МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА
Физический факультет.

На правах рукописи.
УДК 517.958

Малых Михаил Дмитриевич

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ВОЛНОВЕДУЩИХ СИСТЕМ

Специальность 01.01.03
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук, профессор А.Н. Боголюбов

Москва, 2002 год.

Оглавление

Введение.

Настоящая диссертация посвящена изучению спектральных характеристик волноведущих систем, необходимых для решения задач о возбуждении колебаний в волноводе и дифракции волн на неоднородности, помещенной внутрь регулярного волновода, и нарушениях регулярности боковой поверхности волновода.

Начало строгой математической теории волноводов было положено в 1947-1948 годах классическими работами А.Н. Тихонова и А.А. Самарского [1]-[3]. Их работа "О возбуждении радиоволноводов"(1947) послужила основой для создания строгой теории возбуждения регулярных волноводов произвольным распределением заданного тока. Усилиями Г.В. Кисунько [4], П.Е. Краснушкина [5], А.Г. Свешникова [6]-[8] и ряда других ученых высокочастотная электродинамика волноведущих систем превратилась в бурно развивающуюся строгую математическую теорию, определившую новое научное направление в математической физике.

В настоящее время проявляется большой интерес к исследованию волноведущих систем со сложной геометрией и неоднородным заполнением. При этом одной из актуальных задач, требующих математического изучения, является задача о возбуждении колебаний в таких волноведущих системах финитным током вида $je^{-i\omega t}$. Ее разрешение весьма затруднено явлением резонанса: поле, гармонически зависящее от времени, существует лишь при частотах ω, не принадлежащих так называемому резонансному множеству.

В случае регулярного полого волновода явление резонанса прямо связанно с тем, что при различных частотах ток может излучать или не излучать энергию в бесконечные участки волновода. Именно, при малых частотах большая часть энергии поля, возбужденного током $je^{-i\omega t}$, локализована. При частотах, больших некоторой частоты $\omega[j]$, от области, где имеется ток, расходятся бегущие волны. При $\omega = \omega[j]$ имеет место явление резонанса. Эти частоты $\omega[j]$, при которой происходит переход на режим излучения, называют частотами отсечки. Таким образом, резонансное множество регулярного полого волновода состоит только из частот отсечки. Можно показать также, что резонансное множество регулярного волновода представляет собой совокупность корней из собственных значений задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа на сечении волновода, что позволяет легко его рассчитать (см. [1]-[3],[8]). Поведение поля при резонансных частотах стало предметом исследований П. Вернера, начатых еще в 1960-х годах (см. [9]). Оказалось, что в регулярном волноводе при частотах отсечки существует лишь нестационарное поле, амплитуда которого растет со временем как $\sqrt{t}$.

Однако в более сложных системах (и в первую очередь в локально нерегулярных волноводах) среди резонансных частот есть и другие, не связанные с переходом к режиму излучения, характерной чертой которых является то, что при них существует лишь поле, амплитуда которого растет как t.

В скалярном приближении задача о возбуждении колебаний током в локально нерегулярном волноводе при частотах, отличных от частот отсечки, является фредольмовой, то есть из единственности ее решения следует существование (обобщенного) решения. Поскольку для решения $u(x)$ однородной задачи, называемой также спектральной, удовлетворяющего парциальным условиям излучения, ограничен интеграл:

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < \infty,$$

где Ω — полость волновода, появление резонансных частот, отличных от частот отсечки, связано с существованием у соответствующей спектральной задачи собственных функций из гильбертова пространства $L^2(\Omega)$ всех суммируемых функций, для которых интеграл от квадрата модуля конечен.

В работах В.П. Шестопалова [10] обоснование этого утверждения было основано на возможности сведения задачи о возбуждении колебаний током в волноводе, заполненным локально неоднородным веществом, к интегральному уравнению. Недавно в работе А.Л. Делицына [11] был предложен другой подход, который позволяет единообразно доказать фредгольмовость задачи о возбуждении колебаний током как в скалярном, так и электромагнитом случаях, правда, только при вещественных частотах (это ограничение существенно затрудняет применение к векторной задаче теории возмущений).

Вопрос о существовании собственных значений спектральной задачи для волноведущих систем является чрезвычайно трудным. На саму возможность существования собственных значений у спектральных задач в неограниченных областях впервые указал Ф. Реллих в 1948 году (см. [12]). Затем в работах Д. Джонса и других авторов (см. [13]-[16]) был построен ряд примеров таких волноведущих систем, именно, ряд локально нерегулярных волноводов или изогнутых волноводов.

С физической точки зрения такие собственные функции представляют собой стоячие волны, не переносящие энергию. Во всех этих примерах поле убывает вдоль оси волновода экспонециальным образом. Большая часть энергии таких волн сосредоточена в конечной области, в <ловушке>, поэтому их и называют ловушечными модами. Впрочем, как было показано в нашей работе [17], в гофрированных волноводах существуют собственных функции, убывающие существенно медленнее — именно, степенным образом.

В скалярном случае в соответствующем пространстве Соболева W_2^1 задача об отыскании ловушечных мод представляет собой задачу отыскания собственных векторов ограниченного эрмитова оператора A:

$$u + \omega^2 Au = 0, \quad u \in W_2^1.$$

К настоящему моменту развиты методы анализа лишь изолированных (то есть лежащих вне непрерывного спектра) собственных значений (ср. [18]). Непрерывный спектр имеет простой физический смысл — это множество частот, при которых происходит излучение в бесконечные участки волновода. Значит, непрерывный спектр регулярного волновода начинается с первой частоты отсечки, а, в силу теоремы Вейля [19], непрерывный спектр локально нерегулярного волновода совпадает со спектром регулярного, то есть тоже начинается с первой частоты отсечки. Поэтому при помощи принципа Релея и его модификаций можно не только уточнить упомянутые выше условия существования ловушечных мод (частоты которых меньше первой частоты отсечки), но и изучить другие свойства дискретной части спектра. В частности, если регулярный волновод локально расширен или внутрь него помещено диэлектрическое тело, то существует хотя бы одно собственное значение, лежащие ниже первой частоты отсечки (см. [11]). Последнее утверждение верно и для векторного случая, хотя вид его непрерывного спектра пока не изучен.

В [16] было особо отмечено, что в вопросе существования вложенных собственных значений нет продвижения дальше построения примеров, и было предложено выяснить, сохранится ли собственное значение у волноведущей системы, если слегка возмутить ее параметры. Если бы резонансное множество оказалось бы устойчивым к малым возмущениям параметров системы, то можно было бы утверждать, что известные примеры верно отражают характерные свойства резонансного множества произвольного волновода.

Целью наших работ [20]-[22] как раз и было изучение поведения вложенных в непрерывный спектр собственных значений волновода при малых возмущениях его заполнения. То, что рассматриваются возмущения заполнения, а не границы, связано с тем, что этот случай несколько ближе к рассмотренному в теории возмущений, построенной Дж. Хаулендом [23],[24] для исследования квантовомеханических комплексных резонансов.

В наших работах рассмотрен волновод

$$\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^1, y \in S\right\}$$

с сечением S, представляющим собой односвязную конечную область в пространстве $\mathbb{R}^1$ или $\mathbb{R}^2$, заполненный неоднородным веществом, характеризуемом функцией $q(x, y)$. Задача о возбуждении колебаний током $fe^{-i\omega t}$ в скалярном приближении имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta u + \omega^2 q(x, y)u = f, \quad (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

а соответствующая ей спектральная задача —

$$\begin{cases} \Delta u + eq(x, y)u = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где e — собственное значение, а u — собственная функция. Будем далее всюду предполагать, что в волноводе не происходит затухание колебаний из-за поглощения в среде, то есть что $q(x, y)$ — вещественная, и что носители функций f и $q - 1$ ограничены.

Нами было показано, что эта задача всегда имеет решение $u_0(x, y)$, отвечающее вложенному собственному значению e_0, если заполнение волновода представляет собой <вставку> (то есть $q(x, y) \equiv q_0(x)$) и $q_0(x) - 1 \geq 0$ — достаточно малая функция. Обозначим как $\{\psi_n(y)\}$ и $\{\alpha_n^2\}$ набор собственных функций и собственных значений задачи Дирихле на сечение S, тогда функция $u_0(x, y)$ представима в виде произведения $u_0(x)\psi_2(y)$. (В ряде случаев эти собственные значения были вычислены в работе [25] как корни трансцендентных уравнений.) Целью дальнейшего рассмотрения было исследовать, сохранится ли вложенное собственное значение, если это заполнение будет возмущено:

$$q(x, y) = q_0(x) + \varepsilon q_1(x, y),$$

где q_1 — вещественная функция, а параметр ε характеризует малость возмущения.

В силу теоремы Реллиха-Като (см. [18]), при малом возмущении изолированные собственные значения сохраняются, что вполне согласуется с тем, что при $q\,(x,y) \geq 1$ всегда существует изолированное собственное значение (ср. [11]). Иначе обстоит дело с вложенными в непрерывный спектр собственными значениями. Дело в том, что в общем случае вложенное собственное значение при малых возмущениях может превращаться в комплексный резонанс. Так, например, спектральная задача о нахождении собственного значения e и функций $u(x)$ и $v(x)$ одного переменного $x \in \mathbb{R}^1$ вида

$$\begin{cases} u'' + (eq(x) - \alpha)u = e\varepsilon p(x)v, \\ v'' + (eq(x) - \beta)v = e\varepsilon p(x)u, \end{cases}$$

где $\alpha < \beta$ — заданные положительные числа, а $q(x) - 1$ и $p(x)$ — аналитические функции, регулярные в любой конечной точке вещественной оси и убывающие быстрее любой экспоненты, имеет при некоторых $q(x)$ вложенное собственное значение при $\varepsilon = 0$, и никогда не имеет таковых при $\varepsilon \neq 0$ (см. [26]).

Обычно в рамках теории возмущений для собственных значений, погруженных в непрерывный спектр, при помощи резольвенты невозмущенной задачи сводят исходную задачу к интегральному уравнению вида

$$v - \frac{\varepsilon}{e - e_0}\mathfrak{A}(e)v = 0, \tag{3}$$

где $\mathfrak{A}(e)$ — компактный голоморфный в окрестности точки e_0 оператор, а затем уже к задаче (3) применяют различные теоремы, связанные с теорией определителей Фредгольма (см. [23]). Однако применительно к задаче (2) вместо того, чтобы строить резольвенту волновода Ω с заполнением $q_0(x)$, мы воспользовались тем, что задача (1) может быть сведена к весьма сходному с (3) виду

$$v - \mathfrak{A}(\omega^2, \varepsilon)v = f, \tag{4}$$

где $\mathfrak{A}(\omega^2, \varepsilon)$ — компактный интегральный оператор, голоморфный при $\omega \neq \alpha_n$. Такое сведение для гладкого заполнения было проделано, в частности, в работах В.П. Шестопалова [10]. Поскольку кусочно-непрерывное заполнении важно для приложений, в нашей работе [21] процедура сведения проведена в общем случае несколько иным методом. При этом было показано, что вещественные собственные значения этого интегрального уравнения можно интерпретировать как собственные значения задачи (2). Более того, удалось доказать, что кратности собственных значений интегрального уравнения являются кратностями собственных значений задачи (2).

Преимущество задачи (4) по сравнению с исходной спектральной задачей (2) состоит в том, что для собственных значений компактной оператор-фукнции $\mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon)$ можно построить теорию возмущений. Еще задачи теории дифракции привели к необходимости изучения зависимости полюсов резольвенты регулярной в некоторой области B функции $\mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon)$ от параметра ε. Если не предполагать конечность порядка оператора $\mathfrak{A}$, то, как было показано в [10],[27], в окрестности полюса резольвенты $\mathfrak{A}(\lambda, 0)$ лежит полюс резольвенты $\mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon)$, но до настоящего момента оставалось неясным, зависит ли этот полюс от ε аналитически и сохраняется ли его кратность. Однако можно воспользоваться тем, что подавляющее большинство теорем теории аналитических функций переносится на теорию оператор-функций $\mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon)$, и доказать аналог подготовительной теоремы Вейерштрасса: если в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ компактный оператор $\mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon)$, голоморфный в области B λ-плоскости и в области $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, имеет при $\varepsilon = 0$ в области B только одно собственное значение e_0 кратности N, то все его собственные значения $\{e^{(n)}(\varepsilon)\}$, лежащие в области B, являются корнями алгебраического уравнения

$$e^N + a_1(\varepsilon)e^{N-1} + \cdots + a_N(\varepsilon) = 0,$$

где функции $a_n(\varepsilon)$ являются аналитическими функциями ε, регулярными в нуле. Эта теорема позволяет построить теорию возмущения для данного класса оператор-функций, абрис которой был дан в приложении к [21].

Для дальнейшего же достаточно заметить, что согласно этой теореме в окрестности однократного собственного значения e_0 невозмущенной задачи

(2), а, следовательно, и оператор-функции $\mathfrak{A}$ имеется собственное значение $e(\varepsilon)$ оператор-функции $\mathfrak{A}$. Более того, если допустить, что оно является и собственным значением задачи (2), то оно и соответствующая ему собственная функция $u(x, y; \varepsilon)$ являются аналитическими функциями от ε, регулярными в нуле, то есть их можно представить в виде рядов:

$$e(\varepsilon) = e_0 + e_1\varepsilon + \ldots, \quad u(x, y; \varepsilon) = u_0(x)\psi_2(y) + \varepsilon u_1(x, y) + \ldots .$$

Функция

$$w(x) = -\int\limits_S dy\, u_1(x, y)\psi_1(y)$$

удовлетворяет уравнению

$$w'' + [e_0 q_0(x) - \alpha_1^2]w = e_0 u_0(x) \int\limits_S dy\, q_1(x, y)\psi_0(y)\psi_1(y)$$

и, следовательно, принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R}^1)$ лишь при весьма специальных значениях q_1. Поэтому в общем случае (когда $q_1(x, y)$ — произвольное) предположение о том, что $e(\varepsilon)$ является и собственным значением задачи (2), не приемлемо. Отсюда следует, что в общем случае ловушечная мода может исчезнуть даже при малом вещественном возмущении заполнения волновода. Так, например, в случае, когда

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^1, \quad y \in [0,\ +\pi]\}$$

и

$$q_0(x) = \begin{cases} q_0, & |x| < 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases},$$

наименьшее из собственных значений, собственные функции которых имеют вид $u_2(x)\psi_2(x)$, исчезает при возмущении вида

$$q_1(x, y) = \begin{cases} \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)} \sin\sqrt{e_0 q_0 - \alpha_1^2}(x \pm 1) \cos\sqrt{\alpha_2^2 - e_0 q_0}\,x, & |x| < 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases},$$

если оно вложено в непрерывный спектр.

Таким образом, резонансное множество волновода неустойчиво к малым возмущениям заполнения и поэтому структура резонансного множества в общем случае сложнее, чем в известных примерах волноведущих систем, обладающих вложенными собственными значениями. При этом получается, что резонансные частоты могут исчезать при вещественных (а не только комплексных) возмущениях заполнения.

Целью настоящей диссертации стало разрешение следующих актуальных вопросов спектральной теории волноводов: является ли экспоненциальное убывание вдоль оси волновода характерным свойством всех ловушечных мод и устойчивы ли вложенные в непрерывный спектр собственные значения волноводов к малым возмущениям их параметров волновода. Перейдем к изложению содержания работы по главам.

В первой главе дан обзор исследований спектральных характеристик волноведущих систем, начиная с классических работ Ф. Реллиха. При обсуждении понятия ловушечной моды указано, что хотя во всех известных ранее примерах эти моды не только принадлежат пространству L^2, но и убывают экспоненциальным образом, существуют такие волноведущие системы, которые обладают ловушечными модами, убывающими степенным образом (см. также [17]).

Вторая и третья главы диссертации посвящены сравнительно мало изученным спектральным свойствам цилиндрических волноводов с локально-неоднородным заполнением в скалярном приближении (см. также [20]-[22]).

Во второй главе задача о возбуждении колебаний током сведена к интегральному уравнению, в которое спектральный параметр входит нелинейным образом. При этом в разделе 2.2 показано, что вещественные собственные значения этого интегрального уравнения можно интерпретировать как собственные значения волновода, а кратности собственных значений интегрального уравнения оказываются кратностями собственных значений волновода.

Третья глава посвящена вопросам существования вложенных ловушечных мод и, в первую очередь, изучению поведения вложенных в непрерывный спектр собственных значений волновода при малых возмущениях его заполнения. В разделе 3.2 среди заполнений выделено заполнение типа <вставки>, поскольку для заполнения этого типа существует бесконечная последовательность собственных значений (при выполнении некоторых дополнительных условий). Более того, в случае заполнения типа <простой вставки> и <колена> собственные значения найдены как корни трансцендентных уравнений (см. также [25]). Затем в разделе 3.3 доказана неустойчивость вложенных собственных значений волновода с заполнением типа вставки к малым вещественным возмущениям его заполнения. При этом построена строгая теория возмущения для вложенных собственных значений волновода, обосновывающая результаты нашей работы [20].

В приложении А рассмотрен пример задачи, близкой к спектральной задаче теории волноводов со вставкой, вложенные собственные значения которой исчезают при малом изменении коэффициентов, характеризующих заполнения (см. также [26]).

В приложении В построена теория возмущений для компактных оператор-функций, необходимая для обоснования сходимости рядов, применяемых в разделе 3.3. Эта теория уточняет результаты, приведенные в [27], и поэтому может быть полезной и в связи с другими приложениями.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту, заключаются в следующем:

- Построены волноведущие системы, обладающие ловушечными модами, убывающими существенно медленнее, чем в известных примерах.

- Задача о возбуждении колебаний током в волноводе с неоднородным заполнением сведена к интегральному уравнению. Доказано, что собственным и присоединенным функциям этого уравнения соответствуют собственные и присоединенные функции исходной задачи.

- Указан критерий существования бесконечной последовательности собственных значений для заполнений типа <вставки>. В случае заполнения типа <простой вставки> и <колена> собственные значения найдены как корни трансцендентных уравнений.

- Показано, что вложенные в непрерывный спектр собственные значения переходят в комплексные резонансы при малом вещественном возмущении заполнения, хотя они в первом порядке теории возмущений остаются вещественными.

- Приведен пример задачи, близкой к спектральной задаче теории волноводов со вставкой, вложенные собственные значения которой исчезают при малом изменении заполнения.

- Развита теория возмущений для некоторого класса компактных оператор-функций, встречающихся в математической теории волноведущих систем.

По теме диссертации опубликовано 11 печатных работ, еще 3 работы приняты к печати. Результаты первой главы представлены в [17],[28],[29]. Результаты второй главы изложены в [22] и, более детально, в [20],[21],[25]. Пример спектральной задачи с неустойчивыми собственными значениями из приложения А разобран также в [26]. Некоторые замечания об электромагнитном случае сделаны в [30]-[32]. Основные результаты докладывались

- на международной конференции студентов и аспирантов по фундаментальным наукам <Ломоносов-2001> (где доклад [32] был признан лучшим на подсекции),

- на 57-й научной сессии НТОРЭС им. А.С. Попова [28],

- на ломоносовских чтениях 2002 года [29],

- на научном семинаре <Численные методы электродинамики> физического факультета МГУ под рук. проф. А.Г. Свешникова и проф. А.С. Ильинского; февраль 2001 г., март 2002 г.

Глава 1

Ловушечные моды волноведущих систем.

В настоящей главе рассмотрены основные спектральные характеристики волноведущих систем. В разделе 1.1 дан обзор классических работ Ф. Реллиха и Д. Джонса. В разделе 1.2 изучено убывание ловушечных мод и указано, что, хотя во всех известных ранее примерах эти моды убывают экспоненциальным образом, существуют такие волноведущие системы, которые обладают ловушечными модами, убывающими степенным образом. В разделе 1.3 освещены спектральные свойства локально-нерегулярных волноводов и, в частности, вопросы о существовании ловушечных мод, сформулирована основная проблема, разбираемая в диссертации.

