Докл. РАН. **385** (2002), т 6, с. 744-746.

УДК 517.958; 621.372.8

О неустойчивости вложенных в непрерывный спектр собственных значений волновода по отношению к возмущениям его заполнения.*

А. Н. Боголюбов, М. Д. Малых, А. Г. Свешников.

Представлено академиком В.А. Ильиным 03.04.2002 г.

Аннотация

Рассмотрены погруженные в непрерывный спектр собственные значения спектральных задач для волновода с заполнением. Указан критерий существования бесконечной последовательности собственных значений для заполнений типа "вставки". Показано, что вложенные в непрерывный спектр собственные значения исчезают при малом вещественном возмущении заполнения.

Хотя к настоящему моменту известны примеры волноведущих систем, обладающих вложенными в непрерывный спектр собственными значениями, необходимые условия появления вложенных мод остаются неясными. Поэтому, как отмечалось в [1], целесообразно изучить, сохранятся ли эти моды при малых возмущениях параметров волноведущих систем, обладающих ловушечными модами.

Рассмотрим в волноводе $\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^1, y \in S\right\}$ с сечением S, представляющим собой односвязную конечную область в пространстве $\mathbb{R}^1$ или $\mathbb{R}^2$,

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды 02-01-00271, 00-01-00111) и программы «Университеты России» (код УР.02.03.010)

задачу на собственные значения:

$$
\begin{cases}
\Delta u + eq(x,y)u = 0 \quad (x,y) \in \Omega, \\
u|_{\partial\Omega} = 0, \\
u \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega).
\end{cases}
\tag{1}
$$

Фигурирующая здесь функция $q(x,y)$ характеризует заполнение волновода; будем считать, что волновод заполнен локально нерегулярно, то есть что $q(x,y)$ — кусочно-непрерывная функция и $\mathrm{Supp}[q(x,y)-1] \equiv \Omega'$ — конечная область, и что в волноводе отсутствует затухание, то есть что q — вещественная функция.

Весьма распространенным на практике является случай, когда в полый волновод Ω, заполненный однородным веществом с $q=1$, перпендикулярно к оси Ox вставлена одна или несколько пластин с различными $q \neq 1$, то есть $q(x,y)$ является кусочно-непрерывной функцией только одного переменного x. В этом случае удается доказать существование бесконечной последовательности собственных значений у задачи (1), более точно:

Теорема 1. *Пусть α_n^2 — собственные значения задачи Дирихле на сечении S, а ψ_n — соответствующие им собственные функции. Если $1 \leq q_0(x) \leq Q$, то у задачи*

$$
\begin{cases}
\Delta u + eq_0(x)u = 0 \quad (x,y) \in \Omega, \\
u|_{\partial\Omega} = 0, \\
u \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)
\end{cases}
\tag{2}
$$

при любом $n = 1, 2, \ldots$ найдется собственное значение $e^{(n)}$, лежащее на интервале $(\frac{\alpha_n^2}{Q},\ \alpha_n^2)$, которому отвечает собственная функция вида $u_n(x)\psi_n(y)$.

Замечание 1. На существование бесконечной последовательности собственных значений у волновода с заполнением типа вставки было указано в [2]. В [3] были получены упомянутые выше оценки и для ряда заполнений типа вставки вычислены собственные значения.

Эта теорема означает в частности, что при достаточно малых $q-1$ уже собственное значение $e^{(2)}$ задачи (2) лежит выше α_1^2, поэтому волновод обладает собственной функцией вида $u_0(x,y) = u_2(x)\psi_2(y)$, отвечающей собственному значению волновода $e^{(2)} > \alpha_1^2$, то есть вложенному в непрерывный спектр. Выясним теперь, сохраниться ли оно, если мы возмутим это заполнение

$$q(x,y) = q_0(x) + \varepsilon q_1(x,y),$$

где q_1 — вещественная функция, а ε характеризует малость возмущения.

