\hat{A}} = e^{t_1\hat{A}} \cdot e^{t_2\hat{A}} = e^{t_2\hat{A}} \cdot e^{t_1\hat{A}}.$$

В частности, решение начальной задачи

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x}, \quad \hat{x}|_{t=t_0} = \hat{x}_0$$

можно записать так

$$\hat{x} = e^{\hat{A}(t-t_0)} \cdot \hat{x}_0 = e^{\hat{A}t} \cdot e^{-\hat{A}t_0} \cdot \hat{x}_0.$$

В тоже время формула бинома не верна для произвольных двух матриц:

$$(\hat{A} + \hat{B})^n \neq \sum C_n^k \hat{A}^k \hat{B}^{n-k},$$

поскольку

$$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}.$$

Поэтому

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} \neq e^{\hat{A}} \cdot e^{\hat{B}}.$$

Доказательство. Чтобы доказать сходимость ряда для матричной экспоненты мы нуждаемся в обобщении понятия модуля. Нормой $\|\hat{A}\|$ матрицы $\hat{A}$ будем называть положительное число, равное максимальному из модулей ее элементов, то есть

$$\|\hat{A}\| = \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Тогда

$$\|\hat{A} + \hat{B}\| \leq \|\hat{A}\| + \|\hat{B}\|$$

и

$$\|\hat{A}\hat{B}\| \leq \|\hat{A}\| \|\hat{B}\|.$$

Тогда

$$\|\hat{A}^n\| \leq \|\hat{A}\|^n$$

и

$$\left\| \frac{t^n}{n!} \hat{A}^n \right\| \leq \frac{(k|t|\|\hat{A}\|)^n}{n!}.$$

Поправив в доказательстве теоремы о мажоранте модули на нормы, мы видим, что ряд для $e^{t\hat{A}}$ сходится при всех t , а ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k|t|)^n}{n!} \|\hat{A}\|^n = e^{k|t|\|\hat{A}\|},$$

служит для него мажорантой.

При $t = 0$ матрица $e^{\hat{A}t}$ равна единичной матрицы и поэтому выполнение начальных условий

$$\hat{x}|_{t=0} = \hat{x}_0$$

очевидно. Дифференцируя ряд для экспоненты почленно, найдем, что

$$\frac{de^{\hat{A}t}}{dt} = \hat{A} + \frac{2t}{2!}\hat{A}^2 + \frac{3t^2}{3!}\hat{A}^3 + \dots = \hat{A}e^{\hat{A}t}.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}e^{\hat{A}t}\hat{x}_0 = \left(\frac{d}{dt}e^{\hat{A}t}\right)\hat{x}_0 = \hat{A}e^{\hat{A}t}\hat{x}_0.$$

то есть

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x},$$

что и тр. д. □

Пример 8.3. Решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

с начальными условиями

$$x = y = 1 \quad (\text{при } t = 0)$$

дается формулой

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \exp\left(t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ограничившись первыми 100 членами в выражении для матричной экспоненты, мы можем построить график решения, см. рис. 8.2.

```
sage: t,n=var('t,n') 233
```

```
sage: A=matrix([[0,1],[-1,0]]) 234
```

```
sage: Y=sum(A^n*t^n/factorial(n) for n in range 235  
(0,100))
```

```
sage: x=Y[0][0]+Y[0][1] 236
```

```
sage: y=Y[1][0]+Y[1][1] 237
```

Разумеется, при $t \simeq 32$ проявляется ошибка округления, которая всегда проявляется при работе с рядами для экспоненты¹, см. рис. 8.3.

В данном случае для матричной экспоненты можно выписать выражение в элементарных функциях скалярного аргумента. В самом деле, систе-

¹Цыбуллин И. Как не стоит вычислять матричную экспоненту. // habrahabr.ru.