1.1 Ловушечные моды в неограниченных областях.

Рассмотрим неограниченную односвязную область Ω в пространстве $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$. Будем считать, что эта область заполнена неоднородным веществом, которое характеризуется функцией q. Задача о возбуждении колебаний током $fe^{-i\omega t}$ в скалярном приближении имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta u + \omega^2 q u = f, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

с некоторыми условиями на бесконечности, а соответствующая ей спектральная задача —

$$\begin{cases} \Delta u + equ = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

где e — собственное значение, а u — собственная функция. Будем далее всюду предполагать, что в области Ω не происходит затухание колебаний, то есть что q — вещественная, и что носители функций f и $q-1$ ограничены.

Говорят, что значения e, для которых существует нетривиальное решение u спектральной задачи (1.2), принадлежит спектру. Если для этого решения

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla\, u|^2\, d\tau < \infty \quad \text{и} \quad \int\limits_{\Omega} |u|^2\, q d\tau < \infty,$$

то есть $u \in \overset{\mathrm{O}}{W}{}_2^1(\Omega)$, тогда энергия, связанная с колебаниями, ограничена, и говорят, что e — собственное значение; совокупность всех собственных значений называют точечным спектром. Число независимых решений в случае, когда e — собственное значение, называют кратностью. С физической точки зрения такие поля u представляют собой стоячие волны, большая часть энергии которых сосредоточена в конечной области (в "ловушке"); поэтому их называют еще ловушечными модами. Если же энергия колебаний не ограничена так, что выписанные выше интегралы расходятся, то говорят, что e принадлежит непрерывному (существенному) спектру.

Заметим теперь, что спектральные свойства задачи (1.2) прекрасно изучены лишь в двух придельных случаях:

1) в задачах дифракции, когда область простирается на бесконечность, а вся ее граница лежит внутри сферы достаточно большого радиуса; в этом случае спектр $-\Delta$ является чисто непрерывным (см. [27]);

2) когда область Ω конечная; в этом случае спектр чисто дискретный, то есть представляет собой бесконечную последовательность собственных значений (см. [33],[34]), асимптотика которых была найдена Г. Вейлем и Т. Карлеманом (см. [35]).

Охарактеризовать спектр задач в полубесконечных областях куда сложнее, поскольку они занимают промежуточное положение между этими двумя предельными случаями, обладая как дискретным, так и непрерывным спектром. Исследование этих задач было начато Ф. Реллихом [12],[36] и Д. Джонсом [13] в 1944-1954. В этих работах исследованы ловушечные моды полых систем, то есть систем вида:

$$\begin{cases} \Delta u + eu = 0, \\ u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \end{cases} \tag{1.3}$$

в полубесконечных трубах в n-мерном пространстве с декартовыми координатами $x,\ y_1,\ y_2, ..., y_{n-1}$. Напомним определение.

Определение 1. Полубесконечная труба — это открытая область в n-мерном пространстве, если

1) поверхность $\partial\Omega$ имеет кусочно-непрерывную нормаль;

2) существует такое $P > 0$, что , во-первых, при всех $r \geq P$ любая плоскость $x = r$ делит Ω на две части:

$$\Omega_r = \{(x, y) \in \Omega : \quad x < r\} \text{ и } \Gamma_r = \Omega - \Omega_r,$$

причем Ω_r — односвязная конечная область, а во-вторых, область

$$E_r = \{(x, y) \in \Omega : \quad x = r\}$$

является односвязной конечной $(n-1)$-мерной областью, причем ей принадлежит точка $(x = r, y_1 = 0, \ldots y_{n-1} = 0)$.

В своей первой статье Реллих показал, что в случае, когда внешняя нормаль к любой точки полубесконечной трубы образует с фиксированным направлением угол, не меньший чем $90^\diamond$, то спектр $-\Delta$ непрерывен. Джонс показал далее, что коническая полубесконечная труба (то есть труба, совпадающая с конусом вне сферы достаточно большого радиуса) обладает чисто непрерывным спектром. Таким образом, спектр конических труб такой же, как в задаче дифракции во всем пространстве.

В своей второй статье Реллих получил некоторые результаты относительно точечного спектра. Он доказал, что сужающаяся полубесконечная труба имеет чисто дискретный спектр. Обсуждение этого случая (как и случая конечной области) основано на рассмотрении обобщенной спектральной задачи

$$\int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v)\, d\tau = e \int_{\Omega} (u, v)\, d\tau \quad \forall v \in \overset{\mathrm{o}}{W}{}_2^1(\Omega).$$

В силу теоремы Ф. Рисса, она может быть переписана в виде:

$$u = eHu,$$

где H — ограниченный самосопряженный оператор. Реллих доказал, что пространство Соболева $\overset{\mathrm{o}}{W}{}_2^1(\Omega)$, но не обязательно пространство $W_2^1\,(\Omega)$, вложено компактно в пространство $L^2(\Omega)$, поэтому H компактный. Следовательно, H имеет чисто дискретный спектр. Хотя этот случай весьма схож со случаем конечной области, его изучение еще далеко от завершения, в частности, асимптотика собственных значений пока не исследована.

Реллих также дал условия, при которых первая точка спектра является собственным значением и показал, что полубесконечная труба, которая становится цилиндрической на бесконечности, может удовлетворять этим условиям. (Требования леммы 2 Реллиха подразумевают, что труба является цилиндрической на бесконечности.) Джонс исследовал недискретный спектр и показал, что на любом конечном интервале спектр состоит из непрерывного спектра вмести с конечным числом собственных значений конечной кратности.

Грубо говоря, Джонс показал, что непрерывный спектр полубесконечной трубы есть $e \in [m,\ +\infty)$, где

$$m = \lim_{r=+\infty} m\,(r)$$

и $m(r)$ — наименьшее собственное значение задачи Дирихле для E_r или, в силу принципа Релея,

$$m\,(r) = \inf \frac{\|\nabla u\|^2_{L_2(E_r)}}{\|u\|^2_{L_2(E_r)}} \quad \text{по всем } u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(E_r).$$

Поскольку $m(r)$ обратно пропорционально объему E_r, полубесконечные трубы могут быть разделены на три главных класса:

1. конические полубесконечные области с чисто непрерывным спектром $[0,\ +\infty)$;

2. сужающиеся полубесконечные трубы с чисто дискретным спектром $(m = +\infty)$;

3. цилиндрические полубесконечные трубы с непрерывным спектром $[m,\ +\infty)$ вместе с конечным набором собственных значений конечной кратности без точек сгущения (m — положительная константа).

Это рассмотрение прямо переносится на случай, когда область представляет собой объединение конечного числа цилиндрических полутруб, то есть волноведущую систему довольно общего вида. Поэтому можно утверждать, что спектр волновода есть объединение непрерывного спектра $[m,\ +\infty)$ с конечным набором собственных значений конечной кратности без точек сгущения (m — положительная константа), причем существуют волноводы с непустым дискретным спектром, то есть обладающие ловушечными модами.

1.2 Убывание ловушечных мод на бесконечности.

Построенные в упомянутых выше работах Реллиха и Д. Джонса и в работах [14],[16] волноводы, обладающие ловушечными модами, являются локально нерегулярными. Но если плоский регулярный волновод

$$\Omega_0 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, \quad 0 < y < l\}$$

ширины l лишь локально деформировать до волновода Ω, так, что Ω и Ω_0 совпадают вне круга достаточно большого радиуса, то в получившемся волноводе все собственные функции вне этого круга представимы в виде суперпозиции нормальных волн (см. [8]):

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\sin{(\alpha_n y)}e^{-\sqrt{e-\alpha_n^2}|x|},$$

где $\alpha_n=\sqrt{\frac{\pi n}{l}}$ — собственные значения задачи Дирихле для оператора Лапласа на отрезке $(0,l)$. Таким образом, собственные функции во всех упомянутых выше примерах убывают экспоненциально. Поэтому большая часть энергии таких волн сосредоточена в конечной области, в "ловушке", а их называют ловушечными модами.

Однако экспоненциальное убывание не является характерным свойством собственных функций волноведущих систем. Так, как нам удалось показать, в гофрированных волноводах существуют собственных функции, отвечающие заданному собственному значению, убывающие существенно медленнее — именно, степенным образом. Условимся сначала о терминологии.

Определение 2. Волновод называется асимптотически слабо нерегулярным, если вне круга достаточно большого радиуса он сколь угодно мало отличается от некоторой прямой полосы. Волновод называется регулярным гофрированным, если его границы являются периодическими функциями от x (Ox — ось волновода). Волновод называется асимптотически слабо нерегулярным гофрированным волноводом, если вне круга достаточно большого радиуса он сколь угодно мало отличается от некоторого регулярного гофрированного волновода.

Пусть $e>0$ заданное число. Тогда волноводы, обладающие заданным собственное значение e, можно построить как области между узловыми линиями функции $u(x,y)$, удовлетворяющей в области

$$\mathbb{R}^+=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad y_0\geq y\geq 0\}$$

(где y_0 — константа) вспомогательной задаче

$$\begin{cases} \Delta u + eu = 0, \\ u|_{y=0} = 0, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\,(u(x,y))^2 < \infty \quad \text{при} \quad \forall y \geq 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Ее общее решение можно выписать, применив к ней преобразование Фурье по x. В самом деле, поскольку решение задачи (1.4) принадлежит $L^2(\mathbb{R}^1)$ при любом y, то существует ее Фурье преобразование

$$\widehat{u}(\omega, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx u(x,y) e^{i\omega x}$$

и

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega \widehat{u} e^{-i\omega x}.$$

Поэтому применив к (1.4) Фурье-преобразование получим

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial y^2} + (e - \omega^2)\widehat{u} = 0, \\ \widehat{u}|_{y=0} = 0, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega\,(\widehat{u}(\omega,y))^2 < \infty \quad \text{при} \quad \forall y \geq 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Эта задача однозначно разрешима, если добавить к ней условие

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial y}|_{y=0} = \sqrt{e - \omega^2}\varphi(\omega),$$

и ее решение дается формулой

$$\widehat{u}(\omega, y) = \varphi(\omega) \sin(\sqrt{e - \omega^2} y),$$

где в качестве $\varphi(\omega)$ можно выбрать любую функцию, для которой

$$\varphi(\omega) \sin(\sqrt{e - \omega^2} y) \in L^2(\mathbb{R}^1)$$

при любом $y \in [0,\ y_0]$. Поэтому решение задачи (1.4) есть

$$u(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega \varphi(\omega) \sin(\sqrt{e - \omega^2} y) e^{-i\omega x}.$$

Эта функция принадлежит $L^2(\mathbb{R}^1)$ при любом y в силу равенства Парсеваля.

В частности, возьмем

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2i}, & \omega \in (0, +a) \\ -\frac{1}{2i}, & \omega \in (-a, 0) \\ 0 & \end{cases},$$

($a^2 < e$), тогда

$$u(x, y) = \int_0^{+a} d\omega \sin(\sqrt{e - \omega^2} y) \sin \omega x \qquad (1.6)$$

Найдем асимптотику этого интеграла при больших x, следуя [37]. Интегрируя по частям дважды, получим

$$u(x, y) = \frac{1}{x}\{\sin(\sqrt{e} y) - \sin(\sqrt{e - a^2} y) \cos ax\} + O(\frac{1}{|x|^2}) \qquad (1.7)$$

Если ограничить изменение y конечным отрезком $[0, y_0]$, узловые линии, заданные уравнением $u(x, y) = 0$, асимптотически стремятся к решению уравнения

$$\sin(\sqrt{e} y) - \sin(\sqrt{e - a^2} y) \cos ax = 0. \qquad (1.8)$$

Важно отметить, что узловые линии совпадают графически с построенной асимптотикой уже при $x > 20$ (см. рис. 1).

Заметим, что решение уравнения (1.8) - функция периодическая с периодом $T = \frac{2\pi}{a}$. Как видно из рис. 2-3, область между любыми двумя узловыми линиями функции $u(x, y)$ представляет собой нерегулярно гофрованную полосу. Из асимптотического поведения узловых линий ясно, что вне круга достаточно большого радиуса эта полоса сколь угодно мало отличается от регулярно гофрированной полосы, заключенной между двумя подходящими решениями уравнения (1.8), то есть эта область является асимптотически слабо нерегулярным гофрированным волноводом. Обозначим ее как Ω.

В этом волноводе Ω функция $u(x, y)$, очевидно, удовлетворяет уравнению $\Delta u + eu = 0$ и обращается в нуль на его границе. Поскольку $u(x, y) = O(\frac{1}{|x|})$,

то интеграл
$$\int\limits_{\Omega} dx\; dy\; u(x,y)^2 < \infty$$
и принадлежит $L^2(\Omega)$. Поэтому эта функция представляют собой собственную функцию задачи (1.3), отвечающую заданному собственному значению e.

Особо следует рассмотреть случай, когда $a = \sqrt{e}$. В этом случае стоящая под интегралом (1.6) функция
$$\sin\left(\sqrt{e-\omega^2}y\right)$$
имеет алгебраическую особенность при $\omega = \pm a$. Поэтому этот интеграл можно взять по частям лишь один раз и получить только (на основании леммы Римана-Лебега)
$$u(x,y) = \frac{1}{x}\sin\left(\sqrt{e}y\right) + o\left(\frac{1}{|x|}\right).$$
Значит, узловые линии приближаются к прямым
$$y(x) = \frac{\pi m}{a} \quad \text{(m — целые числа)},$$
хотя и значительно медленнее, чем в предыдущем случае узловые линии к своим асимтотикам. Теперь область между двумя узловыми линиями функции $u(x,y)$ может быть получена путем локальной деформации регулярного негофрированного волновода. Таким образом, эта область является асимптотически слабо нерегулярным волноводом.

Замечание 1.2.1. В последнем случае при помощи таблиц Maple можно найти аналитическое выражение для интеграла (1.6), именно
$$u(x,y;\ e) = 2\sqrt{e}f(\sqrt{e}x, \sqrt{e}y),$$
где
$$f(\xi,\eta) = \xi\eta\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1+k}{(4+2k)!}\text{hypergeom}\left([1],\ [\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}+k],\ -\frac{1}{4}\xi^2\right)\eta^{2k}$$

и hypergeom$([n_1,\ n_2,\dots],[m_1,\ m_2,\dots],\ z)$ — гипергеометрическая функция Бернса (Barnes), то есть

$$\text{hypergeom}([n_1,\ n_2,\dots],[m_1,\ m_2,\dots],\ z) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(n_1+k)\Gamma(n_2+k)\dots}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)\dots} \frac{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)\dots}{\Gamma(m_1+k)\Gamma(m_2+k)\dots}.$$

Из асимптотики видно, что построенные собственные функции асимптотически слабо нерегулярного волновода, как гофрированного, так и простого, убывают как x^{-1}, что и утверждалось выше. Построенный пример регулярного волновода, деформированного асимптотически слабо, но не локально, указывает также на принципиальные различия локальных и нелокальных деформаций.

1.3 Ловушечные моды локально-нерегулярных волноводов.

Хорошо известно, что регулярный волновод

$$\Omega = \left\{(x,y):\ x\in\mathbb{R}^1, y\in S\right\}$$

постоянного сечения S не имеет ловушечных мод. Поскольку он представляет собой объединение двух полутруб, его непрерывный спектр — это луч $[\alpha_1,+\infty)$, где α_1 — корень из наименьшего собственного значения задачи Дирихле на сечении волновода.

С другой стороны, можно заметить, что при малых частотах большая часть энергии поля, возбужденного током $fe^{-i\omega t}$, локализована. При частотах, больших некоторой частоты $\omega[j]$, от области, где имеется ток, расходятся бегущие волны. Частоты $\omega[j]$, при которой происходит переход на режим излучения, называют частотами отсечки. Можно показать, что эти частоты являются корнями из собственных значений α_n^2 задач Дирихле для оператора Лапласа на сечении волновода (в векторном случае — задачи Дирихле и

Неймана; см. [1]- [3],[8]). Поэтому непрерывный спектр имеет простой физический смысл — это множество частот, при которых происходит излучение, и сами частоты отсечки α_n.

Остается охарактеризовать поле, возбуждаемое током вида $fe^{-i\omega t}$ при ω, совпадающей с одной из частот отсечки. Будем называть резонансным множеством волновода множество частот, при которых задача о возбуждении гармонических колебаний током $fe^{-i\omega t}$ не имеет решения, а частоты этого множества характеризовать ростом со времени амплитуды нестационарного поля, возбуждаемого током при такой частоте. В силу сказанного, частоты отсечки формируют резонансное множество регулярного волновода, и как показано в [9], при этих частотах существует лишь нестационарное поле, амплитуда которого растет со временем как $\sqrt{t}$.

Обратимся теперь к локально-нерегулярному волноводу, то есть волноводу, совпадающему с регулярным волноводом вне сферы достаточно большого радиуса. В силу теоремы Вейля [19], его непрерывный спектр совпадает со спектром регулярного, то есть тоже начинается с первой частоты отсечки. (Ниже в разделе 3.1 этот вопрос рассмотрен более подробно для волновода с нерегулярным заполнением). Можно показать, что и в этом случае непрерывный спектр — это множество частот, при которых происходит излучение, и сами частоты отсечки, принадлежащие резонансному множеству.

Однако, как было отмечено выше в разделе 1.1, такие системы могут обладать ловушечными модами. При частотах, соответствующим этим модам, задача о возбуждении гармонических колебаний током не имеет единственного решения. Поскольку эта задача является фредольмовой и при этих частотах ее решение не единственно, то оно существует не при всех токах и, значит, сами эти частоты тоже принадлежат резонансному множеству. Характерной чертой этих резонансных частот является то, что при них существует лишь нестационарное поле, амплитуда которого растет со временем как t, то есть также как и в случае явления резонанса в ограниченной области [9].

Заметим, наконец, что других частот в резонансном множестве нет, поскольку для решения u однородной задачи, удовлетворяющего парциальным условиям излучения, ограничен интеграл:

$$\int\limits_{\Omega} |u|^2 d\tau < \infty,$$

где Ω — полость волновода, и значит, решение неоднородной задачи не единственно, только в том случае, если при этой частоте имеется ловушечная мода (здесь и далее предполагается, что частоты не совпадают с частотами отсечки).

Принцип Рэлея и его модификации позволили существенно уточнить результаты Реллиха, касающиеся существования ловушечных мод локально нерегулярных волноводов: оказалось, что локально-расширенный полый волновод и цилиндрический волновод, заполнение которого удовлетворяет неравенству $q \leq 1$, обладают изолированным собственными значениями, лежащими ниже нижних границ их непрерывных спектров. Наоборот, локально сжатый волновод и цилиндрический волновод, заполнение которого удовлетворяет неравенству $q \leq 1$, не обладают таковым (см. [11]).

Отсутствие аналога принципа Рэлея для погруженных в непрерывный спектр собственных значений ограниченного самосопряженного оператора значительно затрудняет исследование вопроса об их существовании, из-за чего в настоящее время не ясно, существуют ли вообще собственные значения спектральной задачи (1.2), вложенные в непрерывный спектр, на что было особо указано в [9]. Конечно, мы можем поднять нижнюю границу непрерывного спектра в случае симметричного волновода.

Именно этим приемом в [13] показано, как заменить в задаче (1.3) граничное условие Дирихле на условие третьего рода, чтобы появилось вложенное собственное значение, а в [14], [16] доказано, что на оси плоского волновода Ω с условием Дирихле или Неймана на границе можно вставить препятствие T так, чтобы спектральная задача

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, \quad (x,y) \in \Omega \smallsmile T, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ или } \frac{\partial}{\partial n} u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} u|_{\partial T} = 0, \\ u \in W_2^1(\Omega) \end{cases}$$

обладала хотя бы одним вложенным собственным значением. В частности, для случая, когда препятствие T представляет собой круг радиуса a, была изучена зависимость этого собственного значения от a. Недавно в [15] было показано, что при некоторых радиусах существуют более высокие вложенные собственные значения, однако их уже не удается рассмотреть как функции от радиуса.

