Линейные и билинейные формы в гильбертовых пространствах

К.П. Ловецкий, М.Д. Малых, Л.А. Севастьянов

Москва: Изд-во РУДН, 2023

Ловецкий, К.П.

Линейные и билинейные формы в гильбертовых пространствах / К.П. Ловецкий, М.Д. Малых, Л.А. Севастьянов. — Москва : РУДН, 2023. — 28 с. : ил.

В пособии изложены основы теории линейных и билинейных форм в гильбертовых пространствах, необходимые при исследовании краевых задач математической физики по методу конечных элементов.

Предназначено для студентов математических и естественнонаучных специальностей университетов.

Издание подготовлено на кафедре прикладной информатики и теории вероятностей РУДН.

Оглавление

Предисловие

Настоящее пособие было написано в 2003 году на основе первых глав замечательной книги Ф. Штуммеля «Граничные задачи и задачи на собственные значения в пространствах Соболева» [1] и адресовано молодым коллегам, которые только начинали изучать применения функционального анализа к краевым задачам математической физики. Авторы признательны его первым читателям — А.А. Панину и Ю.В. Мухартовой, с тех давних пор ставшими доцентами каф. математики физического факультета МГУ, сделавших ряд важных замечаний по тексту.

Тогда это пособие было размещено на моем сайте, но не было издано. Однако оно не утратило актуальности и будет полезно для студентов РУДН, изучающих метод конечных элементов для решений задач математической физики как теоретическое дополнение к нашему практическому курсу «Компьютерные методы математической физики»[2].

Авторы,
11 января 2023 г.

[1] *Stummel F.* Rand- und Eigenwertaufgaben in Sobolewschen Räumen. Springer, 1969.

[2] *Васильев С.А.* и др. Компьютерные методы математической физики. М: РУДН, 2020

Глава 1.

Ограниченные билинейные формы в гильбертовом пространстве

1.1. Гильбертово пространство

Пусть $\mathfrak{H}$ — векторное (линейное) пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Под *билинейной формой* b мы понимаем отображение, которое каждой паре $u, v \in \mathfrak{H}$ ставит в соответствие некоторое комплексное число $b(u, v)$, причем это отображение обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} b(\alpha u + \beta v, w) &= \alpha b(u, w) + \beta b(v, w), \\ b(u, \alpha v + \beta w) &= \overline{\alpha} b(u, w) + \overline{\beta} b(v, w) \end{aligned} \tag{1.1}$$

для любых $u, v, w \in \mathfrak{H}$ и любых комплексных чисел α и β. Для любой билинейной формы b мы определим соответствующую *квадратичную форму*, положив

$$b(u) = b(u, u), \quad u \in \mathfrak{H}. \tag{1.2}$$

Билинейная форма называется симметричной, если

$$b(u, v) = \overline{b(v, u)}, \quad u, v \in \mathfrak{H}. \tag{1.3}$$

В этом случае соответствующая квадратичная форма принимает только вещественные значения. Симметричная билинейная форма b и соответствующая вещественнозначная квадратичная форма b называются положительно определенными при выполнении условия:

$$b(u,u) = b(u) \geq 0, \quad u \in \mathfrak{H}, \tag{1.4}$$

и строго положительно определенными, если b — положительно определенная и $b(u,u) = b(u) = 0$ только в случае $u = 0$.

Пусть $(.,.)$ — положительно определенная билинейная форма. Обозначим через $||.||$ квадратный корень из соответствующей положительной квадратичной формы:

$$||u|| = (u,u)^{1/2}, \quad u \in \mathfrak{H},$$

тогда справедливо неравенство Шварца:

$$|(u,v)| \leq ||u||||v||, \quad u,v \in \mathfrak{H}, \tag{1.5}$$

и неравенство треугольника:

$$||u+v|| \leq ||u|| + ||v||, \quad u,v \in \mathfrak{H}. \tag{1.6}$$

Поэтому $||.||$ задает полунорму на $\mathfrak{H}$. Если симметричная форма $(.,.)$ строго положительна, то ее называют *скалярным произведением*. В этом случае $(u,u) = ||u||^2$ равно нулю тогда и только тогда, когда $u = 0$, поэтому $||.||$ задает *норму* на $\mathfrak{H}$.

Векторное пространство $\mathfrak{H}$, на котором задано скалярное произведение, называют *предгильбертовым пространством*. Предгильбертово пространство называют полным, если для любой последовательности Коши элементов $u_j \in \mathfrak{H},\ j = 1,2,\ldots,$

$$||u_j - u_k|| \to 0 \quad (j,k \to \infty) \tag{1.7}$$

найдется такой элемент $u \in \mathfrak{H}$, что

$$u_j \to u: \quad ||u_j - u|| \to 0 \quad (j \to \infty) \tag{1.8}$$

Полное предгильбертово прострнство называют также *гильбертовым простарнтсвом.*

Любое предгильбертово прострнство можно превратить в гильбертово, добавив к его элементам пределы всемозможных последовтальностей Коши. Этот процес называют *замыканием* (пополнением) предгильбертова пространства и состоит он в следующем.

Вместо заданного предгильбертвова пространства $\mathfrak{V}$ рассмотрим векторное пространство $\mathfrak{H}$, элементами которого являются последовательности Коши $u = (u_1,\ u_2,\ \ldots)$ пространства $\mathfrak{V}$, причем элементы $u, v \in \mathfrak{H}$ считаются равными, если последовательности $||u_n - v_n|| \to 0$. Скалярное произведение на $\mathfrak{H}$ введем как предел

$$(u, v)_{\mathfrak{H}} = \lim_{n\to\infty}(u_n, v_n),$$

и тогда

$$||u||_{\mathfrak{H}} = \lim_{n\to\infty}||u_n||$$

Теорема 1. Пространство $\mathfrak{H}$ является гильбертовым.