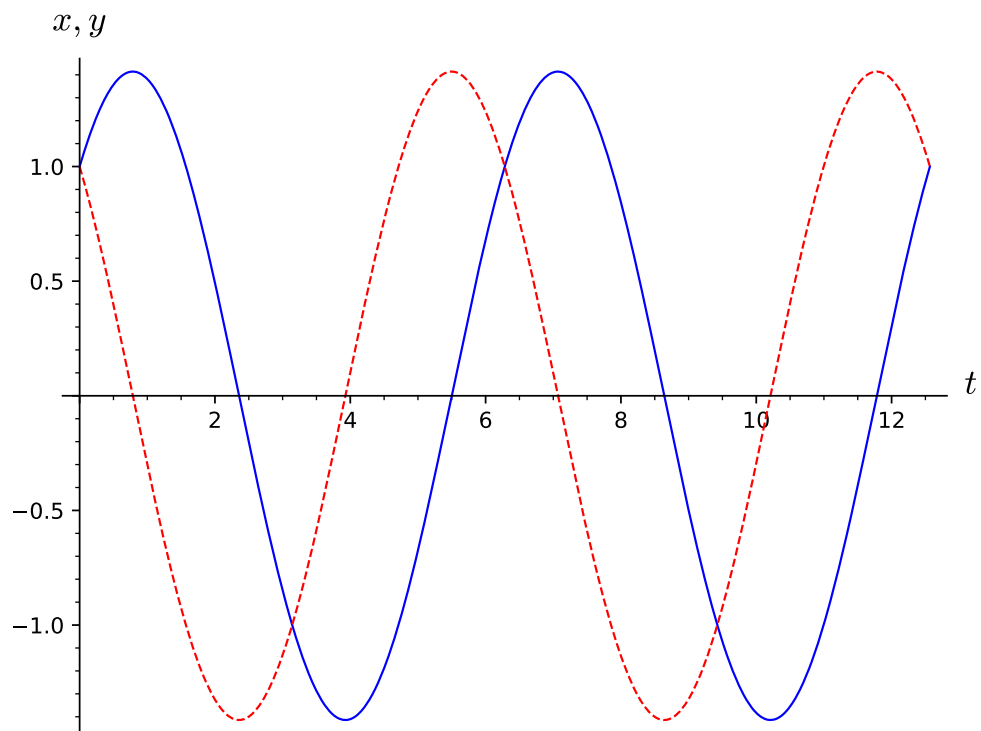


Рис. 8.2. Решение начальной задачи из примера 8.3, x — сплошная линия, y — пунктирная.