Те же идеи применимы и к волноводу с условиями Дирихле на всей границе. Именно, если плоский полый волновод симметричен относительно оси Ox, то есть

$$\Omega = \Omega' + \Omega'' \text{ и } \Omega'' = \{(x,y): \ (x,-y) \in \Omega'\},$$

то непрерывный спектр волновода Ω' начинается со второй частоты отсечки α_2 и поэтому, если регулярный волновод локально слабо расширен, у волновода Ω' существует собственное значение $\alpha_2^2 > e' > \alpha_1^2$ и собственная функция $u' \in W_2^1(\Omega')$. Пусть u равно u' в Ω' и $-u'$ — в Ω'', тогда, очевидно, u — собственная функция волновода Ω, соответствующая собственному значению $e' > \alpha_1^2$. Аналогично, регулярный волновод, внутрь которого помещено тело с заполнением $q > 0$, симметричным относительно оси волновода Ox, тоже обладает вложенным собственным значением.

К сожалению, продвинуться дальше построения подобного рода примеров пока не удалось. Поэтому можно попробовать выяснить сохраниться ли собственное значение у волноведущей системы, если слегка возмутить ее параметры, что и было предложено в [16] . В частности, взяв за невозмущенную волноведущую систему симметричный полый волновод, можно было бы изучить малые несимметричные возмущения границы Ω или, взяв за невозмущенную волноведущую систему волновод постоянного сечения с переменным заполнением, малые возмущения заполнения.

Только здесь опять следует различать изолированные и вложенные в непрерывный спектр собственные значения. В силу теоремы Реллиха-Като (см. [18]) при малом возмущении изолированные собственные значения сохраняются. В частности, если малые вещественные возмущения заполнения симметричного волновода сохранят изолированное собственное значения, что вполне согласуется с тем, что у локально расширенного волновода всегда существует изолированное собственное значение.

Иначе обстоит дело с вложенными в непрерывный спектр собственными значениями, поскольку в общем случае вложенное собственное значение при малых возмущениях может превращаться в комплексный резонанс (см. [23]-[24],[38]). Можно, например, указать на следующий простой пример задачи на собственные значения, у которой исчезают вложенные собственные значения. Рассмотрим спектральную задачу о нахождении собственного значения e и функций $u(x)$ и $v(x)$ одного переменного $x \in \mathbb{R}^1$ вида

$$\begin{cases} u'' + (eq(x) - \alpha)u = ep(x)v, \\ v'' + (eq(x) - \beta)v = ep(x)u. \end{cases} \tag{1.9}$$

Здесь $\alpha < \beta$ — положительные константы, а $q(x) - 1$ и $p(x)$ — аналитические функции, регулярные в любой конечной точке вещественной оси и убывающие быстрее любой экспоненты. Эта задача является модельным приближением для изучения спектральной задачи (1.2) в волноводе постоянного сечения S с неоднородным заполнением q. В самом деле, решение (1.2) всегда можно представить в виде ряда по собственным функциям $\{\psi_n\}$ оператора Лапласа задачи Дирихле на сечении S:

$$u(x, y;\, e) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x;\, e)\psi_n(y),$$

причем $u_n\,(x) \in L^2(\mathbb{R}^1) \cap C^1(\mathbb{R}^1)$. Подставляя это выражение в (1.2), получим вместо (1.2) бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u_n'' - \alpha_n^2 u_n + e \sum\limits_{m=1}^{\infty} q_{n,m} u_m = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^1} dx |u_n(x)|^2 < \infty, \end{cases} \tag{1.10}$$

где

$$q_{n,m}(x) = \int\limits_{S} dy\ q(x,y) \psi_n(y) \psi_m(y).$$

Нетрудно видеть, что задача (1.9) является весьма частным случаем задачи (1.10), однако можно надеяться, что и она передает характерные особенности поведения спектра задачи (1.2). В приложении A показано как подобрать функцию $q(x)$ так, чтобы эта задача имеет вложенное собственное значение при $\varepsilon = 0$, и никогда не имеет таковых при $\varepsilon \neq 0$.

Теория возмущений для вложенных собственных значений, развитая в абстрактной форме в работах Дж. Хауленда [23]-[24], основана на возможности сведения исходной задачи к задаче о собственных значениях некоторой компактной оператор-функции $\mathfrak{A}(e, \varepsilon)$, зависящей от своих аргументов аналитически.

Впервые этот подход был применен при рассмотрении спектральных характеристик уравнения Шредингера

$$\Delta u + (V - e) u = 0$$

в $\mathbb{R}^n$ с финитным потенциалом V, которое было сведено к интегральному уравнению

$$v + V(\Delta - e)^{-1} v = 0$$

еще в 1960-х Гроссманом и Ву (см. [38]). Несмотря на то, что резольвента $(\Delta - e)^{-1}$ определена лишь при $e \notin [0, +\infty)$ и является в этой области, обозначим ее как T, однозначной регулярной функцией, аналитическое продолжение оператора $\mathfrak{A}(e) = V(\Delta - e)^{-1}$ оказывается компактной двузначной аналитической функцией e с нулем в качестве точки ветвления. Это аналитическое продолжение естественно обозначать опять как $V(\Delta - e)^{-1}$. Однако при этом следует помнить, что резольвента $(\Delta - e)^{-1}$ не является аналитической оператор-функцией на линии $e \in [0, +\infty)$, поэтому она не может быть продолжена аналитически за нее и остается однозначной, а функция $\mathfrak{A}(e) = V(\Delta - e)^{-1}$, напротив, допускает продолжение за эту линию и в итоге оказывается двузначной. Поэтому утверждение о двузначности функции $V(\Delta - e)^{-1}$ не противоречит однозначности резольвенты $(\Delta - e)^{-1}$.

Нетрудно видеть, что собственные значения $\mathfrak{A}(e)$ являются собственными значениями (которых, вообще говоря, в случае задачи в $\mathbb{R}^n$ их не существует) или комплексными резонансами исходного уравнения Шредингера. Это наблюдение послужило основой для изучения его спектральных свойств, в частности, аналитическая зависимость резонансов от параметра возмущения потенциала не вызывает сейчас особых сомнений.

На самом деле, описанная ситуация является частным следствием некоторой общей теоремы. Именно, пусть ограниченные эрмитовы операторы A и A_0 имеют одинаковые существенные спектры

$$\sigma_{\text{ess}}(A) = \sigma_{\text{ess}}(A_0),$$

то по теореме Дж. фон Неймана [39] (см. также [18]) существуют компактный оператор V и унитарный U, такие, что

$$A = U^{-1} A_0 U + V. \tag{1.11}$$

Пусть далее $R(A, e)$ — резольвента оператора A, тогда из соотношения

$$R(A, e) - R(U^{-1} A_0 U, e) = eR(A, e)(A - UBU^{-1}) R(U^{-1} A_0 U, e)$$

тут же имеем

$$R(A, e)[E - eVU^{-1} R(A_0, e)U] = U^{-1} R(A_0, e)U. \tag{1.12}$$

Таким образом, нахождение резольвенты A свелось к нахождению резольвенты $\mathfrak{A} = eVU^{-1} R(A_0, e)U$.

Очевидно, что в точках области T, где резольвента $R(A_0, e)$ определена и ограничена, оператор $\mathfrak{A} = eVU^{-1} R(A_0, e)U$ является компактным, зависящим от e аналитически. Рассматривая его как бесконечную матрицу, каждый элемент которой представляет собой аналитическую функцию, его можно продолжить до некоторой многозначной аналитической компактной оператор-функции $\mathfrak{A}(e)$, заданной на некоторой римановой поверхности $\mathfrak{f}$. При этом T является лишь ее листом.

Заметим, что в силу принципа продолжения равенства при тех $f \in \mathfrak{H}$, для которых определено $R(A, e)f$, по формуле (1.12) все еще можно рассчитывать резольвенту. Таким образом, область применения теории опрертор-функций комплексной переменной ограничена не листом T, а поверхностью $\mathfrak{f}$.

К сожалению, в общем случае T может совпадать с $\mathfrak{f}$, что эквивалентно известным примерам непродолжаемых рядов из теории функции (см. [40]). Однако, выбирая A и A_0 достаточно близкими, можно добиться, чтобы $\mathfrak{A}(e)$ был бы компактной оператор-функцией почти при всех e.

В случае, когда в качестве A_0 взят оператор, соответствующей задаче о возбуждении колебаний в полом волноводе, а в качестве A — оператор, соответствующей задаче о возбуждении колебаний в волноводе с возмущенными параметрами, доказать компактность $\mathfrak{A}(e)$ проще всего, когда возмущено заполнение, поскольку тогда $\mathfrak{A}(e)$ выписывается явно. Поэтому, хотя волноводы, заполненные неоднородным веществом, изучены значительно меньше, рассмотреть их спектральные свойства легче. В связи с этим в следующей главе мы сконцентрируем внимание на волноводах этого типа.

Глава 2

Задача о возбуждении колебаний током в волноводе, заполненном неоднородным веществом.

Данная глава диссертации посвящена спектральным свойствам цилиндрических волноводов с локально неоднородным заполнением в скалярном приближении. В разделе 2.1 построена резольвента регулярного волновода в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\,\mathrm{loc}}(\Omega)$. В разделе 2.2 задача о возбуждении колебаний током в волноводе, заполненным локально неоднородным веществом, сведена к интегральному уравнению, в которое спектральный параметр входит нелинейным образом.

При доказательстве существования решения задачи о возбуждении током колебаний в волноводе эта задача была сведена к интегральному уравнению (см. [41],[10]). Следует несколько уточнить результаты, поскольку, во-первых, в этих работах речь шла о бесконечно гладких решениях, а не об обобщенных и, во-вторых, не было доказано, что кратность собственного значения исходной задачи совпадает с кратностью собственного значения интегрального уравнения. Желание рассматривать обобщенные решения связано с тем, что только такие решения существуют в случае, когда заполнение кусочно непрерывно, а этот случай важен как для практических приложений, так и для построения модельных примеров.

Для того чтобы наглядно изложить основные идеи проведенного нами исследования, мы здесь ограничимся рассмотрением скалярного случая, являющегося наиболее простой математической моделью волновода. Перенесение этих идей на общий электромагнитный случай связано в основном лишь с техническими трудностями.

Рассмотрим волновод

$$\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^1, y \in S\right\}$$

сечения S, представляющего собой односвязную конечную область в $\mathbb{R}^1$ или $\mathbb{R}^2$; в последнем случае $y = (y_1,\ y_2)^T$ — двумерный вектор. Пусть волновод заполнен неоднородным веществом, которое характеризуется кусочно-непрерывным заполнением $q(x, y)$. Будем считать, что в волноводе не происходит затухания колебаний (т.е. $q(x, y)$ вещественная) и неоднородность в заполнении локальная, а именно,

$$\operatorname{Supp} q(x, y) - 1 \subset \Omega' = [a,\ b] \otimes S.$$

Задачу о возбуждении колебаний током f, локализованным в Ω', можно поставить так:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda q(x, y) u = f, \quad \operatorname{Supp} f \subset \Omega', \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Основную сложность при рассмотрении задачи (2.1) представляет учет условий на бесконечности, в качестве которых будем использовать парциальные условия излучения; их постановка была осуществлена в [7]. Именно, будем далее искать только те решения задачи (2.1), которые удовлетворяют парциальным условиям излучения в соответствии со следующим определением.

Определение 3. Пусть α_n^2 — собственные значения задачи Дирихле на сечении S. Если при $x > b$ имеет место представление

$$u = \sum \frac{C''_m}{2\gamma_m(\lambda)} e^{i\gamma_m(\lambda)x},$$

где $\gamma_n(\lambda) = \sqrt{\lambda - \alpha_n^2}$, и аналогично — при $x < a$, т.е. при больших $|x|$ поле u представляет собой суперпозицию волн, бегущих от источника и к источнику, то говорят, что u удовлетворяет (главным или побочным) парциальным условиям излучения.

Поскольку с физической точки зрения при возбуждении поля u током f волны должны бежать от источника, говорят, что u удовлетворяет физическим или главным условиям излучения, если в этой формуле стоят только главные значения корней γ_n, т.е. такие, что при $\lambda \notin (\alpha_n^2, +\infty)$ верно неравенство $\operatorname{Im} \gamma_n(\lambda) > 0$, а при $\lambda \in (\alpha_n^2, +\infty)$ верно $\gamma_n(\lambda) > 0$. Если конечное число корней имеет побочное значение, то и условия излучения называют побочными.

Замечание 2.0.1. Парциальные условия излучения были предложены А.Г. Свешниковым в [7] как условия, выделяющие волны, бегущие от источника. Мы рассматриваем случаи, когда корни γ_n имеют главные или побочные значения, вмести исключительно ради краткости. При этом, однако, следует подчеркнуть, что физический смысл имеет лишь главные парциальные условия, а побочные являются лишь вспомогательным средством, необходимым для дальнейшего.

Поскольку решение, удовлетворяющее условиям излучения, не всегда принадлежит $W_2^1(\Omega)$, естественно искать обобщенное решение задачи (2.1), принадлежащее более широкому линейному пространству. Именно, введем пространство $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ как множество всех функций, представимых в виде суммы функции из $C(\Omega)$, быть может не лежащей даже в $L^2(\Omega)$, но равной нулю на границе $\partial\Omega$, и функции из $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$. Тогда обобщенную постановку задачи (2.1) можно записать в виде: найти $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\,\mathrm{loc}}(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению

$$(\Delta w,\ u)_{L^2(\Omega)} + \lambda(w,\ qu)_{L^2(\Omega)} = (w,\ f)_{L^2(\Omega)} \quad \forall w \in C_0^\infty(\Omega).$$

2.1 Резольвента регулярного волновода.

Выясним сначала поведение резольвенты задачи (2.1) в простейшем случае полого волновода. В этом случае методом разделения переменных ее можно явно построить, т.е. показать, что задача

$$([\Delta + \lambda]w,\ u)_{L^2(\Omega)} = (w,\ v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall w \in C_0^\infty(\Omega), \tag{2.2}$$

где $\mathrm{Supp}\, v \in \Omega'$, имеет единственное решение u, удовлетворяющее парциальным условиям излучения.

Предположим, что задача (2.2) имеет обобщенное решение $u(x, y) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ при данном λ, тогда оно представимо в виде суммы непрерывной функции, которая заведомо принадлежит $L^2(S)$ при любом x, и функции $u'(x, y) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$. Поскольку при любом x

$$\int\limits_S |u'(x,y)|^2\, dy = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_S \frac{\partial}{\partial x} |u'(x,y)|^2\, dxdy \le \mathrm{const} ||u'||^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)},$$

функция u' тоже принадлежит $L^2(S)$. Поэтому и $u(x, y) \in L^2(S)$ при любом x и ее можно разложить в сходящийся по норме $L^2(S)$ ряд

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\psi_n(y)$$

по собственным функциям ψ_n задачи

$$\begin{cases} \Delta_\perp \psi + \alpha^2 \psi = 0, \\ \psi|_{\partial S} = 0 \end{cases}$$

на сечении S, предварительно перенумеровав собственные значения этой задачи (так называемые квадраты частот отсечки) в порядке возрастания.

Для вычисления коэффициентов $u_m(x)$ подставим $w(x, y) = w(x)\psi_n(y)$ в (2.2) и получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[w'' u_m + (\lambda - \alpha_m^2) w(x) u_m(x) - w(x) v(x)\right] dx = 0 \quad \forall w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1),$$

т.е. $u_m(x)$ является обобщенным решением уравнения

$$u_m'' + (\lambda - \alpha_m^2)u_m = v_m.$$

Его решение при помощи функции Грина можно представить в виде

$$u_m(x) = \frac{i}{2\gamma_m(\lambda)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{i\gamma_m(\lambda)|x-\xi|} v_m(\xi) + C_m e^{i\gamma_m(\lambda)x} + C_m' e^{-i\gamma_m(\lambda)x},$$

где значение корня $\gamma_n(\lambda)^2 = \lambda - \alpha_n^2$ может быть как главным, так и побочным [42].

При $x > b$ имеет место представление

$$u = \sum \frac{C_m''}{2\gamma_m(\lambda)} e^{i\gamma_m(\lambda)x} + C_m e^{i\gamma_m(\lambda)x} + C_m' e^{-i\gamma_m(\lambda)x};$$

аналогично, при $x < a$ имеем

$$u = \sum \frac{C_m'''}{2\gamma_m(\lambda)} e^{-i\gamma_m(\lambda)x} + C_m e^{i\gamma_m(\lambda)x} + C_m' e^{-i\gamma_m(\lambda)x}.$$

Поэтому для того, чтобы u удовлетворяла парциальным условиям излучения, необходимо, чтобы $C_m = C_m' = 0$. Значит, удовлетворяющее главным или побочным условиям излучения решение задачи (2.2), если оно вообще существует, имеет вид

$$u = R_0(\lambda)v,$$

где

$$R_0(\lambda)v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{2\gamma_n(\lambda)} \int\limits_{\Omega} d\xi d\eta e^{i\gamma_n(\lambda)|x-\xi|} \psi_n(\eta)\psi_n(y)\, v(\xi,\eta). \tag{2.3}$$

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 1. *Пусть $v \in L^2(\Omega')$ и в формуле* (2.3) *все корни $\gamma_n(\lambda)$, начиная с некоторого n, имеют главное значение. Тогда ряд для $R_0(\lambda)v$ сходится по норме $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и является обобщенным решением задачи* (2.2). *Более того, в этом случае в окрестности любой точки $\lambda_0 \neq \alpha_n^2$ найдется такое N, что N-й остаток R_0^N ряда для $R_0(\lambda)$ принадлежит $\mathfrak{L}(L^2(\Omega'), \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ и регулярен там.*

Замечание 2.1.1. Здесь и далее запись $A \in \mathfrak{L}(E, F)$ означает, что оператор A является ограниченным оператором, переводящим банахово пространство E в подмножество банахова пространства F (см. [43]).

Замечание 2.1.2. В [9], [10] разбирался случай, когда $v \in C_0^\infty(\Omega)$. В [9] указано, что ряд для $R_0 v$ при физическом выборе корней сходится равномерно в норме C, если $v \in C_0^\infty(\Omega')$, и поэтому является классическим решением задачи (2.2).