Доказательство. Пусть $\{u^{(n)} = (u_1^{(n)},\ u_2^{(n)}, \ldots)\}$ — произвольная последовательность Коши элементов $\mathfrak{H}$. Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$. По условию найдется такое $N(\varepsilon)$, что при любых $n, m > N$ верно

$$||u^{(m)} - u^{(n)}|| = \lim_{k=\infty}||u_k^{(m)} - u_k^{(n)}|| < \varepsilon/2$$

а значит, и такое $K(\varepsilon)$, что при $k > K$

$$||u_k^{(m)} - u_k^{(n)}|| < \varepsilon$$

В частности при $n, k > M = \max(K, N)$ и $m = k$ имеем

$$||u_k^{(k)} - u_k^{(n)}|| < \varepsilon \tag{1.9}$$

Поскольку для произольного ε нашлось такое M, что при любых $n, m > M$ верно

$$||u_m^{(m)} - u_n^{(n)}|| \leq ||u_m^{(m)} - u_m^{(n)}|| + ||u_n^{(n)} - u_m^{(n)}|| < 2\varepsilon,$$

последоватльность $\{u_1^{(1)},\, u_2^{(2)}, \dots\}$ элементов $\mathfrak{V}$ является последовательностью Коши, а значит

$$u = \{u_1^{(1)},\, u_2^{(2)}, \dots\} \in \mathfrak{H}.$$

В силу неравенсва (1.9) при любом заданном ε

$$||u - u^{(n)}|| = \lim_{k=\infty} ||u_k^{(k)} - u_k^{(n)}|| < \varepsilon$$

при $n > M(\varepsilon)$, то есть u — предел последоватльности $u^{(n)}$. Значит, любая последовательность Коши в $\mathfrak{H}$ имеет предел, и $\mathfrak{H}$, стало быть, — гильбертво.

□

Пространство $\mathfrak{V}'$ всех последовательностей, сходящихся к элементам $\mathfrak{V}$, вложено в пространство $\mathfrak{H}$. Ясно, что между элементами $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{V}'$ существует взаимно однозначное соответствие, поэтому обычно, допуская некоторую вольность, их отождествляют. Тогда можно сказать, что векторное простррнство $\mathfrak{V}$ является подмножеством в гильбертовом простррнстве $\mathfrak{H}$ и любой элемент $\mathfrak{H}$ является пределом некоторой последоватльности элементов $\mathfrak{V}' = \mathfrak{V}$, поэтому $\mathfrak{H}$ — замыкание $\mathfrak{V}$.

1.2. Ограниченные билинейные формы

Пусть $\mathfrak{H}$ — предгильбертово пространство и b билинейная форма на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$. Тогда b называют *ограниченной билинейной формой*, если существует такое число $\beta > 0$, что

$$|b(u,v)| \le \beta ||u|| ||v||, \quad u, v \in \mathfrak{H}. \tag{1.10}$$

Аналогично квадратичную форму, соответствующую билинейной форме b, называют ограниченной, если существует такое число $\beta' > 0$, что

$$|b(u)| \le \beta' ||u||^2, \quad u \in \mathfrak{H}. \tag{1.11}$$

Наименьшее число β, для которого справедливо неравенство (1.10), называют нормой $||b||$ билинейной формы b на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$. Для нормы $||b||$ справедливо представление:

$$||b|| = \sup_{u,v\in\mathfrak{H},\, u\neq 0, v\neq 0} \frac{|b(u,v)|}{||u||||v||} = \sup_{u,v\in\mathfrak{H},\, ||u||=||v||=1} |b(u,v)|. \tag{1.12}$$

Аналогично наименьшее число β', для которого справедливо неравенство (1.11), называют нормой $||b||_1$ квадратичной формы и мы имеем

$$||b||_1 = \sup_{u\in\mathfrak{H},\, u\neq 0} \frac{|b(u)|}{||u||^2} = \sup_{u\in\mathfrak{H},\, ||u||=1} |b(u)|. \tag{1.13}$$

На векторных пространствах над полем комплексных чисел выполняется следующее важное соотношение между билинейной формой и соответствующей ей квадратичной формой:

$$b(u,v) = \frac{1}{4}\left\{b(u+v) - b(u-v) + ib(u+iv) - ib(u-iv)\right\} \tag{1.14}$$

при $u, v \in \mathfrak{H}$. Поэтому на предгильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ можно доказать следующее предложение.

Теорема 2. Билинейная форма b на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ ограничена тогда и только тогда, когда ограничена соответствующая квадратичная форма, и в этом случае верно

$$||b||_1 \leq ||b|| \leq 2||b||_1. \tag{1.15}$$

Доказательство. (i) Пусть билинейная форма b на $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ ограничена, тогда

$$|b(u,v)| \leq ||b|| \cdot ||u|| \cdot ||v||, \quad u, v \in \mathfrak{H}.$$

Поэтому в силу (1.13) ограничена и соответствующая квадратичная форма, причем $||b||_1 \leq ||b||$.

(ii) Пусть, наоборот, ограничена соответствующая квадратичная форма, тогда

$$b(u) \leq ||b||_1||u||^2, \quad u \in \mathfrak{H}.$$

Из представления (1.14) имеем

$$|b(u,v)| \leq \frac{||b||_1}{4}\left\{||u+v||^2 + ||u-v||^2 + ||u+iv||^2 + ||u-iv||^2\right\}, \quad u, v \in \mathfrak{H}.$$

или в силу неравенства треугольника

$$|b(u,v)| \leq 2||b||_1, \quad u,v \in \mathfrak{H},\ ||u|| = ||v|| = 1.$$

Поэтому, в силу (1.12) существует норма $||b||$, так, что билинейная форма ограничена, и эта норма удовлетворяет неравенству $||b|| \leq 2||b||_1$. □

1.3. Линейные подпространства и ортогональность

Два элемента гильбертова пространства называют ортогональными, если верно

$$u \perp v \quad \Longleftrightarrow (u,v) = 0. \tag{1.16}$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — линейное подпространство $\mathfrak{H}$, тогда u называют ортогональным к $\mathfrak{M}$, если

$$u \perp M \quad \Longleftrightarrow (u,v) = 0, \quad v \in \mathfrak{M}. \tag{1.17}$$

Далее, обозначим как $\mathfrak{M}^\perp$ ортогональное дополнение к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{H}$, то есть положим

$$\mathfrak{M}^\perp = \{u \in \mathfrak{H} :\ u \perp \mathfrak{M}\} = \{u \in \mathfrak{H} :\ (u,v) = 0,\ v \in \mathfrak{M}\} \tag{1.18}$$

Линейное подпространство $\mathfrak{M}$ гильбертова подпространства $\mathfrak{H}$ называют замкнутым, если для любой сходящейся последовательности элементов их $\mathfrak{M}$ верно

$$u_j \in \mathfrak{M},\ u_j \to u\ (j \to \infty) \quad \Rightarrow u \in \mathfrak{M}. \tag{1.19}$$

Напр., для любого линейного подпространства $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ его ортогональное дополнение $\mathfrak{M}^\perp$ замкнуто. В гильбертовом пространстве имеет место следующая важна теорема об ортогональной проекции на подпространство.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство гильбертова пространства $\mathfrak{H}$. Тогда любой элемент $u \in \mathfrak{H}$ можно представить в виде:

$$u = v + w, \quad v \in \mathfrak{M},\ w \in \mathfrak{M}^\perp, \tag{1.20}$$

и притом только одним единственным способом.