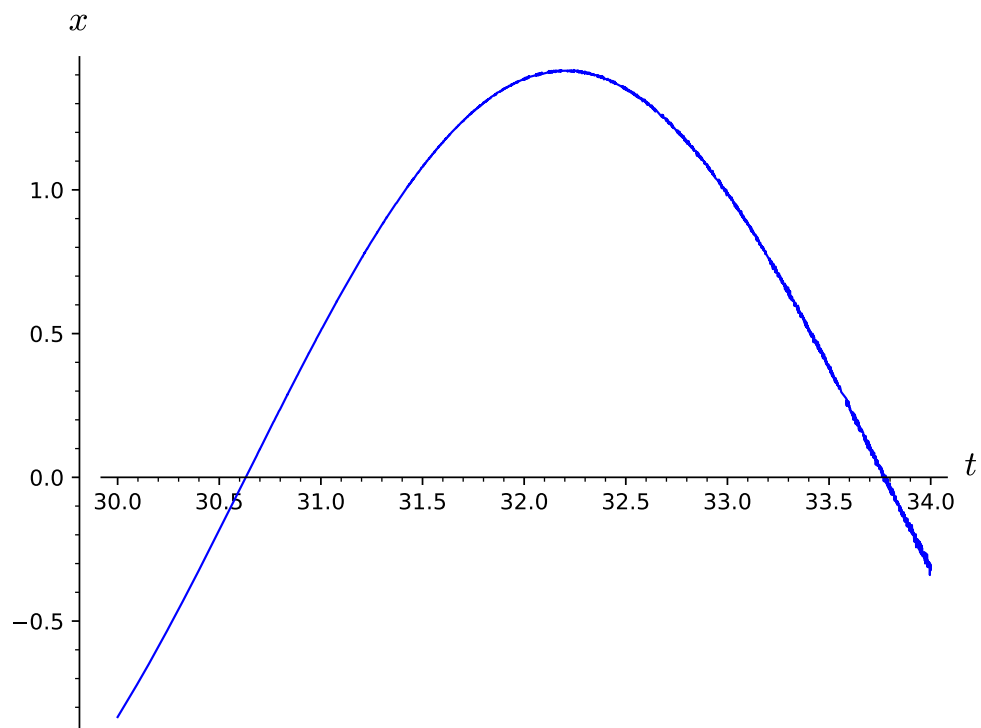


Рис. 8.3. Решение начальной задачи из примера 8.3 при больших t .

му

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

можно свести к дифференциальному уравнению

$$\ddot{x} + x = 0,$$

а потому ее решением будет

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

Переписывая эти формулы в матричном виде: начальная задача

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

имеет решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Поэтому должно быть верно равенство

$$\exp t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Вычислим больше членов:

```
sage: sum(A^n*t^n/factorial(n) for n in range(0,10)) 238
```

```
[      1/40320*t^8 - 1/720*t^6 + 1/24*t^4 - 1/2*t^2 + 239
 1  1/362880*t^9 - 1/5040*t^7 + 1/120*t^5 - 1/6*t^3
 + t]
```

```
[-1/362880*t^9 + 1/5040*t^7 - 1/120*t^5 + 1/6*t^3 - 240
 t      1/40320*t^8 - 1/720*t^6 + 1/24*t^4 - 1/2*t^2
 + 1]
```

```
sage: taylor(cos(t),t,0,10) 241
```

```
-1/3628800*t^10 + 1/40320*t^8 - 1/720*t^6 + 1/24*t^4 242
 - 1/2*t^2 + 1
```

```
sage: taylor(sin(t),t,0,10) 243
1/362880*t^9 - 1/5040*t^7 + 1/120*t^5 - 1/6*t^3 + t 244
```

Хорошо видно, что элементами матрицы оказываются многочлены Тейлора для косинуса и синуса.