Доказательство. Пусть λ принадлежит достаточно малой окрестности $\lambda_0 \neq \alpha_n^2$. По условию, значения $\gamma_n(\lambda)$ становятся главными, начиная с некоторого номера; тогда найдется столь большое N, что $\operatorname{Im} \gamma_n(\lambda) > 0$ при $n \geq N$. Но любая функция $v \in L^2(\Omega')$ может быть представлена в виде

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{N-1} (\psi_n, v)_{L^2(S)} \psi_n(y) + v',$$

где v' — функция, ортогональная к $\psi_1, \ \ldots, \ \psi_{N-1}$. Подстановка

$$u = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{i}{2\gamma_n(\lambda)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{i\gamma_n(\lambda)|x-\xi|} (\psi_n, v)_{L^2(S)} \psi_n(y) + u'$$

приводит к задаче

$$([\Delta + \lambda] w', \ u')_{L^2(\Omega)} = (w', \ v')_{L^2(\Omega)} \quad \forall w' \in C_0^\infty(\Omega) \tag{2.4}$$

У этой задачи существует решение из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

В самом деле, в силу теоремы Рисса [34],[33], задача (2.4) в пространстве

$$\left\{ u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) : \quad (u, \ \psi_n) = 0, \quad n = 1, \ 2, \ \ldots, \ N-1 \right\}$$

имеет вид

$$u' + \lambda A u' = H v',$$

где $A \in \mathfrak{L}(\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ и $H \in \mathfrak{L}(L^2(\Omega'), \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ — ограниченные эрмитовы операторы, заданные билинейными формами:

$$(w, Av)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega wvq \, dxdy, \quad (w, Hv)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega wv \, dxdy.$$

Ограниченность H можно доказать следующим образом. Поскольку для любой $w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$(w, Hv)_{W_2^1} = (w, v)_{L^2} \leq ||w||_{L^2}||v||_{L^2}$$

и $||w||_{L^2}^2 \leq 4\,(\mathrm{diam} S)^2||w||_{W_2^1}^2$ (см. [44]), то верно неравенство

$$||H|| \leq 2\,\mathrm{diam}\, S \equiv h.$$

При $\lambda_0 \notin [\alpha_1^2, +\infty)$ существует резольвента $(E + \lambda A)^{-1}$, регулярная в окрестности точки λ_0. Поэтому справедлива оценка

$$(w, (E + \lambda A)^{-1} Hv)_{W_2^1} \leq h||(E + \lambda A)^{-1}||_{W_2^1}||v||_{L^2}||w||_{W_2^1}.$$

Это означает, что в окрестности такой точки λ_0

$$(E + \lambda A)^{-1} H \in \mathfrak{L}(L^2(\Omega'), \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)).$$

Поэтому в этой окрестности существует решение u' задачи (2.4):

$$u' = (E + \lambda A)^{-1} Hv',$$

а значит, и решение задачи (2.2), которое имеет вид

$$u = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{i}{2\gamma_n(\lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{i\gamma_n(\lambda)|x-\xi|}(\psi_n, v)_{L^2(S)}\psi_n(y) + (E + \lambda A)^{-1} Hv'.$$

С другой стороны, по доказанному оно представимо в виде $R_0 v$, поэтому остаток резольвенты

$$R_0^N(\lambda) = (E + \lambda A)^{-1} H$$

и, следовательно, этот остаток является регулярной в окрестности λ_0 оператор-функцией, принадлежащей $\mathfrak{L}(L^2(\Omega'), \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$.

Если же $\alpha_N^2 > \lambda_0 > 0$, то отсюда следует, что у задачи (2.2) имеются решения при $\lambda_0 + 0i$ и $\lambda_0 - 0i$ и они стремятся друг к другу. Поэтому непрерывный спектр A начинается с α_N^2, а собственных значений у него нет (ср. [13]). Значит, и при таких λ_0 опять существует резольвента $(E + \lambda A)^{-1}$, регулярная в окрестности точки λ_0. Повторяя сказанное выше, получаем

$$R_0^N(\lambda) = (E + \lambda A)^{-1} H \in \mathfrak{L}(L^2(\Omega'), \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)).$$

$\square$

2.2 Сведение исходной задачи к интегральному уравнению.

Теорема 1 означает, что резольвента полого волновода является регулярной аналитической функцией на римановой поверхности $\mathfrak{f}$ с точками ветвления α_n^2. Весьма замечательно, что ту же риманову поверхность можно взять и для резольвенты исходной задачи (2.1).

В самом деле, пусть $v \in L^2(\Omega')$ удовлетворяет задаче

$$v - \mathfrak{A}(\lambda)v = f, \quad \text{где} \quad \mathfrak{A}(\lambda) = -\lambda(q-1)R_0(\lambda), \tag{2.5}$$

а $q(x, y)$ та же, что и в задаче (2.1). (Здесь и далее под λ подразумевается точка римановой поверхности $\mathfrak{f}$, поэтому теперь не требуется указывать, что всюду выбрана одна и та же ветвь $R_0(\lambda)$.) Положим

$$u = R_0(\lambda)v,$$

тогда, в силу теоремы 1, u, как решение задачи (2.2), принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и удовлетворяет уравнению

$$([\Delta + \lambda]w, u) = ([\Delta + \lambda]w, R_0(\lambda)v) = (R_0(\lambda)^*[\Delta + \lambda]w, v) =$$

$$= (w, v) = (w, -\lambda[q-1]u + f),$$

т.е. u — обобщенное решение задачи (2.1). К тому же эта функция удовлетворяет главным или побочным условиям излучения в зависимости от выбора значения корней γ_n в $R_0(\lambda)$. Таким образом, для построения решения задачи (2.1), удовлетворяющего парциальным условиям излучения, достаточно разрешить задачу (2.5). Преимущество же задачи (2.5) состоит в следующем.

Теорема 2. *Оператор-функция $\mathfrak{A}(\lambda)$ является компактной и голоморфной на римановой поверхности $\mathfrak{f}$.*

Доказательство. Пусть λ_0 — любая регулярная точка поверхности $\mathfrak{f}$. Из теоремы 1 следует, что $R_0(\lambda)$ является суммой конечного числа интегральных операторов вида

$$\frac{i}{2\gamma_n(\lambda)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{i\gamma_n(\lambda)|x-\xi|}(\psi_n,\ .\ )_{L^2(S)}\psi_n(y)$$

и остатка $R_0^N(\lambda)\in\mathfrak{L}(L^2,\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, регулярного в окрестности λ_0. В силу компактности носителя $q-1$, операторы

$$[q(x,y)-1]^{\frac{1}{2}}\frac{i}{2\gamma_n(\lambda)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{i\gamma_n(\lambda)|x-\xi|}(\psi_n,\ .\ )_{L^2(S)}\psi_n(y),$$

как и

$$[q(x,y)-1]^{\frac{1}{2}}R_0^N(\lambda),$$

принадлежат $\mathfrak{L}(L^2(\Omega'),L^2(\Omega'))$, являются регулярными в окрестности λ_0 и после домножения на компактный оператор $[q(x,y)-1]^{1/2}$ становятся компактными, а следовательно, это верно и для их суммы $\mathfrak{A}(\lambda)$. □

Из этой теоремы и мероморфной теоремы Фредгольма [45] следует, что для задачи (2.5) верна альтернатива: или при данном λ задача

$$v-\mathfrak{A}(\lambda)v=f$$

однозначно разрешима при любой $f\in L^2(\Omega')$, или λ является собственным значением оператора $\mathfrak{A}(\lambda)$, т.е. существует нетривиальное решение $v\in L^2(\Omega')$ уравнения

$$v-\mathfrak{A}(\lambda)v=0.$$

Прежде чем выяснить, как соотносятся эти собственные значения с собственными значениями задачи (2.1), условимся о следующем.

Определение 4. Точка e римановой поверхности $\mathfrak{f}$ называется резонансной точкой волновода, если существует решение $u\in\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ задачи

$$(\Delta w,\ u)_{L^2(\Omega)}+e(w,\ qu)_{L^2(\Omega)}=0\quad\forall w\in C_0^\infty(\Omega),\tag{2.6}$$

удовлетворяющее условиям излучения, соответствующим данному листу $\mathfrak{f}$. Если эта точка принадлежит главному листу или его границе, то ее называют собственным значением волновода, а соответствующую функцию u — собственной функцией; функцию $u_1 \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ называют присоединенной к u, если она является решением задачи

$$(\Delta w,\ u_1)_{L^2(\Omega)} + e(w,\ qu_1)_{L^2(\Omega)} = -(w,\ qu) \quad \forall w \in C_0^\infty(\Omega),$$

удовлетворяющим условиям излучения, соответствующим данному листу $\mathfrak{f}$.

Если же резонансная точка $e \in \mathfrak{f}$ не принадлежит главному листу и его границе, то ее называют комплексным резонансом (комплексной резонансной точкой).

Традиция называть резонансные точки, отличные от собственных значений, комплексными связана со следующей теоремой (ср. [10]).

Теорема 3. *Все собственные значения волновода, лежащие на главном листе, вещественны и положительны, а соответствующие им собственные функции принадлежат* L^2.

Доказательство. В силу условий излучения, все собственные функции волновода, не лежащие на разрезе $e \notin [\alpha_1^2, +\infty)$, принадлежат $L^2(\Omega)$ и поэтому, в силу самосопряженности оператора Δ, все собственные значения волновода вещественны.

Пусть u отвечает собственному значению $\alpha_N^2 < \lambda < \alpha_{N+1}^2$. В силу условий излучения вне $\Omega' = x \in [a, b]$, эта функция имеет вид

$$u = \sum_{n=1}^{N} C_n e^{i\sqrt{\lambda - \alpha_n^2}x} + \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n e^{-\sqrt{\alpha_n^2 - \lambda}x}$$

при $x > b$ и

$$u = \sum_{n=1}^{N} C_n' e^{-i\sqrt{\lambda - \alpha_n^2}x} + \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n' e^{\sqrt{\alpha_n^2 - \lambda}x}$$

при $x < a$. В силу леммы Вейля (см. [44]), обобщенное решение (2.6) принадлежит C^2 всюду в Ω вне разрывов q, и, следовательно, можно вычислить по частям интеграл

$$\int\limits_{\Omega'}(|\nabla u|^2+e|u|^2)d\tau=\int\limits_{\Omega'}u^*(-\Delta u+eu)d\tau+\sum_{n=1}^{N}i\sqrt{\lambda-\alpha_n^2}(|C_n|^2+|C_n'|^2)+$$
$$+\sum_{n=N+1}^{\infty}\sqrt{\alpha_n^2-\lambda}(|C_n'|^2e^{\sqrt{\alpha_n^2-\lambda}b}-|C_n|^2e^{-\sqrt{\alpha_n^2-\lambda}a}).$$

(Интегралы по поверхностям разрыва q пропадают, поскольку функция u, как решение обобщенной задачи (2.6), принадлежит $C^1(\Omega)$.) Взяв мнимую часть, получим

$$\sum_{n=1}^{N}\sqrt{\lambda-\alpha_n^2}(|C_n|^2+|C_n'|^2)=0,$$

откуда $C_n=C_n'=0$ при всех $n=1,\ 2,\ \ldots,\ N$ и, значит, $u\in L^2(\Omega)$. $\square$

Если $q\in C^1(\Omega)$, то, в силу леммы Вейля [44], обобщенное решение (2.6) принадлежит $C^2(\Omega)$ и, следовательно, является классическим. Если же u — классическое решение задачи (2.6), тогда можно положить $v=(\Delta+e)u\equiv -e(q-1)u$. Значит,

$$v+e(q-1)R_0v=(\Delta+e)u+e(q-1)u=0,$$

т.е. v — собственная функция оператора $\mathfrak{A}$. Обратное верно и без предположения о том, что $q\in C^1(\Omega)$.

Теорема 4. *Если $e\in\mathfrak{f}$ — собственное значение оператора $\mathfrak{A}(\lambda)$, а v — соответствующая ему собственная функция, то собственное значение e является резонансной точкой волновода.*

Если e лежит на главном листе $\mathfrak{f}$, то оно является собственным значением волновода и его кратность как собственного значения оператора $\mathfrak{A}(\lambda)$, совпадает с числом линейно-независимых собственных функций волновода. Более того, собственной функции v отвечает собственная функция волновода $u=R_0(e)v$, а функции v_1, присоединенной к собственной функции v оператора $\mathfrak{A}(\lambda)$, отвечает функция

$$u_1=R_0(e)v_1+R_0'(e)v,$$

присоединенная к собственной функции волновода $u = R_0(e)v$. *(Здесь* $R_0'(e)$ *означает* $\frac{dR_0(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=e}$*.)*

Доказательство. Заметим сначала, что если e — собственное значение оператора $\mathfrak{A}$, то существует не только собственная функция $v \in L^2(\Omega')$, удовлетворяющая задаче

$$v - \mathfrak{A}(e)v = 0,$$

но и $u = R_0(e)v$, которая является обобщенным решением задачи (2.6). По определению, это означает, что e является резонансной точкой волновода.

Если e лежит на главном листе, то построенная выше функция u является собственной функцией волновода, отвечающей собственному значению e.

Покажем, что функция

$$u_1 = R_0(e)v_1 + R_0'(e)v$$

является присоединенной к u. Для этого заметим, что при всех $w \in C_0^\infty(\Omega)$, во-первых,

$$\begin{aligned}((\Delta + eq)w,\ R_0v_1) &= ((\Delta + e)w,\ R_0v_1) + (w,\ e(q-1)R_0v_1) = \\ &= (w,\ v_1 + e(q-1)R_0v_1) = (w, \mathfrak{A}'(e)v) = \\ &= -(w, (q-1)R_0v + e(q-1)R_0'v),\end{aligned}$$

а во-вторых, в силу

$$((\Delta + \lambda)w, R_0(\lambda)v) = (w, v),$$

верно соотношение

$$((\Delta + \lambda)w, R_0'v) = -(w, R_0v)$$

и поэтому

$$((\Delta + eq)w,\ R_0'v) = (w,\ e(q-1)R_0'v - R_0v).$$

Складывая эти равенства, получаем

$$((\Delta + eq)w,\ u_1) = -(w, (q-1)R_0v + R_0v) = -(w,\ qu).$$

Значит, u_1 действительно является присоединенной функцией.

Однако из самосопряженности оператора $\Delta + \lambda q$ при вещественных λ и q следует, что у собственных функций нет присоединенных. В самом деле, допустим, что функция u_1 присоединена к собственной функции волновода u, тогда по определению (при $w = u$)

$$(u,\ qu) = -(\Delta u,\ u_1)_{L^2(\Omega)} - e(u,\ qu_1)_{L^2(\Omega)} = 0,$$

т.е. ведет к $u \equiv 0$, что невозможно. Но лежащее на главном листе e неизбежно вещественно, как отмечалось выше. Значит, присоединенной к u функции не существует, а следовательно, не существует и v_1, поэтому кратность собственного значения e оператора $\mathfrak{A}$ равна количеству его линейно независимых собственных функций. Таким образом, между этими функциями и собственными функциями волновода существует взаимно однозначное соответствие, поэтому кратность равна числу его линейно независимых собственных функций. $\square$

Подчеркнем особо, что кратность собственного значения волновода, т.е. количество линейно независимых собственных функций, совпадает с кратностью собственного значения оператора $\mathfrak{A}$. Это весьма важно при рассмотрении зависимости собственных значений волновода от параметров заполнения.

Подводя итог всему сказанному, можно утверждать, что задача (2.1) с главными условиями излучения разрешима при всех $\lambda \notin \alpha_n^2$, отличных от собственных значений волновода. Это утверждение сводит исследование вопроса о существовании решения задачи (2.1) к исследованию свойств соответствующей спектральной задачи.

Глава 3

Ловушечные моды волноводов, заполненных неоднородным веществом.

Эта глава посвящена вопросам существования вложенных ловушечных мод у волноводов с неоднородным заполнением и в первую очередь изучению поведения вложенных в непрерывный спектр собственных значений волновода при малых возмущениях его заполнения. В разделе 3.1 даны основные определения спектральных характеристик волновода. В разделе 3.2 среди заполнений выделено заполнение типа <вставки>, поскольку для заполнения этого типа существует бесконечная последовательность собственных значений (при выполнении некоторых дополнительных условий). В случае заполнения типа <простой вставки> и <колена> собственные значения найдены как корни трансцендентных уравнений. Затем в разделе 3.3 доказана неустойчивость вложенных собственных значений волновода с заполнением типа вставки к малым вещественным возмущениям его заполнения. В разделе 3.4 для плоского волновода с заполнением типа простой вставки возмущение, при котором исчезает одно из вложенных собственных значений, построено явно.

Вопрос о существовании ловушечных мод у локально нерегулярных волноводов является чрезвычайно сложным; при его разрешении следует учитывать, что те собственные значения спектральной задачи для волновода, которые выше первой частоты отсечки, вложены в непрерывный спектр и поэтому к ним нельзя применить ни принцип Рэлея, ни теорию возмущения Реллиха-Като. Поэтому к настоящему моменту фактически исследовано лишь существование изолированных собственных значений, т.е. меньших первой частоты отсечки. В [16] было особо отмечено, что в вопросе о существовании вложенных собственных значений нет продвижения дальше построения примеров, и было предложено выяснить, сохранится ли собственное значение у волноведущей системы, если слегка возмутить ее параметры. Хотя теория возмущений для вложенных собственных значений давно привлекает внимание математиков, она далека от своего завершения и ответ на поставленный вопрос заранее не ясен. Это связано с тем, что, в отличие от изолированных собственных значений, вложенные собственные значения могут становиться комплексными резонансными точками при малых компактных вещественных возмущениях (см. [23]-[26]).

3.1 Спектральные свойства волновода, заполненного неоднородным веществом.

Благодаря сведению исходной задачи к интегральному уравнению, можно исследовать резонансные свойства волновода. При λ, отличных от собственных значений оператора $\mathfrak{A}(\lambda)$ и квадратов частот отсечки α_n^2, существует решение v интегрального уравнения (2.5), а следовательно, и удовлетворяющее физическим условиям излучения решение задачи о возбуждении колебаний в волноводе. Это решения принадлежит L^2 при любой f только при $\lambda < \alpha_1^2$, поэтому непрерывный (или — что в данном случае одно и то же — существенный) спектр волновода начинается с α_1^2.

Согласно теореме 4, собственные значения оператора $\mathfrak{A}(\lambda)$ совпадают с собственными значениями волновода, а те, в свою очередь, в силу теоремы

3, совпадают с собственными значениями задачи

$$\begin{cases} \Delta u + eq(x,y)u = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \\ u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.1}$$

Поэтому явление резонанса имеет место лишь при тех e, которые совпадают с собственными значениями e этой задачи или с квадратами частот отсечки α_n^2 (ср. [9],[10]).

При этом следует различать изолированные и вложенные в непрерывный спектр собственные значения волновода: для первых разработаны такие принципы, как принцип Рэлея и теория возмущений Реллиха-Като, для вторых не создано почти ничего. Для того чтобы придать понятию существенного спектра волновода строгий смысл, используя теорему Рисса, перепишем (3.1) в операторном виде: $u = eAu$, где ограниченный оператор A задан билинейной формой

$$(v, Au)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} uvq(x,y)dxdy. \tag{3.2}$$

Ясно, что именно к оператору A применим принцип Рэлея, а возмущению q отвечает компактное возмущение A, к которому применима теория Реллиха-Като. Будем придерживаться следующей терминологии.

Определение 5. Существенный спектр оператора

$$A \in \mathfrak{L}(\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)),$$

заданного билинейной формой (3.2), называется существенным спектром волновода. Собственное значение волновода называется вложенным, если оно лежит в существенном спектре оператора A.

Замечание 3.1.1. В теории локально нерегулярных полых волноводов со времен работы Джонса [13] принято несколько иное определение, а именно: существенным спектром волновода называют существенный спектр неограниченного оператора $-\Delta$ в $L^2(\Omega)$. К сожалению, если рассматривать и задачу (3.1) в $L^2(\Omega)$, то потребуется рассматривать спектр пучка $\Delta + \lambda q$, что весьма неудобно. В довершении следует отметить, что в случае $q \equiv 1$ существенный спектр волновода и по данному выше определению, и по определению Джонса заполняет весь луч $[\alpha_1^2, +\infty)$.

Так как существенный спектр полого волновода, т.е. оператора B, заданного билинейной формой

$$(v, Bu)_{\overset{\mathrm{O}}{W_2^1(\Omega)}} = \int\limits_{\Omega} uv\, dxdy,$$

есть

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(B) = [\alpha_1^2, +\infty)$$

и разность $V = A - B$, заданная билинейной формой

$$(v, Vu)_{\overset{\mathrm{O}}{W_2^1(\Omega)}} = \int\limits_{\Omega} uv\, (q(x,y) - 1) dxdy$$

компактна, поскольку $\tilde{q} = q - 1$ имеет компактный носитель, то, по теореме Вейля [19] (см. также [18]),

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \sigma_{\mathrm{ess}}(B) = [\alpha_1^2, +\infty).$$

Таким образом, существенный спектр волновода — это всегда $[\alpha_1^2, +\infty)$, а собственное значение волновода погружено в существенный спектр, если оно больше α_1^2. Поэтому существенный и непрерывный спектр волновода обычно не различают.