Доказательство. (i) Пусть

$$\alpha = \inf_{v \in \mathfrak{M}} ||u - v||,$$

тогда существует последовательность элементов $v_j \in \mathfrak{M}$, $j = 1, 2, \dots$ с

$$\alpha_j = ||u - v_j|| \to \alpha \quad (j \to \infty). \tag{1.21}$$

В силу $\alpha_j \geq \alpha$ и т.н. тождества параллелограмма сходится

$$||v_j - v_k||^2 = 2||u - v_j||^2 + 2||u - v_k||^2 - 4||u - \frac{1}{2}(v_j + v_k)||^2 \leq$$
$$\leq 2\alpha_j + 2\alpha_k - 4\alpha^2 \to 0 \quad (j, k \to \infty)$$

Таким образом, последовательность $\{v_j\}$ сходится и притом к некоторому элементу $v \in \mathfrak{M}$. Отсюда и из (1.21) следует, что

$$\alpha = ||u - v|| = \inf_{v' \in \mathfrak{M}} ||u - v'||. \tag{1.22}$$

(ii) Положим $w = u - v$. Тогда в силу (1.22)

$$||w|| \leq ||w + v'||, \quad v' \in \mathfrak{M}.$$

Следовательно, для любого элемента $h \in \mathfrak{M}$ и $\alpha = -\frac{(w,h)}{||h||^2}$ верно

$$\begin{aligned} 0 &\leq ||w + \alpha h||^2 - ||w||^2 = |\alpha|^2 ||h||^2 + 2\mathrm{Re}\overline{\alpha}(w, h) \\ &= -\frac{|(w, h)|^2}{||h||^2}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Поэтому должно быть $(w, h) = 0$ при любом $h \in \mathfrak{M}$, т.е. $w \in \mathfrak{M}^\perp$.

(iii) Остается доказать, что представление (1.20) единственно. Допустим, против этого, что существует два представления вида

$$u = v + w = v' + w', \quad v, v' \in \mathfrak{M},\ w, w' \in \mathfrak{M}^\perp,$$

тогда имеем

$$v - v' = w' - w \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}^\perp = 0$$

или $v = v'$, $w = w'$. □

Следствие этой теоремы таково:

Теорема 4. Пусть $\mathfrak{M}$ — линейное подпространство $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{M}$ — замыкание $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{H}$, тогда верно

$$\mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}^{\perp\perp}.$$

Доказательство. (i) Для любого подпространства $\mathfrak{M}$ его ортогональное дополнение $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}^{\perp}$ замкнуто. Поэтому любой элемент $u \in \mathfrak{M}$ можно однозначно разложить в

$$u = v + w, \quad v \in \mathfrak{N} = \mathfrak{M}^{\perp}, w \in \mathfrak{N}^{\perp} = \mathfrak{M}^{\perp\perp}, \tag{1.24}$$

с $v \perp w$. Для $u \in \mathfrak{M}$ также верно $u \perp v \in \mathfrak{N} = \mathfrak{M}^{\perp}$, так, что, умножая (1.24) на v, получим

$$0 = (u, v) = ||v||^2 + (w, v) = ||v||^2,$$

или $v = 0$ Следовательно, $u = w \in \mathfrak{N}^{\perp} = \mathfrak{M}^{\perp\perp}$, что означает $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}^{\perp\perp}$.

(ii) Если $\mathfrak{M}$ — замкнутое, то любой элемент $u \in \mathfrak{H}$ можно записать в виде

$$u = v_1 + w_1 = v_2 + w_2, \quad v_1 \in \mathfrak{M},\ w_1 \in \mathfrak{M}^{\perp},\ v_2 \in \mathfrak{N},\ w_2 \in \mathfrak{N}^{\perp}.$$

Элемент

$$w_1 - v_2 = w_2 - v_1 \tag{1.25}$$

принадлежит $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}^{\perp}$, ортогонален $v_1 \in \mathfrak{M}$ и ортогонален $w_2 \in \mathfrak{N}^{\perp}$, то есть ортогонален сам себе. Значит, верно

$$w_1 = v_2, \quad v_1 = w_2 \tag{1.26}$$

Если $u \in \mathfrak{M}^{\perp\perp} = \mathfrak{N}^{\perp}$, то тогда $v_2 = 0$, и в силу (1.26) $w_1 = 0$, то есть $u = v_1$ лежит в $\mathfrak{M}$. Итак, $\mathfrak{M}^{\perp\perp} \subseteq \mathfrak{M}$, что в силу (i) дает $\mathfrak{M}^{\perp\perp} = \mathfrak{M}$.

(iii) Для линейного подпространства $\mathfrak{M}$ пространства $\mathfrak{H}$ верны включения:

$$\mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}, \quad \mathfrak{M}^{\perp} = \overline{\mathfrak{M}}^{\perp}. \tag{1.27}$$

В силу (ii) имеем $\mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{M}}^{\perp\perp} = \mathfrak{M}^{\perp\perp}$. □

1.4. Ограниченные линейные функционалы и операторы

Под линейным функционалом l на гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ понимают отображение l, которое каждому элементу $u \in \mathfrak{H}$ ставит в соответствие некоторое комплексное число $l(u)$, причем

$$l(\alpha u + \beta v) = \alpha l(u) + \beta l(v), \quad u, v \in \mathfrak{H}, \tag{1.28}$$

для любых двух комплексных чисел α, β. Линейный функционал l называют ограниченным, если существует такое число $\alpha \geq 0$, что

$$|l(u)| \leq \alpha ||u||, \quad u \in \mathfrak{H}. \tag{1.29}$$

Множество ограниченных линейных функционалов на $\mathfrak{H}$ обозначают как $\mathfrak{H}^*$. Любой элемент $w \in \mathfrak{H}$ задает некоторый функционал из $\mathfrak{H}^*$ по формуле

$$l(u) = (u, w), \quad u \in \mathfrak{H}.$$

Обратное утверждает фундаментальная теорема о представлении ограниченного функционала Фреше-Рисса (Fréche-Riesz):