Пример 8.4. Система

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -x + 2y, \end{cases}$$

с начальными условиями

$$x = y = 1 \quad (\text{при } t = 0)$$

имеет своим решением

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \exp t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
sage: t,n=var('t,n') 245
sage: A=matrix([[1,1],[-1,2]]) 246
sage: Y=sum(A^n*t^n/factorial(n) for n in range 247
(0,100))
sage: x=(Y*matrix([[1],[1]]))[0][0] 248
sage: y=(Y*matrix([[1],[1]]))[1][0] 249
```

Нарисовать график решения в данном случае трудно из-за того, что оно экспоненциально растет. Поэтому на рис. 8.4 изображен график $\ln|x|$, по которому видно, что x растет как $e^{3/2t}$. После выделения растущего члена, можно построить график $xe^{-3/2t}$ и обнаружить, что он похож на синусоиду.

8.2.2. Матричная экспонента симметричной матрицы

Матрица $\hat{A}$ с вещественными элементами называется симметричной, если $a_{ij} = a_{ji}$. Как известно, все собственные значения такой матрицы являются

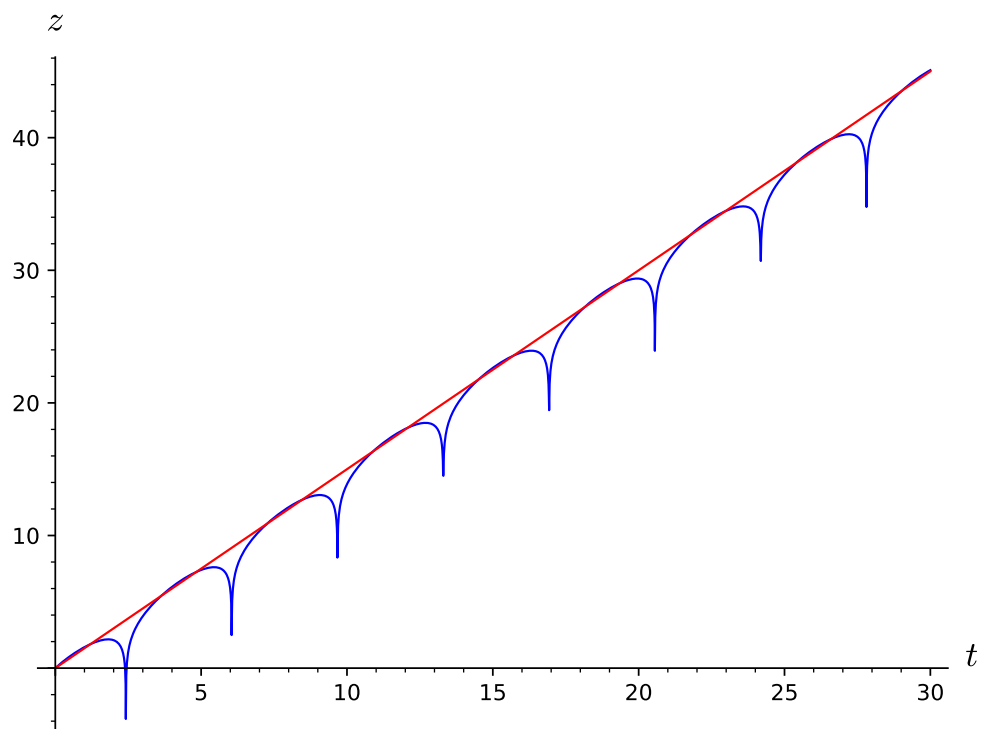


Рис. 8.4. График функции $z = \ln |x|$ для решения начальной задачи из примера 8.4.

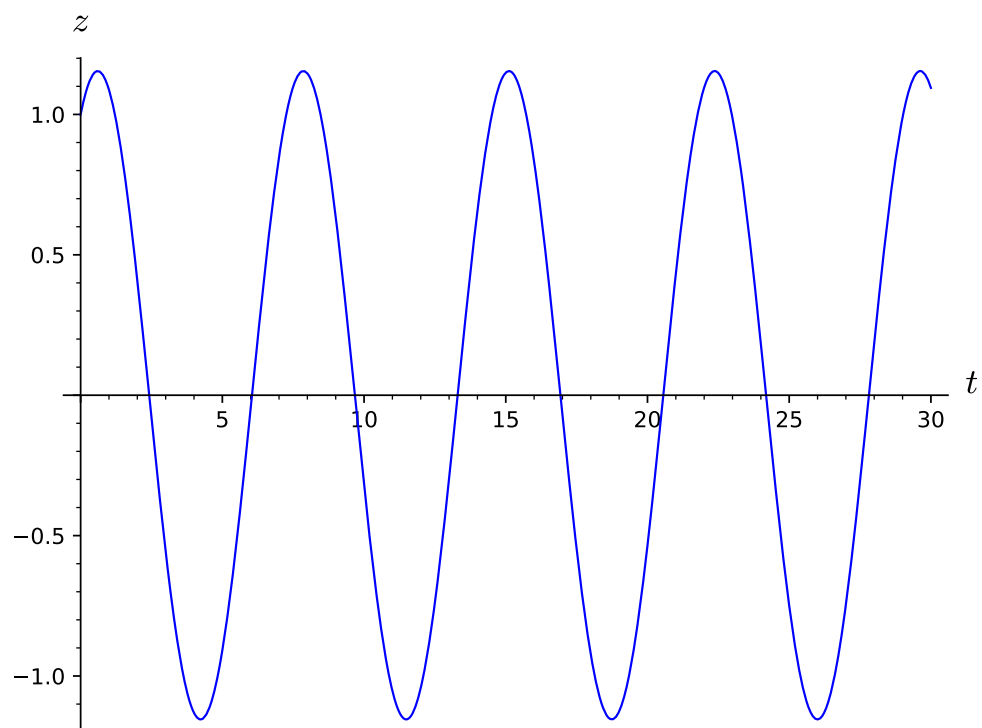


Рис. 8.5. График функции $z = xe^{-3/2t}$ для решения начальной задачи из примера 8.4.

вещественными числами, а собственные вектора такой матрицы образуют ортонормированный базис линейного пространства столбцов над полем $\mathbb{R}$. Обозначив как $\hat{L}$ матрицу, столбцами которой служат эти собственные вектора, мы можем привести матрицу к диагональному виду. Напр., при $k = 2$ верно

$$\hat{A} = \hat{L} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \hat{L}^T.$$

Используя это представление нетрудно вычислить экспоненту. Начнем с того, что