Обратимся теперь к вопросу о существовании собственных значений волновода, поскольку оно вовсе не очевидно; например, полый волновод ими не обладает. В [11] было показано, что, когда $q(x, y) \geq 1$, существует хотя бы одно изолированное собственное значение. Однако пока еще не было доказано, что существуют вложенные собственные значения, т.е. большие α_1^2, на что особо обращено внимание в [9]. Поэтому обратимся к случаю, когда вложенные собственные значения у волновода заведомо существуют.

3.2 Заполнение типа вставки.

Весьма распространенным на практике является случай, когда в полый волновод Ω постоянного сечения, заполненный однородным веществом с $q = 1$, перпендикулярно к оси Ox вставлена одна или несколько пластин с различными $q \neq 1$, то есть $q(x)$ является кусочно-постоянной функцией x. В этом случае и даже более общем случае, когда $q(x, y)$ — кусочно-непрерывна и зависит только от x, удается доказать существование бесконечной последовательности собственных значений задачи (2.1), если $q(x) \geq 1$ и $q(x) \not\equiv 1$. Рассмотрим сначала общий случай кусочно-непрерывного заполнения волновода $q(x, y) \equiv q(x)$, которое мы условимся называть далее заполнением типа <вставки>, а затем исследуем два частных случая: случай заполнения типа <простой вставки> (когда внутрь волновода вставлена одна пластина с постоянным $q \neq 1$) и случай заполнения типа <колена> (когда внутрь волновода вставлены две пластины с постоянными и различными $q \neq 1$).

Будем искать классическое решение задачи (3.1), т.е. дважды непрерывно дифференцируемое вне разрывов функции $q(x)$ решение задачи

$$\begin{cases} \Delta u + eq(x)u = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad e = \omega^2, \\ u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega), \end{cases} \tag{3.3}$$

удовлетворяющее вдоль разрывов условиям сопряжения

$$[u] = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0.$$

В силу полноты системы функций $\{\psi_n(y)\}$, решение (3.3) всегда можно представить в виде

$$u(x, y;\, e) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x;\, e)\psi_n(y),$$

причем $u_n(x; e) \in L^2(\mathbb{R}^1) \cap C^1(\mathbb{R}^1)$. Тогда из (3.3) получим

$$u_n'' = \left(\alpha_n^2 - eq\right) u_n. \tag{3.4}$$

С другой стороны, функция

$$u_n(x, y;\, e) = u_n(x;\, e)\psi_n(y),$$

где $u_n(x)$ удовлетворяет уравнению (3.4) и принадлежит $L^2(\mathbb{R}^1) \cap C^1(\mathbb{R}^1)$, уже есть решение задачи (3.3). Поэтому все собственные функции задачи (3.3) исчерпываются следующим набором функций:

$$u_n(x, y;\, e) = u_n(x;\, e)\,\psi_n(y), \quad n = 1, 2, \, \ldots,$$

где $u_n(x;\, e)$ удовлетворяют задаче (3.4).

Заметим, что вне неоднородности собственные функции $u_n(x, e)$ имеют вид

$$C_1 \sin(\sqrt{e - \alpha_n^2}x) + C_2 \cos(\sqrt{e - \alpha_n^2}x),$$

где C_1 и C_2 — некоторые константы, и поэтому можно удовлетворить условию принадлежности решения задачи $L^2(\mathbb{R}^1)$, только если $\sqrt{\alpha_n^2 - e} > 0$, следовательно, решения задачи (3.4) существуют только при $e < \alpha_n^2$.

Это обстоятельство особенно важно ввиду того, что непрерывный спектр задачи (3.4) начинается только с α_n^2 . В самом деле, в пространстве $\overset{o}{\mathrm{W}}{}_2^1(\mathbb{R}^1)$ эта задача имеет вид

$$u = eAu = e(B + V)u,$$

где ограниченные операторы A, B и V заданы билинейными формами

$$(v, Au)_{\overset{o}{\mathrm{W}}{}_2^1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} uvq(x)dx, \quad (v, Bu)_{\overset{o}{\mathrm{W}}{}_2^1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} uvdx$$

и

$$(v, Vu)_{\overset{o}{\mathrm{W}}{}_2^1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} uv(q(x) - 1)dx.$$

Так как $\tilde{q} = q - 1$ имеет компактный носитель, то оператор V компактный. Значит, по теореме Вейля [19] (см. также [18]), существенные спектры операторов A и B совпадают. Но существенный спектр задачи

$$u = eBu \quad \text{или} \quad u'' + (e - \alpha_n^2)u = 0$$

имеет вид $\sigma_{\text{ess}} = [\alpha_n^2, \ +\infty)$ (см. [44]), поэтому, как и утверждалось выше, существенный спектр задачи (3.4) начинается с α_n^2.

Теперь ясно, что все собственные значения задачи (3.4) лежат ниже существенного спектра и, следовательно, для их расчета можно применять принцип Рэлея [18]. Поэтому, в частности, если положить $\max q(x) = Q$, то для первого собственного значения получим оценку

$$e_n^{(1)} = \inf \frac{||u'||_{L^2}^2 + \alpha_n^2 ||u||_{L^2}^2}{(qu, u)_{L^2}} \geq \frac{\alpha_n^2}{Q}.$$

Таким образом, все собственные значения задачи (3.4) лежат на отрезке $(\alpha_n^2/Q, \alpha_n^2)$ и являются изолированными собственными значениями этой задачи, но при достаточно больших n они являются собственными значениями задачи (3.3), погруженными в непрерывный спектр задачи (3.3).

При $q \geq 1$ у задачи (3.4) имеется по крайней мере одно собственное значение. В самом деле, положим $\tilde{e} = e - \alpha_n^2$, тогда имеем

$$-u_n'' - \alpha_n^2 \tilde{q} u_n = \tilde{e} q u_n.$$

Известно (см. [18], теорема XIII.6), что непрерывный спектр оператора $-\frac{d^2}{dx^2} - \alpha_n^2 \tilde{q}$ совпадает с $e \in [0, +\infty)$ или $e \in [\alpha_n^2, +\infty)$, а при $\tilde{e} < 0$, т.е. при $e < \alpha_n^2$, непременно имеется по крайней мере одно собственное значение. Оно может быть определено при помощи принципа Рэлея

$$\tilde{e} = \inf \frac{||u'||_{L^2}^2 + \alpha_n^2 (\tilde{q}u, u)_{L^2}}{||u||_{L^2}^2} < 0.$$

Но если $q \geq 1$, то и

$$\inf \frac{||u'||_{L^2}^2 + \alpha_n^2 (\tilde{q}u, u)_{L^2}}{(qu, u)_{L^2}} \leq \tilde{e} < 0,$$

откуда

$$\inf \frac{||u'||_{L^2}^2 + \alpha_n^2 (qu, u)_{L^2}}{(qu, u)_{L^2}} < \alpha_n^2.$$

Так как существенный спектр задачи (3.4) лежит выше α_n^2, это означает, что у задачи (3.4) существует собственное значение, что и утверждалось выше.

Подытоживая все сказанное, можно утверждать следующее:

Теорема 5. *Все собственные значения волновода с заполнением типа вставки можно найти как собственные значения задач (3.4) при $n = 1, 2, \ldots$. Если $Q \geq q(x) \geq 1$, то при каждом n найдется хотя бы одно собственное значение $e_n^{(1)}$ задачи (3.4), лежащее на интервале $(\alpha_n^2/Q,\ \alpha_n^2)$, и все другие собственные значения этой задачи лежат на том же интервале.*

Замечание 3.2.1. На существование бесконечной последовательности собственных значений у задачи (3.3) было указано в [46]. В [25] для ряда заполнений типа вставки собственные значения были вычислены. Впрочем, уравнение (3.4) можно свести к уравнению Шредингера при помощи преобразования Лиувиля [44], что дает еще один способ исследования его спектральных свойств; на это было указано в неопубликованной пока статье А.А. Арсеньева <Резонансное рассеяние в волноводе с заполнением>.

Эта теорема означает, что у волновода с заполнением типа вставки с $q \geq 1$ имеется бесконечно много собственных значений и, следовательно, большинство из них лежит выше α_1^2, т.е. вложено в непрерывный спектр. Однако вложение это лишь формальное, поскольку они являются изолированными собственными значениями задач (3.4).

Заполнение типа "простой вставки".

Для двух случаев, когда вставлена соответственно одна или две пластины, удается найти трансцендентные уравнения, которым удовлетворяют собственные значения, и исследовать поведение собственных значений как функций параметров вставки. В первом случае будем называть заполнение "простой вставкой", а во втором — "коленом".

Обратимся к простейшему случаю, когда

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^1, \quad y \in [0,\ +\pi]\},$$

и

$$q\,(x) = \begin{cases} q, & x \in (-1, +1) \\ 1 & \end{cases}.$$

В этом случае собственные значения задачи Дирихле на сечении равны $\alpha_n^2 = n^2$, а собственная функция задачи (3.4) имеет вид

$$u_n\,(x) = \begin{cases} C_1\, e^{\sqrt{n^2-e}x}, & x < -1 \\ C_3\,\sin\left[\sqrt{eq-n^2}x\right] + C_4\,\cos\left[\sqrt{eq-n^2}x\right], & -1 < x < 1 \\ C_2\, e^{-\sqrt{n^2-e}x}, & x > 1 \end{cases}$$

Положим

$$\gamma = \sqrt{n^2-e}, \quad \gamma' = \sqrt{eq-n^2},$$

тогда условия сопряжения приводят к системе из четырех однородных линейных уравнений для определения констант $C_1, \ldots C_4$:

$$\begin{cases} C_1 e^{-\gamma} = C_3 \sin(-\gamma') + C_4 \cos(-\gamma'), \\ \gamma C_1 e^{-\gamma} = \gamma'(C_3 \cos(-\gamma') - C_4 \sin(-\gamma')), \\ C_2 e^{-\gamma} = C_3 \sin\gamma' + C_4 \cos\gamma', \\ -\gamma C_2 e^{-\gamma} = \gamma'(C_3 \cos\gamma' - C_4 \sin\gamma') \end{cases} \tag{3.5}$$

или

$$\begin{cases} \gamma(-C_3 \sin\gamma' + C_4 \cos\gamma') = \gamma'(C_3 \cos\gamma' + C_4 \sin\gamma'), \\ \gamma(C_3 \sin\gamma' + C_4 \cos\gamma') = -\gamma'(C_3 \cos\gamma' - C_4 \sin\gamma') \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -C_3(\gamma \sin\gamma' + \gamma' \cos\gamma') + C_4(\gamma \cos\gamma' - \gamma' \sin\gamma') = 0, \\ C_3(\gamma \sin\gamma' + \gamma' \cos\gamma') + C_4(\gamma \cos\gamma' - \gamma' \sin\gamma') = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_3(\gamma \sin\gamma' + \gamma' \cos\gamma') = 0, \\ C_4(\gamma \cos\gamma' - \gamma' \sin\gamma') = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Эти уравнения разрешимы тогда и только тогда, когда e удовлетворяет одному из двух соотношений:

$$\sqrt{n^2-e}\cos\left[\sqrt{eq-n^2}\right] = \sqrt{eq-n^2}\sin\left[\sqrt{eq-n^2}\right] \tag{3.7}$$

или

$$\sqrt{\alpha_n^2-e}\sin\left[\sqrt{eq-\alpha_n^2}\right] = -\sqrt{eq-\alpha_n^2}\cos\left[\sqrt{eq-\alpha_n^2}\right]. \tag{3.8}$$

Если собственное значение e удовлетворяет первому соотношению, то уравнения (3.6) ведут к тому, что $C_3 = 0$, а исходная система тогда дает $C_1 = C_2$, поэтому ему отвечает четная собственная функция. Аналогично, если e удовлетворяет второму соотношению, то ему отвечает нечетная собственная функция.

Эти уравнения позволяют вычислить все собственные значения задачи (3.3), меньшие некоторой заданной константы, при любом заданном значение q. Обозначим собственные частоты (корни из собственных значений) как $\omega_m(q)$, перенумеровав их в порядке возрастания. На рис. 4 отображены все собственные частоты $\omega_m(q)$, меньшие $\omega = 3$, при значениях параметра вставки q, меняющихся от 1 до 10. Из этих графиков видно, что число собственных значений задачи (3.3) между частотами отсечек $(n-1)^2$ и n^2 быстро растет с ростом n или q. Далее, кривые $\omega(q)$ могут пересекаться, а следовательно, у задачи (3.3) могут иметься кратные собственные значения (рис. 5.).

Отметим, наконец, что уравнение (3.7) имеет решение $e_n^{(1)}(q)$ при всех $q > 1$, которое непрерывно зависит от q и для которого

$$\lim_{q=+1} e_n^{(1)}(q) = n^2.$$

Значит, при достаточно малых $q - 1 > 0$ и $n > 1$ это собственное лежит выше границы непрерывного спектра $\alpha_1^2 = 1$. Ему отвечает четная по x собственная функция вида:

$$u_n(x,y) = \sin ny \begin{cases} C_1\, e^{\sqrt{n^2-e}x}, & x < -1 \\ \cos\left[\sqrt{eq-n^2}x\right], & -1 < x < 1 \\ C_2\, e^{-\sqrt{n^2-e}x}, & x > 1 \end{cases},$$

которая, следовательно, всегда имеется у волновода с заполнением типа простой вставки, что вполне согласуется с предыдущей теоремой.

Заполнение типа <колена>.

Обратимся теперь к случаю заполнения типа <колена>:

$$q(x) = \begin{cases} q_1 > 1, & x \in (-a, 0) \\ q_2 < 1, & x \in (0, +b) \\ 1 & \end{cases}.$$

Повторяя проделанные выше выкладки, можно найти трансцендентное уравнение, которому удовлетворяют собственные значения задачи (3.4). При достаточно больших n у этого уравнения всегда появляются вещественные корни. Поэтому, существует бесконечно много собственных значений задачи (3.3), хотя для заполнения этого типа из теоремы 5 непосредственно не следует существование хотя бы одного собственного значения. Следует также отметить, что можно так подобрать константы, чтобы все собственные значения были вложены в непрерывный спектр. Например, при

$$\begin{aligned} q_1 &= 1.35, \qquad & a &= 1, \\ q_2 &= 0.10, \qquad & b &= 4 \end{aligned}$$

собственные значения распределены на интервалах между квадратами частот отсечки следующим образом: на интервале $[0,\ 1]$ нет ни одного собственного значения, на интервалах $[n^2,\ (n+1)^2]$ при $n = 1, \ldots 5$ лежит ровно по одному собственному значению, при большем n число собственных значений на интервалах $[n^2,\ (n+1)^2]$ начинает расти.

В заключении хотелось бы отметить, что все результаты последних двух пунктов прямо переносятся на трехмерный случай, если всюду заменить n^2 на частоты отсечки α_n^2.

3.3 Поведение вложенных собственных значений волновода при малом возмущении.

Хотя к настоящему моменту известны и другие примеры таких волноведущих систем (см. [13],[16],[15],[17]), необходимые условия появления вложенных мод остаются неясными. Поэтому, как отмечалось выше, целесообразно изучить малые возмущения параметров волноведущих систем, обладающих ловушечными модами, и выяснить, сохраняются ли при этом эти моды или уходят в комплексные резонансные точки.

Теорема 5 гарантирует, что при достаточно малых $q_0(x)-1$ уже собственное значение $e_2^{(1)}$ задачи (2.1) с $q(x,y)\equiv q_0(x)$ лежит выше α_1^2. Поэтому волновод обладает собственной функцией вида

$$u_0(x,y)=u_2(x)\psi_2(y),$$

отвечающей собственному значению волновода $e_0 = e_2^{(1)}$, вложенному в непрерывный спектр. Выясним теперь, сохранится ли оно, если мы возмутим это заполнение

$$q(x,y)=q_0(x)+\varepsilon q_1(x,y),$$

где q_1 — вещественная функция, а ε характеризует малость возмущения (ср. [20]).

К сожалению, для вложенных собственных значений не создано столь исчерпывающей теории возмущений как для изолированных, потому разрешение этого вопроса требует некоторых усилий: так, например, для применения теории возмущений, развитой в [23],[24], требуется построить резольвенту невозмущенной задачи, поскольку в этих работах при помощи резольвенты невозмущенной задачи сводят исходную задачу на собственные значения к виду

$$v-\mathfrak{A}(\lambda)v=0, \tag{3.9}$$

где $\mathfrak{A}(\lambda)$ — компактный оператор, а уже затем к этой задаче применяют различные теоремы, связанные с теорией определителей Фредгольма.

Однако при доказательстве существования решения задачи о возбуждении током колебаний в волноводе исходная задача уже была сведена к виду (2.5), весьма схожему с (3.9) . Поэтому вместо того, чтобы строить резольвенту невозмущенной задачи, далее можно воспользоваться этими результатами.

В силу теоремы 4, точка e_0 главного листа римановой поверхности $\mathfrak{f}$ является однократным собственным значением оператора $\mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon) = -\lambda(q_0 - 1 + \varepsilon q_1)R_0(\lambda)$ при $\varepsilon = 0$. В окрестности точки $(\lambda = e_0,\ \varepsilon = 0)$ этот оператор регулярен. Поэтому при достаточно малых ε у него имеется единственное собственное значение

$$e(\varepsilon) = e_0 + e_1\varepsilon + \cdots = \mathfrak{P}(\varepsilon),$$

для которого $\lim\limits_{\varepsilon=0} e(\varepsilon) = e_0$, и ему отвечает собственная функция $v(\varepsilon)$, разложимая в равномерно по норме $L^2(\Omega')$ сходящийся ряд

$$v(\varepsilon) = v_0 + v_1\varepsilon + \cdots = \mathfrak{P}(\varepsilon).$$

Обоснование этого утверждения дано в приложении к статье [21].

Замечание 3.3.1. Здесь и далее, как это принято в вейерштрассовской теории функций, произвольный ряд по целым положительным степеням ε будем обозначать как $\mathfrak{P}(\varepsilon)$ (см. [54]).

Поскольку точка $\lambda = e_0$ лежит на границе двух листов поверхности $\mathfrak{f}$, то лишь ее часть с $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$ принадлежит главному листу. Поэтому собственное значение $e(\varepsilon)$ оператора $\mathfrak{A}$ является собственным значением волновода, если $\operatorname{Im} e(\varepsilon) \geq 0$, в противном случае оно является комплексной резонансной точкой. Так как на главном листе все собственные значения вещественны, то $\operatorname{Im} e(\varepsilon) = 0$. Это равенство, в частности, означает, что e_1 — вещественное число, т.е. что в первом порядке теории возмущений $e(\varepsilon)$ остается вещественным. Несмотря на это, справедлива

Теорема 6. *В окрестности невозмущенного однократного собственного значения волновода e_0 существует единственная резонансная точка $e(\varepsilon)$, однако существуют такие кусочно-непрерывные вещественные возмущения $q_1(x, y)$ исходного заполнения $q_0(x)$, что $e(\varepsilon)$ с ростом ε становится комплексной резонансной точкой.*

Замечание 3.3.2. В простейшем случае, когда заполнение невозмущенного волновода представляло собой заполнение типа <простой вставки>, одно такое возмущение было предъявлено в [22].

Доказательство. Выше было доказано, что в окрестности невозмущенного однократного собственного значения волновода e_0 существует единственная резонансная точка $e(\varepsilon)$. Предположим, вопреки утверждаемому в теореме, что при любом кусочно-непрерывном возмущении $q_1(x,y)$ эта резонансная точка является собственным значением волновода, т.е. $e(\varepsilon)$ вещественная.