Теорема 5. Для любого ограниченного функционала l на $\mathfrak{H}$ найдется один единственный элемент $w \in \mathfrak{H}$, такой, что

$$l(u) = (u, w), \quad u \in \mathfrak{H} \tag{1.30}$$

Доказательство. Пусть

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{H} : l(u) = 0\},$$

тогда $\mathfrak{M}$ — замкнутое линейное подпространство $\mathfrak{H}$. Если $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$, то можно взять $w = 0$. Если $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{H}$, то должен существовать элемент u_0 с $l(u_0) \neq 0$ и мы, не ограничивая общности можем считать, что

$$l(u_0) = 1. \tag{1.31}$$

Этот элемент u_0 в силу теоремы (3) может быть представлен в виде

$$u_0 = v_0 + w_0, \quad v_0 \in \mathfrak{M}, w_0 \in \mathfrak{M}^\perp.$$

Отсюда следует в частности, что

$$(u_0, w_0) = ||w_0||^2 \neq 0, \tag{1.32}$$

так как в случае $w_0 = 0$ также и $u_0 \in \mathfrak{M}$ и, значит, $l(u_0) = 0$, что в силу (1.31) невозможно. Пусть теперь u — произвольный элемент $\mathfrak{H}$, тогда

$$v = u - l(u)u_0 \in \mathfrak{M},$$

так как $l(v) = l(u) - l(u)l(u_0) = 0$. Поэтому мы имеем

$$0 = (v, w_0) = (u, w_0) - l(u)(u_0, w_0),$$

или, в силу (1.32)

$$l(u) = \frac{(u, w_0)}{||w_0||^2}$$

для любого $u \in \mathfrak{H}$. Но это и есть искомое представление с $w = \frac{1}{||w_0||^2} w_0$. Элемент w в (1.30) определен однозначно, так как из $(u, w) = 0$ при всех $u \in \mathfrak{H}$ следует $w = 0$. □

Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $(.,.)$ и соответствующей нормой $||.||$. Отображение $B: \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ называется [линейным оператором, если

$$B(\alpha u + \beta v) = \alpha Bu + \beta Bv$$

для любых двух комплексных чисел α, β и любых двух элементов $u, v \in \mathfrak{H}$. Линейный оператор B называется] ограниченным, если существует такое число $\beta_1 \geq 0$, что

$$||Bu|| \leq \beta_1 ||u||, \quad u \in \mathfrak{H} \tag{1.33}$$

Для любого ограниченного оператора B норма задается формулой

$$||B|| = \sup_{||u||=1} ||Bu||. \tag{1.34}$$

Каждый ограниченный оператор B задает билинейную форму при помощи равенства

$$b(u,v) = (u, Bv), \quad u, v \in \mathfrak{H}. \tag{1.35}$$

Эта билинейная форма ограничена:

$$|b(u,v)| \leq \beta_1 ||u|| ||v||, \quad u, v \in \mathfrak{H}. \tag{1.36}$$

Обратное утверждает следующая важная теорема о представлении ограниченной билинейной формы:

Теорема 6. Для любой ограниченной билинейной формы b найдется один единственный ограниченный линейный оператор B, такой, что

$$b(u,v) = (u, Bv), \quad u, v \in \mathfrak{H}. \tag{1.37}$$

Доказательство. Для любого $v \in \mathfrak{H}$ выражение

$$l_v(\varphi) = b(\varphi, v), \quad \varphi \in \mathfrak{H}$$

задает ограниченный линейный функционал $l_v \in \mathfrak{H}^*$. В силу теоремы Фреше-Рисса существует элемент $w \in \mathfrak{H}$, такой, что

$$l_v(\varphi) = (\varphi, w) = b(\varphi, v), \quad \varphi \in \mathfrak{H}. \tag{1.38}$$

Элемент w определен однозначно через v, так, что мы фактически построили отображение

$$B: \quad v \in \mathfrak{H} \quad \rightarrow \quad w \in \mathfrak{H}$$

Это отображение, очевидно, линейное. Из (1.38) сразу получаем представление (1.37). Так как b — ограниченная билинейная форма, имеем

$$(u, Bu) \leq \beta_1 ||u|| ||v||, \quad u, v \in \mathfrak{H}.$$

Подставляя сюда $u = Bv$, получим

$$||Bv|| \leq \beta_1 ||v||, \quad v \in \mathfrak{H},$$

так, что B — ограниченный оператор. Оператор B однозначно определен через билинейную форму b. В самом деле, если бы мы имели два таких опертора B, B', то (1.37) было бы верно для всех $u, v \in \mathfrak{H}$, а значит, и $(u, (B - B')v) = 0$, то есть $(B - B')v = 0$ и, далее, $B = B'$. $\square$

Каждой ограниченной билинейной форме b можно поставить в соответствие сопряженную билинейную форму по формуле

$$b^*(u, v) = \overline{b(v, u)}, \quad u, v \in \mathfrak{H}. \tag{1.39}$$

Вмести с b форма b^* также ограничена и в силу теоремы о представлении ограниченной билинейной формы существуют такие ограниченные линейные операторы B, B^*, для которых справедливо

$$\begin{aligned} (u, Bv) = b(u, v) = \overline{b^*(v, u)} = \overline{(v, B^*u)} \\ = (B^*u, v), \quad u, v \in \mathfrak{H}. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Оператор B^* называют сопряженным к B. Для нормы сопряженного оператора верно соотношение

$$||B^*|| = ||B||, \tag{1.41}$$

Оператор $B^{**} = (B^*)^*$, сопряженный к B^*, совпадает с B. Если B, C — два ограниченных оператора, то верно $(BC)^* = C^*B^*$.

Глава 2.

Вполне непрерывные билинейные формы и операторы

2.1. Слабая сходимость

До сих пор мы говорили лишь о сходимости последовательности $\{v_j\}$ по норме, когда $||v_j - v|| \to 0$ при $j \to \infty$. Такую сходимость будем далее называть сильной с тем, чтобы отличать ее от т.н. слабой сходимостью:

Определение 1. Говорят, что последовательность $\{v_j\}$ слабо сходится, если для любого $u \in \mathfrak{H}$ числовая последовательность $(u, v_j) \to a(u)$ при $j \to \infty$.

Теорема Фреше-Рисса позволяет ввести понятие слабого предела последовательности:

Теорема 7. Если $\{v_j\}$ сходится слабо, то существует такая функция $v \in \mathfrak{H}$, что при любом $u \in \mathfrak{H}$ числовая последовательность $(u, v_j) - (u, v) \to 0, (j \to \infty)$.

Этот элемент называют слабым пределом последовательности и пишут $v_j \rightharpoonup v$.