$$\hat{A}^2 = \hat{L} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \hat{L}^T \hat{L} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \hat{L}^T = \hat{L} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^2 \hat{L}^T = \hat{L} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \hat{L}^T$$

и вообще

$$\hat{A}^n = \hat{L} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \hat{L}^T$$

Отсюда

$$\exp t\hat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \hat{A}^n = \hat{L} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \right) \hat{L}^T = \hat{L} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \hat{L}^T.$$

Тем же путем для вычисления матричной экспоненты от симметричной матрица $\hat{A}$ размера $k \times k$.

Теорема 8.2. Пусть $\hat{A}$ — симметричная матрица $k \times k$ с вещественными элементами, $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$ — ее собственные значения, а $\hat{L}$ — матрица, столбцами которой служат ее собственные вектора, тогда

$$e^{t\hat{A}} = \hat{L} \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_k t}) \hat{L}^T.$$

Пример 8.5. Матрицей системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + y, \end{cases}$$

служит

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения являются корнями квадратного уравнения

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

то есть

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3.$$

Элементы первого собственного вектора

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0, \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

то есть

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Ортогональный ему второй собственный вектор равен

$$\hat{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

и

$$\exp t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

В настоящее время системы компьютерной алгебры умеют вычислять экспоненту от матрицы не хуже, чем от комплексного числа. Сравним наше выражение с тем, что возвращает Sage:

```

sage: A=matrix([[1,2],[2,1]]) 250
sage: L=matrix([[1,1],[-1,1]])/sqrt(2) 251
sage: L*matrix([[exp(-t),0],[0,exp(3*t)]])*(L. 252
transpose())
[1/2*e^(3*t) + 1/2*e^(-t) 1/2*e^(3*t) - 1/2*e^(-t)] 253
[1/2*e^(3*t) - 1/2*e^(-t) 1/2*e^(3*t) + 1/2*e^(-t)] 254
sage: exp(t*A) 255
[1/2*(e^(4*t) + 1)*e^(-t) 1/2*(e^(4*t) - 1)*e^(-t)] 256
[1/2*(e^(4*t) - 1)*e^(-t) 1/2*(e^(4*t) + 1)*e^(-t)] 257

```

В былые времена представление $e^{t\hat{A}}$ через элементарные функции скалярного аргумента казалось важным, поскольку не было другого доступного способа ее вычисления. Однако выражение

$$e^{t\hat{A}} = \hat{L} \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_k t}) \hat{L}^T$$

можно употребить и для качественного анализа поведения решения системы

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x}.$$

Всякое решение этой задачи является линейной комбинацией экспонент $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_k t}$. В частности, если все собственные значения матрицы $\hat{A}$ отрицательны, все решения дифференциального уравнения стремятся к нулю с ростом t .

Выпишем эту комбинацию явно, ограничившись для простоты случаем $k = 2$.

$$\hat{x} = e^{t\hat{A}}\hat{x}_0 = \hat{L} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \hat{L}^T \hat{x}_0 = e^{\lambda_1 t} \hat{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{L}^T \hat{x}_0 + e^{\lambda_2 t} \hat{L} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{L}^T \hat{x}_0$$

или

$$\hat{x} = e^{\lambda_1 t} \hat{h}_1 + e^{\lambda_2 t} \hat{h}_2.$$

Выразим вектор

$$\hat{h}_1 = \hat{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{L}^T \hat{x}_0$$

через собственные векторы матрицы $\hat{A}$. Строками матрицы $\hat{L}^T$ служат собственные векторы $\hat{e}_1$ и $\hat{e}_2$, поэтому

$$\hat{L}^T \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} (\hat{e}_1, \hat{x}_0) & (\hat{e}_1, \hat{x}_0) \\ (\hat{e}_2, \hat{x}_0) & (\hat{e}_2, \hat{x}_0) \end{pmatrix},$$

отсюда

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\hat{e}_1, \hat{x}_0) & (\hat{e}_1, \hat{x}_0) \\ (\hat{e}_2, \hat{x}_0) & (\hat{e}_2, \hat{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\hat{e}_1, \hat{x}_0) & (\hat{e}_1, \hat{x}_0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\hat{h}_1 = \hat{L} \begin{pmatrix} (\hat{e}_1, \hat{x}_0) & (\hat{e}_1, \hat{x}_0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\hat{e}_1, \hat{x}_0)l_{11} \\ (\hat{e}_1, \hat{x}_0)l_{21} \end{pmatrix} = (\hat{e}_1, \hat{x}_0) \begin{pmatrix} l_{11} \\ l_{21} \end{pmatrix} = (\hat{e}_1, \hat{x}_0)\hat{e}_1.$$

Получив аналогичное выражение для $\hat{h}_2$, в итоге имеем

$$\hat{x} = (\hat{e}_1, \hat{x}_0)e^{\lambda_1 t}\hat{e}_1 + (\hat{e}_2, \hat{x}_0)e^{\lambda_2 t}\hat{e}_2.$$

Поскольку $\hat{x}_0$ — столбец начальных данных, можно описать общее решение однородной системы

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x}$$

как линейную комбинацию частных ее решений

$$e^{\lambda_i t}\hat{e}_i,$$

коллинеарных с собственными векторами матрицы $\hat{A}$.

Теорема 8.3. Если $\hat{A}$ — симметричная матрица с вещественными элементами, то общее решение системы однородных линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x}$$

дается формулой

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^k C_i e^{\lambda_i t} \hat{e}_i;$$

здесь $C_1, \dots, C_k$ — неопределенные постоянные, $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_k$ — базис из собственных векторов матрицы $\hat{A}$, а $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — отвечающие им собственные значения.

В связи с этим предлагают такой рецепт решения начальной задачи:

- 1) найти с.з. и с.в. матрицы системы: $\lambda_1, \dots$ и $\hat{e}_1, \dots$;
- 2) составить общее решение системы

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^k C_i e^{\lambda_i t} \hat{e}_i;$$

- 3) подобрать значения констант $C_1, \dots, C_k$ по начальным данным.

. Если требуется найти только общее решение, то последний алгебраически утомительный пункт можно сократить.

8.3. Неоднородные линейные системы

Обратимся теперь к начальной задаче для неоднородной системе линейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{f}(t), \quad \hat{x}|_{t=0} = \hat{x}_0$$

где $\hat{f}$ — заданный столбец, зависящий от t любым образом. Если бы этот столбец был тождественно равен нулю, то система была бы однородной, а ответ выписывался бы сразу

$$\hat{x} = e^{\hat{A}t} \hat{x}_0.$$

Будем искать решение неоднородной задачи при помощи подстановки

$$\hat{x} = e^{\hat{A}t} \hat{y},$$

то есть заменив постоянный столбец $\hat{x}_0$ на переменный $\hat{y}$; такой способ отыскания решения неоднородной системы называют методом вариации постоянных и связывают с именем Лагранжа. Для $\hat{y}$ имеем начальную задачу

$$e^{\hat{A}t} \dot{\hat{y}} + \hat{A} e^{\hat{A}t} \hat{y} = \hat{A} e^{\hat{A}t} \hat{y} + \hat{f}(t), \quad \hat{y}|_{t=0} = \hat{x}_0$$

или, после упрощений,

$$\dot{\hat{y}} = e^{-\hat{A}t} \hat{f}(t), \quad \hat{y}|_{t=0} = \hat{x}_0.$$

Решение этой задачи дается квадратурой

$$\hat{y} = \int e^{-\hat{A}t} \hat{f}(t) dt = \int_{\tau=0}^t e^{-\hat{A}\tau} \hat{f}(\tau) d\tau + \hat{x}_0,$$

отсюда

$$\hat{x} = \int_{\tau=0}^t e^{\hat{A}(t-\tau)} \hat{f}(\tau) d\tau + e^{\hat{A}t} \hat{x}_0.$$

По этой формуле всегда можно вычислить решение неоднородной задачи в квадратурах.

Пример 8.6. Перепишем начальную задачу

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 1, \\ \dot{y} = 2x + y + t, \\ x|_{t=0} = 1, y|_{t=0} = 2. \end{cases}$$

в матричном виде

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ее решение дается формулой

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_{\tau=0}^t e^{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}(t-\tau)} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \end{pmatrix} d\tau + e^{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим подынтегральный столбец:

<code>sage: var('t,tau')</code>	258
<code>(t, tau)</code>	259
<code>sage: assume(t>0)</code>	260