В силу теорем 2 и 3, собственному значению $e(\varepsilon)$ соответствует собственная функция

$$u(x,y;\varepsilon) = R_0(e(\varepsilon))v(x,y;\varepsilon) \in L^2(\Omega).$$

Как и в доказательстве теоремы 1, в окрестности точки $\lambda = e_0$ резольвенту $R_0(\lambda)$ можно представить в виде суммы оператора

$$B = \frac{i}{2\gamma_1(\lambda)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{i\gamma_1(\lambda)|x-\xi|}(\psi_1,\ .\ )_{L^2(S)}\psi_1(y)$$

и $R_0^1(\lambda) \in \mathfrak{L}(L^2(\Omega'), \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, регулярного в окрестности $\lambda = e_0$. По теореме Вейерштрасса о суммировании ряда, второй член

$$R_0^1(e(\varepsilon)) = \mathfrak{P}(\varepsilon) \in \mathfrak{L}(L^2(\Omega'), \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)).$$

Относительно первого заметим, что поскольку $u(\varepsilon)$ — собственная функция волновода, отвечающая собственному значению, лежащему на главном листе, то

$$(u,\psi_1)_{L^2(S)} = 0 \quad \forall x \notin \Omega'.$$

Поэтому если $\eta(x)$ есть C_0^∞-ступенька, равная 1 на всем Ω', то

$$\eta(x)B(e(\varepsilon))v(\varepsilon) = B(e(\varepsilon))v(\varepsilon).$$

Но $\eta(x)B(\lambda)$ — интегральный оператор, ограниченный по норме W_2^1 и регулярный в рассматриваемой окрестности $\lambda = e_0$, поэтому и

$\eta(x)B(e(\varepsilon))v(\varepsilon) = \mathfrak{P}(\varepsilon)$. Значит, собственная функция $u(\varepsilon)$ может быть разложена в ряд по степеням ε, сходящийся равномерно по норме W_2^1.

Умножив (2.1) на $\psi_1(y)$ и проинтегрировав по всему сечению S, получим

$$\frac{d^2}{dx^2}\int\limits_S dy u(x,y)\psi_1(y) + e\int\limits_S dy\, q(x,y)u(x,y)\psi_1(y) = \alpha_1^2\int\limits_S dy u(x,y)\psi_1(y).$$

Подставим сюда ряды для $e(\varepsilon)$ и $u(\varepsilon)$, тогда в первом порядке теории возмущений, обозначив

$$-\int\limits_S dy u(x,y)_1\psi_1(y) = w(x),$$

получим

$$\frac{d^2w}{dx^2} + [e_0q_0(x) - \alpha_1^2]w = e_0u_2(x)\int\limits_S dy\, q_1(x,y)\psi_1(y)\psi_2(y).$$

В силу ограниченности носителя возмущенного заполнения $q(x,y)-1$, это уравнение имеет решение, принадлежащее пространству $L^2(\mathbb{R}^1)$, лишь при весьма специальных условиях на $q_1(x,y)$.

С другой стороны, для того чтобы $u(x,y;\varepsilon)$ принадлежала $L^2(\Omega)$, необходимо, чтобы $w(x)$ принадлежала $L^2(\mathbb{R}^1)$, а это, как было показано выше, возможно далеко не при любых возмущениях q_1. $\square$

Доказанную теорему коротко можно сформулировать так: вложенные собственные значения волновода превращаются в общем случае в комплексные резонансные точки. Отметим, что это — специфическое свойство вложенных собственных значений, поскольку изолированные собственные значения при таких возмущения сохраняются в силу теоремы Реллиха-Като. Это свойство довольно необычно, поскольку более привычно, когда собственное значение становится комплексной резонансной точкой лишь при возмущении q_0 комплексной добавкой, т.е. при введении затухания.

К сожалению сделать на основании этой теоремы вывод о существовании или несуществовании вложенных собственных значений при заполнениях, близких к $q_0(x)$, нельзя, поскольку при построенном q_1 исчезает лишь одно вложенное собственное значение, а не все, и на вещественную ось могут выходить комплексные резонансные точки. Оба эти возражения могли бы быть легко отброшены, если бы $\mathfrak{A}$ был конечномерный и его спектр имел бы простой вид. Поэтому можно лишь утверждать, что структуры совокупности вложенных собственных значений при заполнении типа вставки и при заполнении другого вида совсем не похожи и, значит, многочисленные примеры пока мало что проясняют относительно устройства точечного спектра волновода.

3.4 Пример возмущения заполнения волновода, при котором исчезают погруженные в непрерывный спектр собственные значения волновода.

Выше в разделе 3.3 было показано, что вложенные в непрерывный спектр собственные значения неустойчивы к малым возмущениям заполнения волновода. Предъявим теперь конструктивно одно такое возмущение.

В плоском волноводе $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^1, \quad y \in [0,\ +\pi]\}$ задача на собственные значения (3.1) примет вид:

$$\begin{cases} \Delta u + eq(x,y)u = 0 \quad (x,y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.10}$$

Для простоты будем считать, что

$$\mathrm{Supp}[q(x,y) - 1] \subset \Omega' = \{x \in [-1,1], \quad y \in [0,\ +\pi]\}.$$

В данном случае, собственные значения задачи Дирихле α_n^2 на сечении S равны n^2, где $n = 1, 2, \ldots$, а соответствующие им собственные функции $\psi_n = \sin ny$. Поэтому нижняя граница непрерывного спектра задачи (3.10) есть $\alpha_1^2 = 1$.

Возьмем в качестве невозмущенного заполнение типа простой вставки:

$$q_0\,(x) = \begin{cases} q_0, & x \in (-1, +1) \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

В разделе 3.2 показано, что при достаточно малых положительных $q_0 - 1$ существует вложенное собственное значение $e_0 > \alpha_1^2$ задачи (2.1) с $q(x, y) = q_0(x)$, которому отвечает собственная функция, имеющая на отрезке $(-1, +1)$ вид

$$u_0(x, y) = u_2(x) \sin 2y,$$

где $u_2(x) = \cos \gamma' x$, а $\gamma' = \sqrt{\alpha_2^2 - e_0 q_0}$.

В разделе 3.3 показано, что вложенное в непрерывный спектр собственное значение волновода сохраняется не при всех возможных вещественных возмущениях

$$q(x, y) = q_0(x) + \varepsilon q_1(x, y),$$

где q_1 — вещественная функция, ε характеризует малость возмущения, а лишь при тех, при которых задача

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + [e_0 q_0(x) - \alpha_1^2] w = e_0 u_2(x) \int\limits_0^\pi dy\, q_1(x, y) \psi_1(y) \psi_2(y) \tag{3.11}$$

имеет решение из $L^2(\mathbb{R}^1)$.

Предположим, что при данном q_1 такое w существует, и найдем соотношения, которым должно удовлетворять q_1. Заметим, что вне отрезка $(-1, +1)$ функция $w(x)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + [e_0 - \alpha_1^2] w = 0,$$

и, следовательно, имеет вид

$$w = C_1 \sin\,(\sqrt{e_0 - \alpha_1^2} x) + C_2 \cos\,(\sqrt{e_0 - \alpha_1^2} x).$$

Поэтому $w \equiv 0$ при $x \notin [-1, 1]$. Поскольку даже обобщенное решение (3.11) непрерывно дифференцируемо, то для w имеем переопределенную задачу:

$$\begin{cases} \frac{d^2w}{dx^2} + \gamma^2 w = f(x), \\ w|_{x=\pm1} = \frac{dw}{dx}\Big|_{x=\pm1} = 0, \end{cases} \tag{3.12}$$

где $\gamma^2 = e_0 q_0 - \alpha_1^2$ — данное число, а

$$f(x) = e_0 u_2(x) \int\limits_S dy\, q_1(x,y)\psi_1(y)\psi_2(y).$$

Заметим теперь, что задача

$$\begin{cases} \frac{d^2w}{dx^2} + \gamma^2 w = f(x), \\ u|_{x=\pm1} = 0 \end{cases}$$

разрешима однозначно. В самом деле, положим

$$v_1 = \sin\left(\gamma(x-1)\right), \quad v_2 = \sin\left(\gamma(x+1)\right)$$

тогда

$$wW[v_1, v_2] = v_1(x)\int\limits_{-1}^{x} v_2(y)f(y)dy + v_2(x)\int\limits_{x}^{1} v_1(y)f(y)dy,$$

где $W[v_1, v_2] = \mathrm{Const}$ — определитель Вронского. Для того, чтобы w удовлетворяло (3.12), необходимо выполнение еще двух условий:

$$w'|_{x=1} = v_1'(1)\int\limits_{-1}^{1} v_2(y)f(y)dy = 0$$

и

$$w'|_{x=-1} = v_2'(-1)\int\limits_{-1}^{1} v_1(y)f(y)dy = 0.$$

Поскольку $v_1'(1) = \gamma \neq 0$ и $v_2'(-1) = \gamma \neq 0$, функция f, при которой существует решение задачи (3.12) должна удовлетворять условиям:

$$\int\limits_{-1}^{1} \sin\gamma(x \pm 1) f(x)dx = 0 \tag{3.13}$$

Предъявим теперь q_1, не удовлетворяющую этим условиям. Именно, возьмем

$$q_1(x,y) = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)} Q(x)$$

в Ω', где $Q(x)$ — пока неопределенная кусочно-непрерывная функция. В этом случае $q_1(x,y)$ — ограниченная, кусочно-непрерывная функция в области Ω и на ее границе. При такой q_1 функция f имеет вид

$$f = e_0 u_2(x) Q(x).$$

Вспомнив, что $u_2(x) = \cos\gamma' x$, из (3.13) получим

$$\int\limits_{-1}^{1} \sin\gamma(x \pm 1)\cos\gamma' x Q(x) dx = 0$$

Одно их этих равенств не выполняется, например, при

$$Q(x) = \sin\gamma(x \pm 1)\cos\gamma' x.$$

Итак, возмущение вида

$$q_1(x,y) = \frac{\psi_2}{\psi_1} \sin\gamma(x \pm 1)\cos\gamma' x$$

приводит к исчезновению рассматриваемого собственного значения.

Доказанное позволяет проиллюстрировать весьма интересное свойство вложенных собственных значений задачи (3.10) — их неустойчивость к малым вещественным возмущениям заполнения.

Приложение А

Пример спектральной задачи, собственные значения которой исчезают при малых возмущениях параметров этой задачи.

В этом приложении приведен пример задачи, близкой к спектральной задаче теории волноводов со вставкой, вложенные собственные значения которой исчезают при малом изменении коэффициентов, характеризующих заполнения.

Рассмотрим спектральную задачу

$$\begin{cases} u'' + (eq(x) - \alpha)u = ep(x)v, \\ v'' + (eq(x) - \beta)v = ep(x)u. \end{cases} \tag{A.1}$$

Здесь $\alpha < \beta$ — положительные константы, а $q(x) - 1$ и $p(x)$ — аналитические функции, регулярные в любой конечной точке вещественной оси и убывающие быстрее любой экспоненты.

Используя аналогию этой задачи и спектральной задачи для нерегулярного волновода, нетрудно видеть, что непрерывный спектр этой задачи начинается с α. Предположим теперь, что у задачи (A.1) существует вложенное собственное значение $e \in (\alpha,\ \beta)$ и ему отвечает собственная функция $(u_1(x),\ v_1(x)) \in L^2(\mathbb{R}^1)$. Система (A.1) имеет еще три линейно независимых решения $(u_n(x),\ v_n(x))\quad(n=2,3,4)$. Переписав (A.1) в виде системы уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}u = u^{(1)}, \\ \frac{d}{dx}v = v^{(1)}, \\ \frac{d}{dx}u^{(1)} = -(eq(x)-\alpha)u + ep(x)v, \\ \frac{d}{dx}v^{(1)} = -(eq(x)-\beta)v + ep(x)u \end{cases} \tag{A.2}$$

и применив к ней теорему Линделефа [48], видим, что все четыре решения задачи (A.1) растут не быстрее экспоненты. Это позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 7. *Если решение* (u_1, v_1) *задачи* (A.1) *принадлежит* $L^2(\mathbb{R}^1)$ *и* $u_1(x)\not\equiv 0$*, то у задачи* (A.1) *имеется другое решение, которое (само или его первая производная) стремится к бесконечности.*

Доказательство. Пусть $(u_n, v_n)\quad(n=2,\ldots,4)$ — оставшиеся три линейно независимых решения (A.1) и пусть $u_n(x_0)\neq 0$. Составим матрицу Вронского

$$\mathfrak{W} = \begin{pmatrix} u_1,\ u_1',\ v_1,\ v_1' \\ u_2,\ u_2',\ v_2,\ v_2' \\ u_3,\ u_3',\ v_3,\ v_3' \\ u_4,\ u_4',\ v_4,\ v_4' \end{pmatrix}$$

и заметим, что, поскольку след матрицы коэффициентов системы линейных уравнений (A.2) равен нулю, определитель $\mathfrak{W}$ не зависит от x (см. [47]).

Из уравнений

$$\begin{cases} v_n'' + (eq(x)-\alpha)v_n = ep(x)u_n, \\ v_m'' + (eq(x)-\alpha)v_m = ep(x)u_m \end{cases}$$

следует, что

$$v_n v_m'' - v_m v_n'' = ep(x)(u_m v_n - u_n v_m)$$

или

$$\frac{d}{dx}W[v_n,\ v_m] = ep(x)\begin{vmatrix} v_n(x),\ v_m(x) \\ u_n(x),\ u_m(x) \end{vmatrix}.$$

Поскольку $u_m,\ u_n,\ v_m,\ v_m$ растут не быстрее экспоненты, то $p(x)$ убывает быстрее и значит $W[v_n,\ v_m](x)$ все время остаются меньше некоторой константы C.

Аналогично

$$\frac{d}{dx}W[u_n,\ u_m] = -ep(x)\begin{vmatrix} v_n(x),\ v_m(x) \\ u_n(x),\ u_m(x) \end{vmatrix};$$

поэтому предел $W[u_n,\ u_m] \longrightarrow W^{\pm}$, когда $x \longrightarrow \pm\infty$, существует и равен

$$W[u_n,\ u_m](x) = W^{\pm} - e\int\limits_{\pm\infty}^{x} p(x)\begin{vmatrix} v_n(x),\ v_m(x) \\ u_n(x),\ u_m(x) \end{vmatrix}dx.$$

Предположим, что все определители Вронского $W[u_1,\ u_m]$ стремятся к нулю, когда $x \longrightarrow \pm\infty$. Поскольку $p(x)$ убывает быстрее любой экспоненты, а $u_n,\ u_m$ растут не быстрее некоторой экспоненты, то

$$|ep(x)\begin{vmatrix} v_n(x),\ v_m(x) \\ u_n(x),\ u_m(x) \end{vmatrix}| \leq P_0 e^{-\gamma x}, \quad x > x_0,$$

при любом γ, если взять x_0 достаточно большим. Тогда при $x > x_0$

$$|W[u_1,\ u_m](x)| \leq \int\limits_{x}^{\infty} P_0 e^{-\gamma x}dx = \frac{P_0}{\gamma}e^{-\gamma x}$$

т.е. $W[u_1,\ u_m]$ убывает быстрее любой экспоненты. Но поскольку, например,

$$W[u_2, u_3] = \frac{1}{u_1}(u_2 W[u_1, u_3] - u_3 W[u_1, u_2]),$$

все $W[u_n,\ u_m]$ стремятся к нулю и в силу ограниченности $W[v_n,\ v_m](x)$ определитель $|\mathfrak{W}|$ тоже стремится к нулю, что невозможно в виду того, что он вообще не зависит от x. Значит, предположение о том, что все $W[u_1,\ u_m] \longrightarrow 0$, когда $x \longrightarrow \pm\infty$, неверно, и поэтому u_m должна неограниченно возрастать, чтобы скомпенсировать убывание u_1. □

Однако, с другой стороны, оценив любое решение $(u(x), v(x))$ системы (A.1) по методу Фубини [49], можно показать, что все u_m ограничены.

Теорема 8. *Все решения задачи* (A.1) *и их первые производные ограничены на всей вещественной оси.*

Доказательство. Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — решения уравнения

$$u'' + (eq(x) - \alpha)u = 0$$

с вронскианом $W = 1$, а $v_1(x)$ и $v_2(x)$ — решения уравнения

$$v'' + (eq(x) - \beta)v = 0$$

с вронскианом $W = 1$. Будем искать решение (A.1) методом вариации постоянных. Положим

$$\begin{cases} u = a_1(x)u_1(x) + a_2(x)u_2(x), \\ v = b_1(x)v_1(x) + b_2(x)v_2(x), \end{cases}$$

тогда имеем:

$$\begin{cases} a_1'u_1 + a_2'u_2 = 0, \\ a_1'u_1' + a_2'u_2' = epv, \\ b_1'v_1 + b_2'v_2 = 0, \\ b_1'v_1' + b_2'v_2' = epu. \end{cases}$$

Отсюда в силу того, что $W = 1$, следует, что

$$\begin{cases} a_1' = -u_2epv, \\ a_2' = u_1epv, \\ b_1' = -v_2epu, \\ b_2' = v_1epu \end{cases}$$

и далее

$$\begin{cases} a_1(x) = \gamma_1 - e\int\limits_0^x d\xi u_2(\xi)p(\xi)v(\xi), \\ a_2(x) = \gamma_2 + e\int\limits_0^x d\xi u_1(\xi)p(\xi)v(\xi), \\ b_1(x) = \gamma_3 - e\int\limits_0^x d\xi v_2(\xi)p(\xi)v(\xi), \\ b_2(x) = \gamma_4 + e\int\limits_0^x d\xi v_1(\xi)p(\xi)v(\xi), \end{cases}$$

где $\gamma_1, \ldots, \gamma_4$ — постоянные интегрирования. Значит функции u и v выражаются одна через другую:

$$\begin{cases} u(x) - e\int\limits_0^x d\xi \mathfrak{N}(x,\xi)p(\xi)v(\xi) = \gamma_1 u_1(x) + \gamma_2 u_2(x), \\ v(x) - e\int\limits_0^x d\xi \mathfrak{M}(x,\xi)p(\xi)u(\xi) = \gamma_3 v_1(x) + \gamma_4 v_2(x), \end{cases}$$

где

$$\mathfrak{N}(x,\xi) = \begin{vmatrix} u_1(\xi), & u_2(\xi) \\ u_1(x), & u_2(x) \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \mathfrak{M}(x,\xi) = \begin{vmatrix} v_1(\xi), & v_2(\xi) \\ v_1(x), & v_2(x) \end{vmatrix}.$$

Отсюда для u получается уравнение:

$$u(x) - e^2 \int\limits_0^x d\xi \int_0^\xi d\eta \mathfrak{L}(x,\xi)\mathfrak{M}(\xi,\eta)p(\eta)p(\xi)u(\eta) =$$
$$= \gamma_1 u_1(x) + \gamma_2 u_2(x) + e\int\limits_0^x d\xi \mathfrak{N}(x,\xi)p(\xi)\left[\gamma_3 v_1(\xi) + \gamma_4 v_2(\xi)\right].$$

Это уравнение можно записать как уравнение Вольтерра

$$u(x) - e^2 \int\limits_0^x d\eta \mathfrak{k}(x,\eta)u(\eta) = F(x) \tag{A.3}$$

с ядром

$$\mathfrak{k}(x,\eta) = \int\limits_\eta^x d\xi \mathfrak{N}(x,\xi)p(\xi)\mathfrak{M}(\xi,\eta)p(\eta)$$

и правой частью

$$F(x) = \gamma_1 u_1(x) + \gamma_2 u_2(x) + e\int\limits_0^x d\xi \mathfrak{N}(x,\xi)p(\xi)\left[\gamma_3 v_1(\xi) + \gamma_4 v_2(\xi)\right].$$

Если $e \in (\alpha, \beta)$, то функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ равномерно при всех x ограничены некоторой константой C, поэтому и $|\mathfrak{N}(x,\xi)| < C^2$ при всех x и ξ. Хотя функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ могут возрастать неограниченно, но в силу того, что $p(x)$ убывает быстрее любой экспоненты, найдется такая функция $P(x)$, убывающая столь же быстро, что $|p(\xi)\mathfrak{M}(\xi,\eta)p(\eta)| < P(\xi)P(\eta)$. Поэтому ядро уравнения Вольтерра удовлетворяет неравенству

$$|\mathfrak{k}(x,\eta)| < P(\eta)C^2 \int\limits_0^x d\xi P(\xi) \le C'' P(\eta), \quad \text{где} \quad C'' = C^2 \int\limits_0^\infty d\xi P(\xi)$$

при всех x и η. В силу леммы об интегральных уравнениях Вольтерра (см. [49]) решение уравнения (A.3) удовлетворяет неравенству:

$$|u(x) - F(x)| \leq e^2 C'' J_1(x) \exp e^2 C'' J_2(x), \tag{A.4}$$

где интегралы

$$J_1(x) = \int\limits_0^x P(y) dy \quad \text{и} \quad J_2(x) = \int\limits_0^x P(y)|F(y)| dy$$

ограничены равномерно некоторой константой C'''.