Доказательство. Заметим, что в силу неравенства Шварца

$$l_j(u) = (u, v_j)$$

— ограниченные линейные функционалы. Для доказательства их равномерной ограниченности нам понадобятся следующие утверждения:

(i) Теорема Кантора о пересечении: для системы замкнутых множеств $\mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{H}$, таких, что

$$\mathfrak{F}_1 \supset \mathfrak{F}_2 \supset \dots, \ \mathrm{dist}\ (\mathfrak{F}_n) \to 0$$

где $\mathrm{dist}\ (\mathfrak{F}) = \sup\limits_{u,v \in \mathfrak{F}} ||u - v||$, пересечение $\cap \mathfrak{F}_n$ состоит ровно из одного элемента u_0. В самом деле, возьмем в каждом $\mathfrak{F}_n$ по элементу u_n. Поскольку для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что при $n > N$ $\mathrm{dist}\ (\mathfrak{F}_n) < \varepsilon$, а значит, и $||u_n - u_{n+m}|| < \varepsilon$, последовательность $\{u_n\}$ сходится сильно к некоторому элементу $u_0 \in \mathfrak{H}$. Так как подпоследовательность $\{u_k, u_{k+1}, \dots\}$ принадлежит $\mathfrak{F}_k$, то $u_0 \in \mathfrak{F}_k$ при любом k. Это значит, что $u_0 \in \cap \mathfrak{F}_n$, то есть это множество содержит хотя бы один элемент. Если ему принадлежит еще один элемент w, то $||u - w|| < \mathrm{dist}\ (\mathfrak{F}_n) \to 0$, то есть $u = w$, что и тр. д.

(ii) Если замкнутое множество $\mathfrak{F}$ не содержит ни одного замкнутого круга вида $K_r[u_0] = \{u \in \mathfrak{H} : \ ||u - u_0|| \leq r$, то любой замкнутый круг $K_r[u_0]$ содержит круг, целиком не принадлежащий $\mathfrak{F}$. В самом деле, раз уж $K_{r/2}[u_0] \not\subset \mathfrak{F}$, то в этом круге существует элемент $u_1 \notin \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ замкнуто, то вмести с u_1 множеству $\mathfrak{F}$ не принадлежит и его малая круговая окрестность $K_{r_1}[u_1]$ с $r_1 \leq r/2$. Значит, во-первых, $K_{r_1}[u_1] \cap \mathfrak{F} = \emptyset$, а во-вторых, $K_{r_1}[u_1] \subseteq K_r[u_0]$, так как $r_1 \leq r/2$ и $||u_1 - u_0|| \leq r/2$, что и тр. д.

(iii) Принцип Бера о категориях: если $\mathfrak{H} = \cup \mathfrak{F}_n$, где $\mathfrak{F}_n$ — некоторые замкнутые множества, то хотя бы при одном значении n множество $\mathfrak{F}_n$ содержит замкнутый круг. В самом деле, допустим противное. Тогда зададимся произвольным кругом K_0, в силу (ii) существует круг $K_1 \subset K_0$, для которого верно $\mathrm{dist}\ (K_1) \leq 1$ и $K_1 \cap \mathfrak{F}_1 = \emptyset$; далее, существует круг $K_2 \subset K_1$, для которого верно $\mathrm{dist}\ (K_2) \leq 1/2$ и $K_2 \cap \mathfrak{F}_2 = \emptyset$ и т.д. Значит существует последовательность кругов $K_1 \supset K_2 \supset$ с $\mathrm{dist}\ (K_n) \to 0$. В силу теоремы Кантора (i) их пересечение $\cap K_n$ содержит ровно один элемент, обозначим его как u_0. С другой стороны, $u_0 \notin \cup \mathfrak{F}_n = \mathfrak{H}$, что невозможно.

(iv) Введем теперь замкнутые множества

$$\mathfrak{F}_n = \{u \in \mathfrak{H} : \ |l_j(u)| \leq n \text{при всех } j = 1, 2, \dots\}$$

Поскольку при любом фиксированном $u \in \mathfrak{H}$ числовая последовательность $l_j(u)$ сходится, она ограничена по модулю, т.е. найдется столь большое n, что $u \in \mathfrak{F}_n$. Поэтому $\mathfrak{H} = \cup \mathfrak{F}_n$. В силу принципа Бера (iii) среди $\mathfrak{F}_n$ имеется такое множество $\mathfrak{F}_m$, которое содержит замкнутый круг $K_r[u_0]$. Значит, при $||u - u_0|| \leq r$ верно неравенство

$$|l_j(u)| \leq m, \quad j = 1, 2, \dots$$

или

$$|l_j(u - u_0)| \leq m + |l_j(u_0)|, \quad j = 1, 2, \dots$$

Но тогда при любом w с $||w|| = 1$ верно

$$|l_j(w)| \leq \frac{m + |l_j(u_0)|}{r}, \quad j = 1, 2, \dots$$

т.е. $l_j(u)$ — равномерно ограниченные линейные функционалы.

Теперь мы можем ввести линейный функционал

$$l(u) = \lim_{j \to \infty} l_j(u)$$

который ограничен, в силу равномерной ограниченности l_j. В силу теоремы Рисса-Фреше, существует такой элемент $v \in \mathfrak{H}$, что $l(u) = (u, v)$, что и доказывает теорему. □

Помимо теоремы мы доказали выше в пункте (iv) одно полезное для дальнейшего утверждение: всякая слабо сходящаяся последовательность ограничена по норме.

Заметим теперь, что всякая сильно сходящаяся последовательность $v_j \to v$ сходится слабо и к тому же пределу v. Обратное верно лишь при некоторых условиях:

Теорема 8. Если $v_j \rightharpoonup v$ и $||v_j|| \to ||v||$, то $v_j \to v$ при $j \to \infty$.

Доказательство. Оценим

$$||v - v_j|| = ||v||^2 + ||v_j||^2 - (v, v_j) - (v_j, v) = ||v||^2 + ||v_j||^2 - (v, v_j) - \overline{(v, v_j)} \to 0$$

□

Отметим еще одно важное для дальнейшего свойство слабо сходящихся последовательностей, называемое теоремой о выборе:

Теорема 9. Из любого ограниченного множества гильбертова пространства, содержащего бесконечное число элементов, можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность

Доказательство. (i) Из любого ограниченного множества гильбертова пространства, содержащего бесконечное число элементов, можно выделить ограниченную последовательность элементов. Поэтому нужно доказать, что из любой ограниченной последовательности — скажем $\{v_j\}$ с $||v_j|| \leq C$ — можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

(ii) Введем теперь ортонормированную последовательность элементов $\mathfrak{H}$ следующим образом: $w_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$, $w_2 = \frac{v_2 - (w_1, v_2) w_1}{||v_2 - (w_1, v_2) w_1||}$ и т.д. Исходная последовательность $\{v_j\}$ принадлежит линейному подпространству $\mathfrak{M} \in \mathfrak{H}$, натянутому на $\{w_j\}$, то есть множеству всех элементов вида:

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} c_j w_j$$

с конечной нормой $||u||^2 = \sum |c_j|^2$.