```

None 261
sage: A=matrix([[1,2],[2,1]]) 262
sage: exp(t*A) 263
[1/2*(e^(4*t) + 1)*e^(-t) 1/2*(e^(4*t) - 1)*e^(-t)] 264
[1/2*(e^(4*t) - 1)*e^(-t) 1/2*(e^(4*t) + 1)*e^(-t)] 265
sage: exp(A*(t-tau))*matrix([[1],[tau]]) 266
[1/2*tau*(e^(4*t) - e^(4*tau))*e^(-t - 3*tau) + 267
 1/2*(e^(4*t) + e^(4*tau))*e^(-t - 3*tau)]
[1/2*tau*(e^(4*t) + e^(4*tau))*e^(-t - 3*tau) + 268
 1/2*(e^(4*t) - e^(4*tau))*e^(-t - 3*tau)]

```

Sagemath не умеет интегрировать столбцы, поэтому придется интегрировать их поэлементно:

```

sage: (matrix([[1,0]])*(exp(A*(t-tau))*matrix([[1],[ 269
tau]]))))
[1/2*tau*(e^(4*t) - e^(4*tau))*e^(-t - 3*tau) + 270
 1/2*(e^(4*t) + e^(4*tau))*e^(-t - 3*tau)]
sage: type(matrix([[1,0]])*(exp(A*(t-tau))*matrix 271
([[1],[tau]])))
<class 'sage.matrix.matrix_symbolic_dense.' 272
Matrix_symbolic_dense'>
sage: (matrix([[1,0]])*(exp(A*(t-tau))*matrix([[1],[ 273
tau]]))))).eigenvalues()[0]
1/2*tau*e^(3*t - 3*tau) - 1/2*(tau - 1)*e^(-t + tau) 274
+ 1/2*e^(3*t - 3*tau)
sage: type((matrix([[1,0]])*(exp(A*(t-tau))*matrix 275
([[1],[tau]]))))).eigenvalues()[0]
<class 'sage.symbolic.expression.Expression'> 276
sage: x = integral((matrix([[1,0]])*(exp(A*(t-tau))* 277
matrix([[1],[tau]]))))).eigenvalues()[0],(tau,0,t))

```

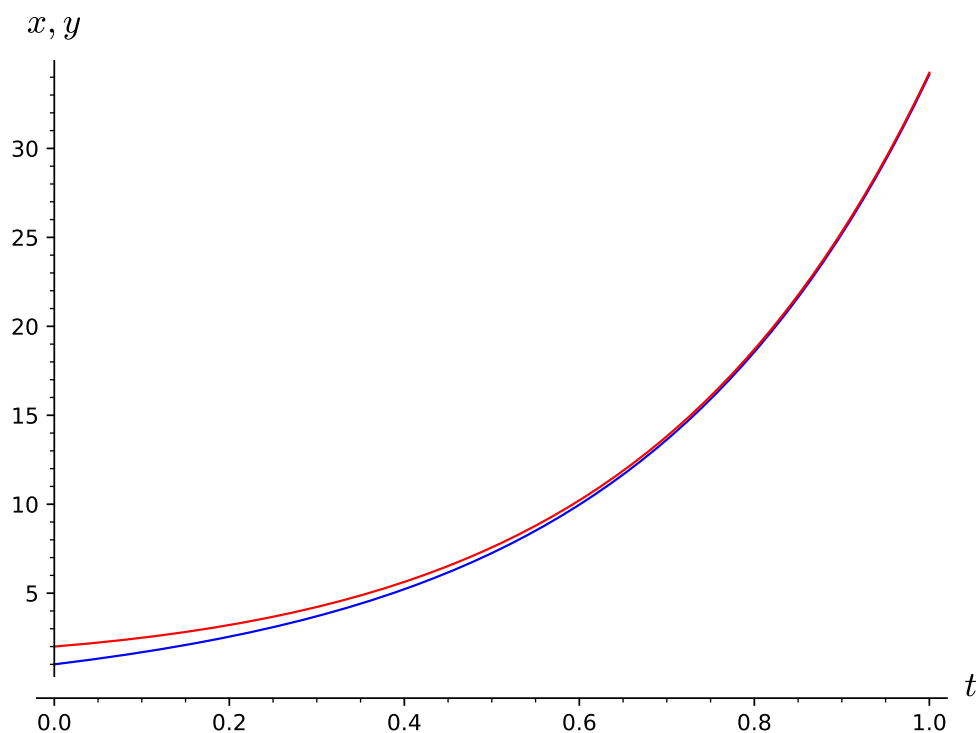


Рис. 8.6. График решения начальной задачи из примера 8.6.