Остается заметить, что функция $F(x)$ ограничена на вещественной оси. В самом деле, с учетом выражения для $\mathfrak{N}$ имеем:

$$\begin{aligned} F &= \gamma_1 u_1(x) + \gamma_2 u_2(x) + e \int\limits_0^x d\xi \mathfrak{N}(x,\xi) p(\xi) \left[\gamma_3 v_1(\xi) + \gamma_4 v_2(\xi)\right] = \\ &= \left(\gamma_1 - e \int\limits_0^x d\xi u_2(\xi) p(\xi) \left[\gamma_3 v_1(\xi) + \gamma_4 v_2(\xi)\right]\right) u_1(x) + \\ &+ \left(\gamma_2 + e \int\limits_0^x d\xi u_1(\xi) p(\xi) \left[\gamma_3 v_1(\xi) + \gamma_4 v_2(\xi)\right]\right) u_2(x). \end{aligned}$$

В силу ограниченности интегралов эта функция — ограниченная на всей вещественной оси. Таким образом, в силу оценки (A.4) и функция $u(x)$ ограничена на всей вещественной оси.

Дифференцируя (A.3), получим уравнение Вольтерра для $u'(x)$ и тем же приемом докажем ограниченность $u'(x)$ на всей вещественной оси. В самом деле, из (A.3) следует уравнение Вольтерра для производной

$$u'(x) - e^2 \int\limits_0^x d\eta \mathfrak{k}_x(x,\eta) u(\eta) = F'(x) \tag{A.5}$$

с ядром

$$\mathfrak{k}(x,\eta)_x = \int_\eta^x d\xi \mathfrak{N}(x,\xi)_x p(\xi) \mathfrak{M}(\xi,\eta) p(\eta)$$

и правой частью

$$F'(x) = \gamma_1 u_1(x) + \gamma_2 u_2(x) + e \int\limits_0^x d\xi \mathfrak{N}(x,\xi)_x p(\xi) \left[\gamma_3 v_1(\xi) + \gamma_4 v_2(\xi)\right]$$

Его можно рассмотреть как предыдущее, поскольку u_1' и u_2' тоже ограничены. Значит, не только $u(x)$, но и его производная ограничены на всей вещественной оси. $\square$

Сравнивая теоремы 7 и 8, видим, что при $p(x) \not\equiv 0$ все принадлежащие L^2 собственные функции $(u(x), v(x))$ задачи (A.1), соответствующие собственному значению $e \in (\alpha, \beta)$, удовлетворяют равенству $u(x) \equiv 0$, которое в силу (A.1) приводит к тождеству $p(x)v(x) \equiv 0$. Поскольку функция $p(x)$ — аналитическая, это тождество означает, что и $v(x) \equiv 0$. Иными словами, если $p(x) \not\equiv 0$, то у задачи (A.1) нет вложенного собственного значения. Заметим теперь, что при $p(x) \equiv 0$ задача (A.1) может иметь вложенное собственное значение вида $(0,\ v(x))$, если $q(x) - 1 > 0$ и достаточно мало (см. раздел 3.2). Значит, малейшее возмущение $p(x)$ приведет к исчезновению этого собственного значения. Таким образом, задача (A.1) действительно является примером такой задачи, у которой пропадают вложенные собственные значения при малом возмущении коэффициентов.

Приложение B

Теория возмущений для собственных значений компактной оператор-функции.

В этом приложении дана теория возмущений для компактных оператор-функций, встречающихся, в частности, в математической теории волноведущих систем.

Хотя систематическое исследование аналитических свойств компактной оператор-функции $\mathfrak{A}(\lambda)$, мероморфной в некоторой области B, и его резольвенты было предпринято в [45], элементы теории возмущений для оператор-функций развивались лишь в той мере, в какой это требовали приложения. Так развитие теории возмущений для задач квантовой механики, заставило изучить зависимость полюсов резольвенты $\mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon)$ от параметра возмущения ε для случая, когда $\mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon) = V(\varepsilon)R_0(\lambda)$ и $R_0(\lambda)$ имеет в области B полюс первого порядка конечного ранга (см. [23],[24]). Затем задачи теории дифракции привели к необходимости изучения зависимости полюсов резольвенты регулярной в некоторой области B функции $\mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon)$ от параметра ε; в [10],[27] было показано, что в окрестности полюса резольвенты $\mathfrak{A}(\lambda, 0)$ лежит полюс резольвенты $\mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon)$, но при этом оставалось неясным, зависит ли этот полюс от ε аналитически и сохраняется ли его кратность. В приложении к работе [21] нам удалось восполнить этот пробел, что позволило строго доказать неустойчивость вложенных собственных значений. Однако, на самом деле, можно построить целую теорию возмущений для компактных оператор-функций, и рассматривать теорию возмущений как одно из ее приложений.

Заметим сначала, что при изучении зависимости полюсов от ε, обычно, обычно строят модифицированный определитель Фредгольма $\delta(\lambda, \varepsilon)$ для оператора $\mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon)$ и затем, на основании подготовительной теоремы Вейерштрасса, доказывают, что решение $\lambda(\varepsilon)$ уравнения $\delta(\lambda, \varepsilon) = 0$ может быть разложено в ряд по дробным степеням ε (см. [23]). Поскольку подавляющее большинство теорем теории аналитических функций, как и их доказательства переносится и на теорию оператор-функций $\mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon)$ (см. [43]), естественно ожидать, что тоже верно и для подготовительной теоремы Вейерштрасса. Для того чтобы понять, как следует изменить ее формулировку, разберем сначала случай конечномерного гильбертова пространства, то есть случай, когда $\mathfrak{A}$ является матрицей.

Итак, рассмотрим в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ оператор $\mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon)$, голоморфный в области B λ-плоскости и в области $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. Его резольвента $\mathfrak{R}(\lambda, \varepsilon)$, заданная соотношением

$$[E - \mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon)][E + \mathfrak{R}(\lambda, \varepsilon)] = E,$$

согласно [45] является компактным оператором, мероморфным в указываемых областях, причем ее полюса являются собственными значениями оператора $\mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon)$. Предположим, что при $\varepsilon = 0$ в области B имелось только одно собственное значение e_0 кратности N. Обозначим далее лежащие в B полюса при заданном ε как $\{e^{(n)}(\varepsilon)\}$ и попытаемся изучить их поведение как функции от ε.

B.1 Теория возмущений для собственных значений оператора $\mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon)$ в конечномерном пространстве.

Если гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ является конечномерным, то $\{e^{(n)}(\varepsilon)\}$ являются нулями определителя

$$\mathfrak{a}(\lambda, \varepsilon) = |E - \mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon)|,$$

очевидно голоморфного в рассматриваемых областях. Следуя доказательству А. Картана подготовительной теоремы Вейерштрасса (см. [50], [51]), заметим сначала, что в силу теоремы о логарифмическом вычете интеграл

$$s_0(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C d\lambda \, \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial \lambda}(\lambda, \varepsilon) \mathfrak{a}^{-1}(\lambda, \varepsilon)$$

по контуру C, проведенному вблизи границы B, всегда равен натуральному числу $N(\varepsilon)$, которое означает число нулей $\mathfrak{a}(\lambda, \varepsilon)$, лежащих внутри C. (Каждый нуль считается столько раз, какова его кратность.)

С другой стороны $s_0(\varepsilon)$ — аналитическая функция ε, регулярная в нуле, поскольку при любом $\lambda \in C$ найдется такое ε_0', что для всех $\varepsilon \leq \varepsilon_0'$ оператор $\mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon)$ не имеет собственных значений и, следовательно,

$$|\mathfrak{a}(\lambda, \varepsilon)| \geq \delta > 0.$$

Но такая функция может принимать только целые значения тогда и только тогда, когда она тождественно равна некоторой константе $N(0) = N$. Поэтому в области B при всех достаточно малых ε имеется ровно N собственных значений.

Для того, чтобы выразить $\{e_n(\varepsilon)\}$ как функции ε, образуем аналитические функции

$$s_n(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \lambda^n d\, \lambda \, \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial \lambda}(\lambda, \varepsilon) \mathfrak{a}^{-1}(\lambda, \varepsilon) \quad n = 1, \ldots N.$$

При фиксированном ε функция

$$\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial \lambda}(\lambda, \varepsilon) \mathfrak{a}^{-1}(\lambda, \varepsilon)$$

внутри C имеет простые полюса в нулях определителя $\mathfrak{a}$ (мы их обозначили как $e^{(m)}(\varepsilon)$) с вычетами, равными кратности этих нулей, поэтому

$$s_n(\varepsilon) = \sum_{m=1}^{N} \left[e^{(m)}(\varepsilon)\right]^n.$$

Поэтому по формулам Ньютона (взятых, например, в форме, предложенной в [52], p. 67) можно образовать уравнение

$$e^N + a_1(\varepsilon)e^{N-1} + \cdots + a_N(\varepsilon) = 0,$$

коэффициенты которого являются рациональными функциями от s_n, а корни — нулями $\mathfrak{a}$, лежащими внутри C.

Остается заметить, что функции $s_n(\varepsilon)$ можно рассчитать, не вычисляя определитель, следующим образом. Поскольку

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \lambda} = [E + \mathfrak{R}]\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \lambda}[E + \mathfrak{R}],$$

в силу формулы Якоби (см. [47]) определитель

$$\frac{\partial |E + \mathfrak{R}|}{\partial \lambda} = \mathrm{Sp}\ \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \lambda}[E + \mathfrak{R}]\right)|E + \mathfrak{R}|$$

и поэтому, в силу $\mathfrak{a} = |E + \mathfrak{R}|^{-1}$, верно

$$\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial \lambda} = -\mathrm{Sp}\ \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \lambda}[E + \mathfrak{R}]\right)\mathfrak{a},$$

откуда

$$s_n(\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi i}\int_C \lambda^n d\lambda\ \mathrm{Sp}\ \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \lambda}[E + \mathfrak{R}]\right) \quad n = 1, \ldots N. \tag{B.1}$$

Таким образом, для конечномерного гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть в конечномерном гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$ *компактный оператор* $\mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon)$, *голоморфный в области* B λ-*плоскости и в области* $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, *имеет при* $\varepsilon = 0$ *в области* B *только* *одно собственное значение e_0 кратности N. Тогда все его собственные значения $\{e^{(n)}(\varepsilon)\}$, лежащие в области B, являются корнями алгебраического уравнения*

$$e^N + a_1(\varepsilon)e^{N-1} + \cdots + a_N(\varepsilon) = 0,$$

где

$$a_1 = -s_1, \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-4} & \dots & s_1 \end{vmatrix},$$

а s_n определяются по формуле (B.1)*, причем функции $s_n(\varepsilon) = \mathfrak{P}(\varepsilon)$.*

Замечание B.1.1. Здесь и далее, как это принято в вейерштрассовской теории функций, $\mathfrak{P}(\varepsilon)$ означает произвольный ряд по целым неотрицательным степеням ε [53].

B.2 Теория возмущений для собственных значений оператора $\mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon)$ в бесконечномерном пространстве.

Покажем теперь, что и в случае бесконечномерного гильбертова пространства, когда определителя $\mathfrak{a}$ вообще не существует, функции $s_n(\varepsilon)$ существуют и являются аналитическими, а теорема 9 остается в силе. Для этого мы рассмотрим проекторы

$$P_n(\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C d\,\lambda\, \lambda^n \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \lambda}[E + \mathfrak{R}] \tag{B.2}$$

и, используя лемму Фань Цуй, докажем, что их следы зависят от ε аналитически.

Заметим для начала, что основные понятия теории аналитических функций прямо переносятся на случай оператор-функций, если понимать всюду модуль как норму. Рассмотрим оператор-функцию $\mathfrak{F}(\lambda, \varepsilon)$, равномерно ограниченную константой M и регулярную в области $\varepsilon \leq r$, $\lambda \in B$. Пусть контур C лежит целиком в B. Ясно, что можно определить функцию

$$\mathfrak{f}(\varepsilon) = \int\limits_C \mathfrak{F}(\lambda, \varepsilon) d\lambda.$$

Покажем, что эта функция регулярна в нуле. В силу теоремы Коши

$$\mathfrak{F}(\lambda, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}_n(\lambda) \varepsilon^n,$$

где

$$\mathfrak{F}_n(\lambda) = \int\limits_{|\varepsilon|=r} \frac{\mathfrak{F}(\lambda, \varepsilon)}{\varepsilon^{n+1}} d\varepsilon.$$

Поэтому

$$||\mathfrak{F}_n(\lambda)|| \leq \frac{M}{r^n},$$

а значит ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_C \mathfrak{F}_n(\lambda) d\lambda \, \varepsilon^n$$

мажоруется геометрическим рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C| \frac{M}{r^n} |\varepsilon|^n = |C| M \frac{1}{1 - |\varepsilon|/r},$$

где $|C|$ — длина контура C, и является равномерно и безусловно сходящимся при $|\varepsilon| < r$. Наконец, справедлива оценка

$$||\mathfrak{f}(\varepsilon) - \sum_{n=0}^{N} \int\limits_C \mathfrak{F}_n(\lambda) \varepsilon^n d\lambda|| = || \int\limits_C d\lambda \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathfrak{F}_n(\lambda) \varepsilon^n || \leq |C| M (\frac{|\varepsilon|}{r})^N \frac{1}{1 - |\varepsilon|/r},$$

поэтому ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_C \mathfrak{F}_n(\lambda) d\lambda \, \varepsilon^n$$

стремиться к $\mathfrak{f}(\varepsilon)$ равномерно и безусловно при $|\varepsilon| < r$, то есть эта функция действительно является регулярной в нуле.

Рассмотрим теперь оператор-функцию

$$P(\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C d\,\lambda\ \left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\lambda}[E+\mathfrak{R}]\right) \tag{B.3}$$

и изучим некоторые ее свойства.

Теорема 10. *Оператор $P(\varepsilon)$ является ортопроектором, зависящим аналитически от ε в окрестности нуля. Его след $s_0(\varepsilon)$ есть число собственных значений оператора $\mathfrak{A}(\lambda,\varepsilon)$, лежащих внутри C, которое не зависит от ε.*

Доказательство. Покажем сначала, что $P(\varepsilon)$ зависит аналитически от ε в окрестности нуля. Заметим, что при $\lambda \in C$ и $|\varepsilon| \le \varepsilon_0/2$ функции

$$\mathfrak{A}(\lambda,\varepsilon) \quad \text{и} \quad \mathfrak{R}(\lambda,0)$$

равномерно ограничены. Из соотношения Гильберта

$$(E+\mathfrak{R}(\lambda,\varepsilon))(E-(\mathfrak{A}(\lambda,\varepsilon)-\mathfrak{A}(\lambda,0))(E+\mathfrak{R}(\lambda,0))) = (E+\mathfrak{R}(\lambda,0))$$

видно, что и

$$||E+\mathfrak{R}(\lambda,\varepsilon)||$$

меньше чем

$$||E+\mathfrak{R}(\lambda,0)||||(E-(\mathfrak{A}(\lambda,\varepsilon)-\mathfrak{A}(\lambda,0))(E+\mathfrak{R}(\lambda,0)))^{-1}||.$$

Но можно взять столь малое r, что при всех $\varepsilon < r$

$$||(\mathfrak{A}(\lambda,\varepsilon)-\mathfrak{A}(\lambda,0))(E+\mathfrak{R}(\lambda,0))|| \le \frac{1}{2},$$

тогда

$$||(E-(\mathfrak{A}(\lambda,\varepsilon)-\mathfrak{A}(\lambda,0))(E+\mathfrak{R}(\lambda,0)))^{-1}|| \le \frac{1}{1-1/2} = 2.$$

Значит, подынтегральное выражение в (B.3) равномерно ограничено и регулярно при $\varepsilon \le r$, поэтому как и утверждалось, $P(\varepsilon)$ регулярна в нуле.

Замети теперь, что P не изменится, если в качестве круга C взять другой C', отличающийся от первого достаточно мало и вложенный в него. Тогда

$$P^2(\varepsilon) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_C d\,\lambda \int\limits_{C'} d\,\mu\, \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \lambda}[E+\mathfrak{R}(\lambda,\varepsilon)]\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \mu}[E+\mathfrak{R}(\mu,\varepsilon)].$$

Но $\mathfrak{R}(\lambda,\varepsilon) - \mathfrak{R}(\mu,\varepsilon)$ равно

$$[E+\mathfrak{R}(\lambda,\varepsilon)][(E-\mathfrak{A}(\lambda,\varepsilon)) - (E-\mathfrak{A}(\mu,\varepsilon))][E+\mathfrak{R}(\mu,\varepsilon)] =$$

$$= [E+\mathfrak{R}(\lambda,\varepsilon)]\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \mu}[E+\mathfrak{R}(\mu,\varepsilon)](\mu-\lambda) + (\mu-\lambda)\mathfrak{P}(\mu-\lambda)$$

и поэтому

$$[E+\mathfrak{R}(\lambda,\varepsilon)]\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \mu}[E+\mathfrak{R}(\mu,\varepsilon)] = \frac{E+\mathfrak{R}(\lambda,\varepsilon)}{\mu-\lambda} - \frac{E+\mathfrak{R}(\mu,\varepsilon)}{\mu-\lambda} + \mathfrak{P}(\mu-\lambda),$$

а значит, $P^2(\varepsilon)$ равно

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_C d\,\lambda \int\limits_{C'} d\,\mu\, \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \lambda}\left(\frac{E+\mathfrak{R}(\lambda,\varepsilon)}{\mu-\lambda} - \frac{E+\mathfrak{R}(\mu,\varepsilon)}{\mu-\lambda} + \mathfrak{P}(\mu-\lambda)\right)$$

Однако, поскольку $\lambda \in C$ не лежит внутри C', верно

$$\int\limits_{C'} d\,\mu\, \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \lambda}\left(\frac{E+\mathfrak{R}(\lambda,\varepsilon)}{\mu-\lambda} + \mathfrak{P}(\mu-\lambda)\right) = 0$$

и

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_C d\,\lambda \int\limits_{C'} d\,\mu\, \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \lambda}\frac{E+\mathfrak{R}(\mu,\varepsilon)}{\lambda-\mu} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'} d\,\mu\, \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \mu}[E+\mathfrak{R}(\mu,\varepsilon)] = P(\varepsilon)$$

Поэтому $P^2 = P$.

Значит, собственные значения этого оператора равны нулю или единицы. В силу того, что $\mathfrak{R}$ имеет в качестве своего вычета лишь конечномерные операторы, то таков и P. Поэтому при любом $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ след $\mathrm{Sp}\, P(\varepsilon)$ равен натуральному числу $N(\varepsilon)$ или нулю. В [45] показано, что это число совпадет с кратностью собственных значений, лежащих внутри C, и с размерностью $P(\varepsilon)$.