Заметим, что для любой сходящейся сильно последовательности

$$u^k = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^k w_j$$

элементов $\mathfrak{M}$, верно

$$||u^k - u^{k'}||^2 = \sum |c_j^k - c_j^{k'}|^2 \to 0$$

при $k, k' \to \infty$. Поэтому существует предел $c_j = \lim c_j^k$ и $u^k \to \sum c_j w_j$, то есть последовательность сходится к элементу $\mathfrak{M}$. Итак, $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство $\mathfrak{H}$.

В силу теоремы 3 для любого $u \in \mathfrak{H}$ справедливо представление

$$u = u' + u'', \quad u' \in \mathfrak{M}, u'' \in \mathfrak{M}^{\perp},$$

поэтому, в частности,

$$(u, v_j) = (u', v_j).$$

Поскольку последовательность $\{(w_k, v_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ — ограничена, при помощи теоремы Больцано-Вейерштрасса и классического диагонального процесса можно доказать, что существует такое множество натуральных чисел $\mathbb{M}$, что подпоследовательность $\{(w_k, v_j)\}_{j \in \mathbb{M}}$ сходится при любом k. Значит, вполне определен функционал

$$l(u) = \lim_{j \in \mathbb{M},\, j \to \infty} (u, v_j) = \lim_{j \in \mathbb{M},\, j \to \infty} (u', v_j) = \sum_k (u', w_k) \lim_{j \in \mathbb{M},\, j \to \infty} (w_k, v_j).$$

Он в силу $||v_j|| < C$ ограничен и в силу теоремы Фреше-Рисса существует такая $v \in \mathfrak{H}$, что

$$l(u) = (u, v).$$

В силу предыдущего равенства это значит, что $v_j \rightharpoonup v$ при $j \in \mathbb{M}$ $\square$

Замечание 1. Диагональный процесс Кантора — способ, при помощи которого из бесконечной матрицы

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ . & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \dots \\ . & & & & \end{array}$$

элементы которой равномерно ограничены, можно выделить подпоследовательность $\{a_{ij_k}\}$, сходящуюся при любом натуральном i.

Способ состоит в следующем. В силу теоремы Больцано-Вейерштрасса из первой строки можно выделить подпоследовательность

$$a_{1j_{11}},\ a_{1j_{12},\dots a_{1j_{1n}},\dots}$$

сходящуюся к некоторому числу α_1. Обозначим индекс j_{11} как k_1 и выберем из числовой последовательности

$$a_{2j_{12}},\ a_{2j_{13},\ldots a_{2j_{1n}},\ldots}$$

опять сходящуюся подпоследовательность. Обозначим ее как

$$a_{2j_{22}},\ a_{2j_{23},\ldots a_{2j_{2n}},\ldots},$$

ее предел — как α_2, а индекс j_{22} как k_2.

Продолжая так дальше, мы получим при каждом $i = 1, 2, \ldots$ последовательность

$$a_{ij_{ii}},\ a_{ij_{i,i+1}},\ldots$$

сходящуюся к некоторому числу α_i. При этом мы опять обозначим $j_{ii} = k_i$.

Рассмотрим теперь числовую последовательность

$$a_{ik_1},\ a_{ik_2},\ldots,a_{ik_n},\ldots.$$

При любом $i = 1, 2, \ldots$ ее элементы составляют подмножество элементов последовательности

$$a_{ij_{ii}},\ a_{ij_{i,i+1}},\ldots,$$

сходящейся к α_i. Поэтому и последовательность

$$a_{ik_1},\ a_{ik_2},\ldots,a_{ik_n},\ldots.$$

сходится к α_i при $i = 1, 2, \ldots$, а значит и является искомой.

2.2. Вполне непрерывные операторы

Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $(.,.)$ и соответствующей нормой $||.||$. В основу нашего рассмотрения положим следующее определение вполне непрерывного оператора:

Определение 2. Пусть K — линейное отображение гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ самого на себя. Тогда K называют вполне непрерывным или компактным, если для любой ограниченной последовательности $\{u_j\}$ последовательность $\{Ku_j\}$ содержит сильно сходящуюся подпоследовательность.

Из этого определения можно непосредственно получить свойства компактного оператора:

Теорема 10. Любой вполне непрерывный оператор K в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ ограничен и вместе с K сопряженный оператор K^* тоже вполне непрерывен.

Доказательство. (i) Допустим, что K не ограничен, тогда должна существовать последовательность элементов из $\mathfrak{H}$, обладающая следующим свойством:

$$||u_j|| = 1, \quad ||Ku_j|| \to \infty \quad (j \in \mathbb{N},\ j \to \infty) \tag{2.1}$$

Так как последовательность $\{u_j\}$ ограниченна и K — вполне непрерывный, существует подпоследовательность $\mathbb{N}'$ последовательность $\mathbb{N}$ натуральных чисел, для которой $\{Ku_j\}_{j\in\mathbb{N}'}$ сильно сходится. Но в силу (2.1) также верно $||Ku_j|| \to \infty$ $(j \in \mathbb{N}',\ j \to \infty)$, что противоречит установленной только что сходимости этой последовательности.

(ii) В силу (i) вполне непрерывный оператор K ограничен, поэтому существует сопряженный оператор K^* и K^* является ограниченным линейным оператором из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}$. Для ограниченной последовательности $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ с $||u_j|| \le C,\ j \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$||K^*u_j - K^*u_k||^2 = (u_j - u_k, KK^*(u_j - u_k)) \le 2C||Kv_j - Kv_k|| \tag{2.2}$$

где $v_j = K^*u_j,\ j,k \in \mathbb{N}$. Последовательность $\{v_j\}$ ограничена, поскольку $||v_j|| \le ||K^*||||u_j|| \le C||K^*||,\ j \in \mathbb{N}$. Поэтому существует подпоследовательность $\mathbb{N}'$ последовательности $\mathbb{N}$ натуральных чисел, такая, что $\{Kv_j\}_{j\in\mathbb{N}'}$ сходится. В силу (2.2) тогда и последовательность $\{K^*u_j\}_{j\in\mathbb{N}'}$ сходится. Тем самым мы указали сходящуюся подпоследовательность последовательности $\{K^*u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. □

На возможность другого определения вполне непрерывного оператора указывает следующее утверждение:

Теорема 11. Линейный оператор K на гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ является вполне непрерывным тогда и только тогда, когда K отображает любую слабо сходящуюся последовательность $\{u_j\}$ в последовательность, сходящуюся сильно:

$$u_j \rightharpoonup u \quad \Rightarrow \quad Ku_j \to Ku \quad (j \to \infty). \tag{2.3}$$

Доказательство. (i) Предположим сначала, что линейное отображение K обладает свойством (2.3) для любой слабо сходящейся последовательности $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Для любой ограниченной последовательности $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ существует подпоследовательность $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$, такая, что $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}'}$ слабо сходится. Для этой подпоследовательности в силу (2.3) последовательности $\{Ku_j\}_{j\in\mathbb{N}'}$ сходится сильно. Следовательно, K должен быть вполне непрерывным.