```

+ (matrix([[1,0]])*(exp(A*t)*matrix([[1],[2]]))).
eigenvalues()[0]
sage: y = integral((matrix([[0,1]])*(exp(A*(t-tau))*
matrix([[1],[tau]]))).eigenvalues()[0],(tau,0,t))
+ (matrix([[0,1]])*(exp(A*t)*matrix([[1],[2]]))).
eigenvalues()[0]
sage: x.full_simplify()
-1/18*(2*(6*t - 7)*e^t - 31*e^(4*t) + 27)*e^(-t)
sage: y.full_simplify()
1/18*(2*(3*t - 11)*e^t + 31*e^(4*t) + 27)*e^(-t)

```

Домашнее задание

1. Найдите решение начальной задачи

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + 5y, \end{cases}$$

с начальными условиями

$$x|_{t=0} = 1, \quad y|_{t=0} = 2.$$

2. Найдите решение начальной задачи

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + 5y, \end{cases}$$

с начальными условиями

$$x|_{t=1} = 1, \quad y|_{t=1} = 2.$$

3. Найдите решение начальной задачи

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + z, \\ \dot{y} = 2x + 5y, \\ \dot{z} = x + 5z, \end{cases}$$

с начальными условиями

$$x|_{t=0} = 1, \quad y|_{t=0} = 2, \quad z|_{t=0} = 0.$$

4. Найдите решение начальной задачи

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + \sin t, \\ \dot{y} = -2x + 5y, \end{cases}$$

с начальными условиями

$$x|_{t=1} = 1, \quad y|_{t=1} = 2.$$

5. Составьте общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = x + 5y. \end{cases}$$

Обратите внимание на то, что собственных векторов для этого не хватит.

Литература

- [1] *Егоров Д.Ф.* Интегрирование дифференциальных уравнений. М., 1909.
- [2] *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. 5-е изд. URSS, 2013. ISBN 978-5-397-03637-5.
- [3] Sage: solving ordinary differential equations. // www.sagemath.org, 2005–2016.
- [4] История математики. Под. ред. А.П. Юшкевича. Т. 2. М.: Наука, 1970.
- [5] Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Art. II-A-4a. Paris-Leipzig, 1910.
- [6] *Jiří Lebl.* Notes on Diffy Qs: Differential Equations for Engineers. 2013. // Доступно на <http://www.jirka.org/diffyqs> под CC-BY-SA.
- [7] *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. Изд. 11, испр., обновл. URSS, 2016. ISBN 978-5-382-01622-1.
- [8] *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения. ЛКИ, 2013. ISBN 78-5-382-01491-3, 978-5-382-01494-4.
- [9] *Калиткин Н.Н.* Численные методы. 2-е изд., исправленное. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. ISBN 978-5-9775-0500-0.