Остается доказать, что и $\operatorname{Sp} P(\varepsilon)$ является аналитической функцией от ε, регулярной в нуле. Воспользуемся с этой целью леммой Фань Цуй (см. [55]): для любой ортогональной системы $\{\varphi_j\}_1^n$ и любого компактного оператора A верна оценка

$$\sum_{j=1}^{n} |(A\varphi_j,\ \varphi_j)| \le \sum_{j=1}^{n} s_j(A).$$

Из нее следует, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(P\varphi_j,\ \varphi_j)| \le \sum_{j=1}^{\infty} s_j(P).$$

Поскольку при любом ε размерность корневого пространства конечна, $N(\varepsilon) < N_0$ при всех $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. Норму $||P(\varepsilon)||$ тоже можно оценить равномерно. В самом деле, в силу теоремы Шура можно найти такой ортонормированный базис, в котором конечномерный P имеет на главной диагонали 1 и нули. Тогда

$$(P\varphi_j,\ \varphi_j) = 1 \text{ или } 0,$$

поэтому для любого $\varphi \in \mathfrak{H}$

$$|(P\varphi,\ \varphi)| \le ||\varphi||^2,$$

откуда $||P|| \le 4$ (см. [33]).

Поскольку P — конечномерной оператор размерности $< N_0$, то существует не более N_0 чисел $s_j(P) \neq 0$ и все эти числа меньше $||P(\varepsilon)|| < P_0$. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(P\varphi_j,\ \varphi_j)| \le 4N_0.$$

По теореме Вейерштрасса о суммировании ряда из этой оценки следует, что ряд

$$s_0(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} (P\varphi_j,\ \varphi_j) = \mathfrak{P}(\varepsilon).$$

Но это значит, что $s_0(\varepsilon)$ непрерывна и в тоже время принимает только целые значения, это возможно только если $s_0(\varepsilon) \equiv N$. Но с другой стороны при фиксированном ε подынтегральная функция в выражении для P имеет полюса только в точках $e^{(m)}(\varepsilon)$ с вычетами $P^{(m)}$, поэтому

$$P(\varepsilon) = \sum P^{(m)}.$$

По доказанному выше $\mathrm{Sp}\ P^{(m)} = N_m(\varepsilon)$ — кратность собственного значения $e^{(m)}(\varepsilon)$, поэтому

$$\mathrm{Sp}\ P(\varepsilon) = \sum N_m,$$

то есть число собственных значений, лежащих внутри C остается неизменным. $\square$

Изучим теперь некоторые свойства оператора

$$P_n(\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C d\ \lambda\ \lambda^n \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \lambda}[E + \mathfrak{R}].$$

При фиксированном ε подынтегральная функция имеет полюса только в точках $e^{(m)}(\varepsilon)$ с вычетами $P^{(m)}$, поэтому

$$P_n(\varepsilon) = \sum \left(e^{(m)}(\varepsilon)\right)^n P^{(m)}.$$

По теореме 10 выражение $\mathrm{Sp}\ P^{(m)} = N_m(\varepsilon)$ представляет собой кратность собственного значения $e^{(m)}(\varepsilon)$, поэтому как и в конечномерном случае

$$\mathrm{Sp}\ P_n(\varepsilon) = \sum_{m=1}^{N} \left(e^{(m)}(\varepsilon)\right)^n.$$

Для доказательства теоремы 9 остается заметить, что в силу леммы Фань Цуй верно

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(P_n\varphi_j,\ \varphi_j)| \le \sum_{j=1}^{\infty} s_j(P_n).$$

Поскольку оператор P_n конечномерный, то существует не более N_0 чисел $s_j(P) \neq 0$ и все эти числа меньше $||P_n(\varepsilon)||$. Оценить эту норму равномерно можно, воспользовавшись тем, что по доказанному в теореме 10

$$||P^{(m)}|| \le 4,$$

поскольку тогда

$$||P_n(\varepsilon)|| \leq \sum \left|e^{(m)}(\varepsilon)\right|^n ||P^{(m)}|| \leq 4N_0(e_0 + \mathrm{dist}B)^n.$$

Значит ряд $\mathrm{Sp}P_n(\varepsilon)$ сходится равномерно и по теореме Вейерштрасса о суммировании ряда $P_n(\varepsilon) = \mathfrak{P}(\varepsilon)$, что и завершает доказательство теоремы 9, которая теперь формулируется так:

ТЕОРЕМА 11. *Пусть в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ компактный оператор $\mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon)$, голоморфный в области B λ-плоскости и в области $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, имеет при $\varepsilon = 0$ в области B только одно собственное значение e_0 кратности N. Тогда при заданном $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ все его собственные значения $\{e^{(n)}(\varepsilon)\}$, лежащие в B, являются корнями алгебраического уравнения*

$$e^N + a_1(\varepsilon)e^{N-1} + \cdots + a_N(\varepsilon) = 0,$$

где

$$a_1 = -s_1, \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n!}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ s_2 & s_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-4} & \ldots & s_1 \end{vmatrix},$$

а функции $s_n(\varepsilon)$ определяются формулами

$$s_n(\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \lambda^n d\,\lambda\ \mathrm{Sp}\ \left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\lambda}[E + \mathfrak{R}]\right) \quad n = 1, \ldots N$$

и являются аналитическими функциями от ε, регулярными в нуле.

ЗАМЕЧАНИЕ B.2.1. Тот факт, что в окрестности невозмущенного собственного значения имеется хотя бы одно собственное значение, был указан в [27].

Отметим, что формулы для s_n удобны для непосредственного вычисления поправок теории возмущений, если известна $\mathfrak{R}(\lambda, 0) \equiv \mathfrak{R}_0(\lambda)$. В самом деле, коль скоро

$$\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\varepsilon} = [E + \mathfrak{R}]\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\varepsilon}[E + \mathfrak{R}]$$

верно

$$s_n'(0) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \lambda^n d\,\lambda\ \mathrm{Sp}\ \left(\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial\lambda\partial\varepsilon}[E+\mathfrak{R}] + \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\lambda}[E+\mathfrak{R}]\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\varepsilon}[E+\mathfrak{R}]\Big|_{\varepsilon=0}\right)$$

и так далее.

B.3 Первый порядок теории возмущений.

Из теоремы 11 следует, что все собственные значения, лежащие в области B можно представить в виде одного или нескольких рядов

$$e^{(m)}(\varepsilon) = e_0 + e_1^{(m)}\varepsilon^{\frac{1}{p_m}} + \dots = \mathfrak{P}(\varepsilon^{\frac{1}{p_m}}), \quad m = 1, \dots M,$$

причем $\sum\limits_{m=1}^{M} p_m = N$. (Подробное доказательство этого факта содержится в [53].)

Помимо очевидно случая, когда $N = 1$, разложение для $e(\varepsilon)$ имеет вид в первом порядке

$$e_0 + e_1\varepsilon + o(\varepsilon),$$

и, следовательно, применима теория возмущений в первом порядке, можно указать и другой. Именно, характерная особенность операторов $\mathfrak{A}$, возникающих в задачах математической физики, состоит в том, что e_0 — число вещественное и

$$\mathrm{Im}\, e^{(m)}(\varepsilon) \le 0$$

(См. [23] и раздел 3.3). Отсюда следует, что ряды для $e^{(m)}(\varepsilon)$ должны иметь весьма специальный вид: или

$$e^{(m)}(\varepsilon) = e_0 + e_{p_m}\varepsilon + \dots + e_{2M_m p_m}\varepsilon^{2M_m} + e_{2M_m p_m+1}\varepsilon^{2M_m+\frac{1}{p_m}} + \dots,$$

где $p_m \ne 1$, а $e_0, e_{p_m}, \dots, e_{(2M_m-1)p_m}$ — все вещественные и $\mathrm{Im}\, e_{2M_m p_m} < 0$, или

$$e^{(m)}(\varepsilon) = e_0 + e_1\varepsilon + e_{2M_m}\varepsilon^{2M_m} + e_{2M_m+1}\varepsilon^{2M_m+1} + \dots = \mathfrak{P}(\varepsilon),$$

где все коэффициенты вещественны, где M_m — некоторое натуральное число (см. [24]). Поэтому верна теорема.

Теорема 12. *Пусть в гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$ *задан компактный оператор* $\mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon)$*, голоморфный в области* B λ*-плоскости и в области* $|\varepsilon| < \varepsilon_0$*, и пусть все его собственные значения в указанных областях удовлетворяют условию*

$$\operatorname{Im} e(\varepsilon) \leq 0.$$

Пусть, далее, при $\varepsilon = 0$ *в области* B *имелось только одно вещественное собственное значение* e_0 *произвольной кратности* N*. Тогда при всех достаточно малых* ε *все собственные значения этого оператора, лежащие в* B*, можно представить в виде рядов*

$$e_0 + e_1\varepsilon + o(\varepsilon),$$

где e_0, e_1 *— вещественные числа.*

Для оправдания формального применения теории возмущений в первом порядке остается заметить следующее. Пусть $w_0 \in \mathfrak{H}$ — собственная функция сопряженного оператора $\mathfrak{A}^*(\lambda, 0)$, отвечающая e_0 и имеющая максимальный порядок присоединения m, тогда в силу выражения для главной части резольвенты из [45] функция

$$v(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C d\,\lambda\, (\lambda - e_0)^m \mathfrak{R}(\lambda, \varepsilon) w_0$$

является собственной функцией оператора $\mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon)$, не равной тождественно нулю и аналитически зависящей от ε. Доказанное можно сформулировать так.

Теорема 13. *Если собственному значению* e_0 *отвечает* N' *собственных функций* $\mathfrak{A}^*(\lambda, 0)$*, то существует* N' *собственных функций* $v^{(n)}(\varepsilon)$ *оператор-функции* $\mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon)$*, представимых в виде*

$$v^{(n)}(\varepsilon) = \mathfrak{P}(\varepsilon) = v_0^{(n)} + v_1^{(n)}\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Замечание B.3.1. Особо следует отметить случай, когда при $\varepsilon = 0$ оператор $\mathfrak{A}$ имеет ровно N собственных функций $v_0^{(n)}$. В этом случае по каждой собственной функции сопряженного оператора можно построить N функций

$$v^{(n)} = P(\varepsilon)w_0^{(n)} = v_0^{(n)} + v_1^{(n)}\varepsilon + \dots,$$

являющихся собственными функциями $\mathfrak{A}$. Каждой из них отвечает собственное значение представимое в виде

$$e^{(n)}(\varepsilon) = e_0 + e_1^{(n)}\varepsilon + \dots.$$

Эти теоремы полностью оправдывает формальное применение теории возмущений в первом порядке для рассматриваемого некоторого класса операторов математической физики, встречающихся, в частности, в математической теории волноведущих систем. Отметим в заключении, что применение формальной теории возмущений в первом порядке оправдано и при многократном невозмущенном собственном значении, поэтому на самом деле в условиях теоремы 6 требование однократности e_0 можно опустить.

Заключение.

В заключении приведем основные результаты работы.

- Построены волноведущие системы (как гофрированные, так и простые) обладающие ловушечными модами из пространства L^2, убывающими на бесконечности степенным, а не экспоненциальным образом, как в известных примерах.

- Задача о возбуждении колебаний локальным током в волноводе с неоднородным заполнением сведена к интегральному уравнению в конечной области. При этом доказано, что собственным и присоединенным функциям этого уравнения соответствуют собственные и присоединенные функции исходной задачи.

- Указан критерий существования бесконечной последовательности собственных значений для заполнений типа <вставки>. В случае заполнения типа <простой вставки> и <колена> собственные значения найдены как корни трансцендентных уравнений. Получены оценки для их численного значения, которые позволяют доказать, что найдены все собственные значения на рассматриваемом интервале частот.

- Показано, что вложенные в непрерывный спектр собственные значения переходят в комплексные резонансы при малом вещественном возмущении заполнения, хотя они в первом порядке теории возмущений остаются вещественными. Следовательно, вложенные в непрерывный спектр собственные значения неустойчивы к таким малым возмущениям заполнения.

- При помощи метода Фубини приведен пример задачи, близкой к спектральной задаче теории волноводов со вставкой, вложенные собственные значения которой исчезают при малом изменении коэффициентов.

- На пути обобщения подготовительной теоремы Вейерштрасса развита теория возмущений для компактных оператор-функций, встречающихся в частности в математической теории волноведущих систем. Показано, что однократное собственное значение зависит от параметра возмущения аналитически, а зависимость кратного собственного значения может иметь лишь алгебраическую особенность.

При написании диссертации автор пользовался большой помощью проф. А.Г. Свешникова, проф. А.Н. Боголюбова и доц. А.Л. Делицына, с которыми он неоднократно обсуждал содержание этой работы. Автор хотел бы выразить им искреннюю благодарность.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 02-01-00271, 00-01-00111) и программы <Университеты России> (код УР.02.03.010).

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. О возбуждении радиоволноводов. // ЖТФ. **17** (1947), т 11, с. 1283-1296.

2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. О представлении поля в волноводе в виде суммы полей TE и TM. // ЖТФ. **18** (1948), с. 959-963.

3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. О возбуждении радиоволноводов II. // ЖТФ. **17** (1947), т 12, с. 1431-1440.

4. Кисунько Г.В. Электродинамика полых систем. М.-Л.: Изд-во ВКАС, 1949.

5. Краснушкин П. Е., Моисеев Е. И. О возбуждении вынужденных колебаний в слоистом радиоволноводе. // Докл. АН СССР. **264** (1982), No 5, с. 1123-1127.

6. Свешников А.Г. Принцип излучения. // Докл. АН СССР. **73** (1950), т 3, с. 917-920.

7. Свешников А.Г. Принцип предельного поглощения для волновода. // Докл. АН СССР. **80** (1951), т 3, с. 345-347.

8. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. М.: Высшая школа, 1991.

9. Werner P. Resonanzphänomene in akustischen und elektromagnetischen Wellenleitern. // Z. Angew. Math. Mech. **67** (1987), т 4, p. 43-54.

10. Шестопалов В.П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур. М.: Наука, 1987.

11. Делицын А.Л. О задаче рассеяния на неоднородности в волноводе // Ж. вычислит. мат. и мат. физики. **40** (2000), т 4. С. 606-610.

12. Rellich F. Das Eigenwertproblem von $\Delta u + \lambda u = 0$ in Halbröhren. // Studies and essays presented to R. Courant. N-Y., 1948, p. 329-344.

13. Jones D.S. The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u$ when the boundary conditions are on semi-infinite domains. // Proc. Camb. Phil. Soc., **49** (1954), p. 668-684.

14. Evans D. V., Levitin M., Vassiliev D. Existence theorems for trapped modes. // J. Fluid Mech., **261** (1994), p. 21-31.

15. Evans P., Porter R. Trapped modes embedded in the continuous spectrum. // Quart. J. Mech. Appl. Math. **51** (1998), p. 263-274.

16. Davies E.B., Parnovski L. Trapped modes in acoustic waveguides. // Quart. J. Mech. Appl. Math. **51** (1998), p. 477-492.

17. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д. О ловушечных модах волноведущих систем. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2001, т 6. С. 69-70.

18. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.4. М.: Мир, 1982.

19. Weyl H. Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollstetig ist. // Rend. Circ. Matem. Palermo. **27** (1909), p. 373-392.

20. Малых М.Д. О поведении вложенных в непрерывный спектр собственных значений при изменении заполнения волновода. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2002, т 1. С. 61-62.

21. Боголюбов А.Н., Малых М.Д. Теория возмущений для вложенных собственных значений волновода. // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал `http://jre.cplire.ru`). 2002, т 2.

22. Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Свешников А.Г. О неустойчивости вложенных в непрерывный спектр собственных значений волновода по отношению к возмущениям его заполнения// Докл. РАН. **385** (2002), т 6. С. 744-746.

23. Howland J.S. Puiseux series for resonances at an embedded eigenvalue. // Pacific J. Math. **55** (1974), т 1, p. 157-176.

24. Howland J.S. On the Weinstein-Aronszajn Formula. // Arch. Rational Mech. Anal. **39** (1970), p. 323-339.

25. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д. О вещественных резонансах в волноводе с неоднородным заполнением. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2001, т 5. С. 23-25.

26. Малых М.Д. Поведение вложенных собственных значений уравнения Гельмгольца при малых возмущениях. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2002, т 3. С. 13-15.

27. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М: Мир, 1984.

28. Боглюбов А.Н., Малых М.Д., Свешников А.Г. Ловушечные моды волноведущих систем. // LVII научная сессия РНТОРЭС им. А.С. Попова, посвященная дню радио. Труды. Т. 1. М., 2002. С. 211-212.

29. Боглюбов А.Н., Малых М.Д., Свешников А.Г. Ловушечные моды волноведущих систем. // Научная конференция <Ломоносовские чтения>. Секция физики. Сборник расширенных тезисов докладов. М.: Физич. ф-т МГУ, 2002. С. 47-48.

30. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д., Свешников А.Г. О базисности системы корневых векторов радиоволновода. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2000. т 6. С. 17-20.

31. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д. О корневых векторов цилиндрического волновода. // Ж. вычислит. мат. и мат. физики, **41** (2001), т 1, с. 126-129.

32. Малых М.Д. О базисности корневых векторов цилиндрического волновода. // Международная конференция студентов и аспирантов по фундаментальным наукам <Ломоносов-2001>. Секция <Физика>. Сборник тезисов. М.: Изд-во МГУ, 2001. С. 52-54.

33. Stummel F. Rand- und Eigenwertaufgaben in Sobolewschen Räumen. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1969.

34. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

35. Carleman T. Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partialler Differentialgleichungen // Edition complète des articles. Malmö, 1960. P. 483-496. (Die Berichten der math.-phys. Klasse der sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Bd. LXXXVIII (1936), S.119-132.)

36. Rellich F. Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebiet. // Jahresbericht der deutch. Math. Vereinging, **53** (1943), p. 157-165.

37. Федорюк М.В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.

38. Albeverio S., Hoegh-Korn R. Perturbation of resonances in quantum mechanics. // J. Math. An. Appl. **101** (1984), p. 491-513.

39. NEUMANN J. V. Charakterisirung des Spektrums eines Integraloperators// Actualités scientifiques et industrielles. **229** (1935), p. 38-55.

40. ГОЛУБЕВ В.В. Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек. Гл. 3. // Однозначные аналитические функции. Мероморфные функции. М.: Физматлит, 1961. С. 84-113.

41. GOLDSTEIN C.I. The singularities of the S-matrix and Green's function associated with perturbation of $-\Delta$ acting in a cylinder.// Bull. Amer. Math. Soc. **42** (1973), p. 1303-1307.

42. ГИЛЬБЕРТ Д., КУРАНТ Р. Методы математической физики. Т.1. М-Л.: ГИТТЛ, 1951, Т.2. М.: ГИТТЛ, 1945.

43. HEUSER H. Funktionalanalysis. Stuttgart: B.G. Teubner, 1975.

44. HELLWIG G. Differentialoperatoren der mathematischen Physik. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer, 1964.

45. КЕЛДЫШ М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов. Гл. I. // Избранные труды. Математика. М.: Наука, 1985. С. 305-320.

46. ДЕЛИЦЫН А.Л. Спектральные свойства задачи о нерегулярном волноводе.// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2001, т 3. С. 75-76.

47. SCHLESINGER L. Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen. Leipzig-Berlin: B.G. Teubner, 1908.

48. PAINLEVÉ P. Sur le calcul des intégrales d'un système différentiel par la mèthode de Cauchy-Lipschitz. // Bull. Soc. Math. France. **21** (1899), p. 149-152.

49. ТРИКОМИ Ф. Дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, 1962.

50. Фукс Б.А. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. М.: ГИФМЛ, 1962.

51. Гауерт Г., Ремmерт Р. Аналитические локальные алгебры. М.: Наука, 1988.

52. Salmon G. Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformation. Deutsche bearb. von W. Fiedler. Leipzig: B.G. Teubner, 1877.

53. Weierstrass K. Mathematische Werke. Bd. 4. Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten. Bearb. von G. Hettner und J. Knoblauch. Berlin: Mayer&Müller, 1902.

54. Гурвиц А. Теория аналитических и эллиптических функций. М.-Л.: ГТТИ, 1933.

55. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.