(ii) Пусть теперь наоборот K — вполне непрерывный. Для любой слабо сходящейся последовательности $\{u_j\}$ с $u_j \rightharpoonup u$ $(j \to \infty)$ верно

$$(Ku_j, v) = (u_j, K^*v) \to (u, K^*v) = (Ku, v) \quad (j \to \infty)$$

при любом $v \in \mathfrak{H}$, то есть также

$$u_j \rightharpoonup u \quad \Rightarrow \quad Ku_j \rightharpoonup Ku \quad (j \to \infty). \tag{2.4}$$

Любая сильно сходящаяся последовательность сходится к тому же пределу, что и в смысле слабой сходимости. Поэтому, если последовательность $\{Ku_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ при $u_j \rightharpoonup u$ $(j \to \infty)$ содержит сильно сходящуюся подпоследовательность $\{Ku_j\}_{j\in\mathbb{N}'}$, $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$, то необходимо сходится $Ku_j \to Ku$ $(j \in \mathbb{N}', j \to \infty)$. Предположим теперь только, что для последовательности $\{u_j\}$ верно $u_j \rightharpoonup u$, но не $Ku \to Ku$ $(j \to \infty)$. Тогда существует положительное число ε_0 и подпоследовательность $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}'}$ такие, что

$$||Ku_j - Ku|| \geq \varepsilon_0 > 0, \quad j \in \mathbb{N}'. \tag{2.5}$$

Так как K вполне непрерывный, существует сильно сходящаяся подпоследовательность $\{Ku_j\}_{j\in\mathbb{N}''}$, $\mathbb{N}'' \subseteq \mathbb{N}'$. При $u_j \rightharpoonup u$ $(j \in \mathbb{N}'', j \to \infty)$ в силу сказанного выше необходимо $Ku_j \to Ku$, что противоречит неравенству (2.5). $\square$

2.3. Вполне непрерывные билинейные формы.

Пусть опять $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство и K — вполне непрерывный оператор на $\mathfrak{H}$. Определим билинейную форму k на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ соотношением

$$k(u, v) = (u, Kv), \quad u, v \in \mathfrak{H}, \tag{2.6}$$

так, что k ограниченная билинейная форма на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$. Эта билинейная форма обладает тем свойством, что для любой пары слабо сходящихся последовательностей $\{u_j\}, \{v_j\}$ справедливо

$$u_j \rightharpoonup u, \ v_j \rightharpoonup v \quad \Rightarrow \quad k(u_j, v_j) \to k(u, v) \quad (j \to \infty). \tag{2.7}$$

В самом деле, так как любая слабо сходящая последовательность ограничена, по теореме 11 сходится

$$|k(u_j, v_j) - k(u, v)| \leq ||u_j|| ||Kv_j - Kv|| + |(u_j - u, Kv)| \to 0$$

при $j \to \infty$. Это свойство можно использовать для определения понятия вполне непрерывной билинейной формы:

Определение 3. Пусть k — билинейная форма на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$. Тогда k называют вполне непрерывной, если для любой пары $\{u_j\}, \{v_j\}$ слабо сходящихся последовательностей справедливо утверждение (2.7).

Из этого определения сразу следует теорема об ограниченности вполне непрерывной билинейной формы:

Теорема 12. Любая вполне непрерывная билинейная форма на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ ограниченна и вместе с k также вполне непрерывна и сопряженная билинейная форма k^*.

Доказательство. (i) Допустим, что билинейная форма k не ограниченна, то существует две такие последовательности $\{u_j\}, \{v_j\}$, что

$$\|u_j\| = 1, \ \|v_j\| = 1, \quad |k(u_j, v_j)| \to \infty \quad (j \to \infty) \tag{2.8}$$

Тогда существуют сходящиеся слабо подпоследовательности $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}'}$, $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}'}$, $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$, для которых в силу того, что k вполне непрерывна, должно быть верно

$$u_j \rightharpoonup u,\ v_j \rightharpoonup v \quad \Rightarrow \quad k(u_j, v_j) \to k(u, v) \quad (j \in \mathbb{N}',\ j \to \infty).$$

что противоречит (2.8).

(ii) Если соотношение (2.7) верно для билинейной формы k на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$, то оно верно и для сопряженной билинейной формы k^*, поскольку

$$k^*(u_j, v_j) = \overline{k(v_j, u_j)} \to \overline{k(v, u)} = k^*(u, v) \quad (j \to \infty).$$

для любой пары $\{u_j\}, \{v_j\}$ слабо сходящихся последовательностей, так что k^* тоже вполне непрерывна. □

Уточним теперь теорему о представлении ограниченной билинейной формы:

Теорема 13. Билинейная форма k на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ вполне непрерывна тогда и только тогда, когда существует такой вполне непрерывный оператор K, что

$$k(u, v) = (u, Kv), \quad u, v \in \mathfrak{H} \tag{2.9}$$

Доказательство. (i) Если справедливо такое представление с вполне непрерывным оператором K, то полную непрерывность k мы уже установили при подготовке определения 3.

(ii) Пусть теперь наоборот билинейная форма k на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ вполне непрерывна. В силу теоремы 12 k ограничена, поэтому, в силу теоремы о представлении ограниченной билинейной формы, существует такой ограниченный оператор K, что

$$k(u, v) = (u, Kv).$$

Для любой слабо сходящейся последовательности $\{v_j\}$ положим $u_j = Kv_j$, тогда последовательность $\{u_j\}$ сходится слабо к $u = Kv$. Вместе с тем

$$||Kv_j||^2 = (u_j, Kv_j) = k(u_j, v_j) \to k(u, v) = (u, Kv) = ||Kv||^2 \tag{2.10}$$

при $j \to \infty$. Заметим теперь, что имеет место эквивалентность:

$$u_j \to u \Longleftrightarrow u_j \rightharpoonup u, ||u_j|| \to ||u|| \quad (j \to \infty) \tag{2.11}$$

Поэтому для любой слабо сходящейся последовательности $\{v_j\}$ из (2.10) и (2.11) следует сильная сходимость последовательности $\{Kv_j\}$, а значит, и полная непрерывность оператора K. □

2.4. Критерий полной непрерывности билинейной формы и неравенство Эрлинга

В этом разделе мы докажем некоторые критерии полной непрерывности билинейной формы вместе с одним весьма общим неравенством, которое в применении к конкретным пространствам было указано Эрлингом (Ehrling).

Теорема 14. Билинейная форма k на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ вполне непрерывна тогда и только тогда, когда k ограничена и для любой слабо сходящейся к нулю последовательности $\{v_j\}$ справедливо:

$$v_j \rightharpoonup 0 \quad \Rightarrow \quad k(v_j) \to 0 \quad (j \to \infty). \tag{2.12}$$

Доказательство. (i) Если k — вполне непрерывная форма, то k ограничена и верно

$$v_j \rightharpoonup 0 \quad \Rightarrow \quad k(v_j) = k(v_j, v_j) \to k(0,0) = 0 \quad (j = \infty).$$

(ii) Пусть k — ограниченная билинейная форма на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ и пусть K — ограниченный линейный оператор на $\mathfrak{H}$ в представлении $k(u, v) = (u, Kv)$, $u, v \in \mathfrak{H}$. Для любой слабо сходящейся последовательности $\{w_j\}$ тогда верно

$$w_j \rightharpoonup w \quad \Rightarrow \quad k(w_j, w) = (w_j, Kw) \to (w, Kw) = k(w) \tag{2.13}$$

при $j \to \infty$. Итак, $k(w, w_j) \to k(w)$ при $j \to \infty$. Для любой последовательности $\{w_j\}$ имеет место представление:

$$k(w_j - w) = k(w_j) + k(w) - k(w, w_j) - k(w_j, w).$$

Поэтому для любой слабо сходящейся последовательности $\{w_j\}$ с $w_j \rightharpoonup w$ $(j \to \infty)$ в силу предположения (2.12) и соотношения (2.13) верно

$$w_j \rightharpoonup w \quad \Rightarrow \quad k(w_j) \to k(w) \quad (j \to \infty). \tag{2.14}$$

Пусть теперь $\{u_j\}, \{v_j\}$ — две слабо сходящиеся последовательности с $u_j \rightharpoonup u$, $v_j \rightharpoonup v$ $(j \to \infty)$. Воспользуемся теперь тем, что

$$k(u_j, v_j) = \frac{1}{4}\left\{k(u_j + v_j) - k(u_j - v_j) + ik(u_j + iv_j) - ik(u_j - iv_j)\right\} \tag{2.15}$$

при $j \in \mathbb{N}$. Аргументы квадратичной формы k в правой части этого равенства сходятся слабо. Поэтому из (2.14) и (2.15) следует сходимость числовой последовательности $\{k(u_j, v_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ к пределу

$$\lim_{j \to \infty} k(u_j, v_j) = \frac{1}{4}\left\{k(u+v) - k(u-v) + ik(u+iv) - ik(u-iv)\right\} = k(u, v),$$

а это и означает, что k вполне непрерывна. $\square$

Еще один критерий полной непрерывности билинейной формы дает следующая теорема.

Теорема 15. Билинейная форма k на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ вполне непрерывна тогда, когда для любого числа $\varepsilon \in (0, 1]$ существует такая вполне непрерывная билинейная форма k_ε, что

$$|k(u)| \leq \varepsilon ||u||^2 + |k_\varepsilon(u)|, \quad u \in \mathfrak{H}. \tag{2.16}$$

Доказательство. Для любого $\varepsilon \in (0, 1]$ билинейная форма k_ε ограничена. Поэтому существует такое число γ, что при $\varepsilon = 1$ из (2.16) следует

$$|k(u)| \leq (1 + \gamma)||u||^2, \quad u \in \mathfrak{H}. \tag{2.17}$$

Следовательно, квадратичная форма k на $\mathfrak{H}$ ограничена, а это эквивалентно тому, что билинейная форма k на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ ограничена.

Пусть $\{u_j\}$ — произвольная слабо сходящаяся к нулю последовательность. В силу теоремы (14) при любом $\varepsilon \in (0, 1]$ последовательность

$$k_\varepsilon(u_j) \to 0 \quad (j \to \infty),$$

и существует положительное число C с $||u_j||^2 \leq C,\ j \in \mathbb{N}$. Поэтому для любого $\eta > 0$ и с $\varepsilon = \frac{\eta}{2C}$ существует такое число $j_0(\eta)$, что

$$|k_\varepsilon(u_j)| < \frac{\eta}{2}, \quad j > j_0(\eta).$$

Тогда, в силу неравенства (2.16), верно

$$|k(u_j)| < \frac{\eta}{2C}C + \frac{\eta}{2} = \eta, \quad j > j_0(\eta),$$

таким образом, и $k(u_j) \to 0$ $(j \to \infty)$. Поэтому все предположения теоремы 14 выполнены и, значит, билинейная форма k вполне непрерывна. □

Теперь мы хотим доказать еще одно неравенство, которое в применении к конкретным пространствам было указано Эрлингом (Ehrling) и которое мы будем далее называть неравенством Эрлинга.

Теорема 16. Пусть k — вполне непрерывная билинейная форма и q — вполне непрерывная симметричная, строго положительная билинейная форма на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$. Тогда для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\kappa(\varepsilon)$, что справедливо неравенство

$$|k(u)| \leq \varepsilon ||u||^2 + \kappa(\varepsilon) q(u), \quad u \in \mathfrak{H}. \tag{2.18}$$

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Итак, предположим, что нам задано некоторое положительное число $\varepsilon_0 > 0$ и для каждого $\kappa = j$ $(j = 1, 2, \dots)$ — элемент $v_j \in \mathfrak{H}$ с

$$|k(v_j)| > \varepsilon_0 + j q(v_j), \quad ||v_j|| = 1, \quad j = 1, 2, \dots. \tag{2.19}$$

Так как любая ограниченная последовательность в $\mathfrak{H}$ содержит сходящуюся подпоследовательность, мы можем, не ограничивая общности, считать, что последовательность $\{v_j\}$ слабо сходится к элементу v. Следовательно,

$$v_j \rightharpoonup v, \quad k(v_j) \to k(v) \quad (j \to \infty). \tag{2.20}$$

Далее, в силу неравенства (2.19) [и ограниченности $\{v_j\}$], верно

$$0 \leq q(v_j) < \frac{1}{j}\left\{|k(v_j)| - \varepsilon_0\right\} \to 0 \quad (j \to \infty).$$

Вспомним теперь, что билинейная форма q по условию строго положительная, значит,

$$0 \leq q(v_j - v) = q(v_j) + q(v) - q(v_j, v) - q(v, v_j) \to -q(v) \quad (j \to \infty)$$

или $0 \leq q(v) \leq 0$, то есть $q(v) = 0$ и, следовательно, $v = 0$. Но тогда в силу (2.20) $k(v_j)$ сходится к нулю при $j \to \infty$, что противоречит неравенству $|k(v_j)| > \varepsilon_0$ $(j = 1, 2, \dots)$, которое сразу получается из (2.19). $\square$