Как показано в [4], в достаточно малой окрестности однократного собственного значения e_0 невозмущенной задачи (2) может существовать не более одного собственного значения $e(\varepsilon)$ возмущенной задачи (1). Кроме того, если это собственное значение существует, то оно и соответствующая ему собственная функция $u(x,y;\varepsilon)$ являются аналитическими функциями от ε, регулярными в нуле.

Для доказательства следует воспользоваться резольвентой регулярного волновода, явное выражение которой имеет вид

$$R_0(e)v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{2\sqrt{e-\alpha_n^2}} \int\limits_{\Omega} d\xi d\eta e^{i\sqrt{e-\alpha_n^2}|x-\xi|}\psi_n(\eta)\psi_n(y)\ v(\xi,\eta)$$

и отображает $L^2(\Omega')$ в $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^1_{2,\,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Сделав в (1) подстановку $u = R_0(e)v$, получим для v интегральное уравнение

$$v - \mathfrak{A}(e,\varepsilon)v = 0, \quad \text{где} \quad \mathfrak{A}(e,\varepsilon) = -e(q(x,y;\varepsilon)-1)R_0(e). \tag{3}$$

Поскольку $\operatorname{Supp} q-1$ — ограничен, оператор $\mathfrak{A}(e,\varepsilon)$ является компактной оператор-функцией, голоморфной на римановой поверхности $\mathfrak{f}$ с точками ветвления α_n^2. Эта процедура сведения исходной задачи к интегральному уравнению является модификацией процедуры, предложенной в [5], однако ее проще обосновать в случае, когда речь идет об обобщенных решениях.

Как показано в [4], множество собственных значений оператор-функции $\mathfrak{A}(e,\varepsilon)$, лежащих на главном листе (на котором все корни $\sqrt{e-\alpha_n^2}$ имеют главные значения), совпадает с множеством всех собственных значений задачи (1). Если при $q = q_0$, оператор $\mathfrak{A}$ имеет однократное собственное значение e_0, то в достаточно малой его окрестности существует единственное собственное значение $e(\varepsilon)$, зависящее от ε аналитически.

Если e_0 — изолированное однократное собственное значение задачи (2), то оно является однократным собственным значением оператора $\mathfrak{A}(e,0)$, лежащим внутри главного листа, а следовательно, в достаточно малой окрестности e_0 лежит единственное собственное значение $e(\varepsilon)$ оператора $\mathfrak{A}(e,\varepsilon)$. Поскольку малая окрестности e_0 лежит на главном листе, $e(\varepsilon)$ — единственное возмущенное собственное значение задачи (1) с возмущенным заполнением, стремящиеся к e_0 при $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Однако, если e_0 — вложенное в непрерывный спектр собственное значение задачи (2), то оно является собственным значением оператора $\mathfrak{A}(e,0)$, лежащим на границе главного листа. Поэтому хотя в достаточно малой окрестности e_0 лежит единственное собственное значение $e(\varepsilon)$ оператора $\mathfrak{A}(e,\varepsilon)$, это собственное значение может и не лежит на главном листе и значит, не быть собственным значением (1) с возмущенным заполнением. Это означает, что может существовать не более одного собственного значения возмущенной задачи (1), стремящегося к e_0 при $\varepsilon \longrightarrow 0$. При этом, если оно существует, то оно совпадет с соответствующим собственным значением оператора $\mathfrak{A}(e,\varepsilon)$, и следовательно, зависит от ε аналитически, как и утверждалось выше.

Предположим теперь, что при любом $q_1(x,y)$ в окрестности собственного значения $e_0 \equiv e^{(2)}$ существует собственное значение возмущенной задачи (1). Тогда это собственное значение и соответствующую ему собственную функцию можно разложить в ряды:

$$e(\varepsilon) = e_0 + e_1\varepsilon + \ldots, \quad u(x,y;\varepsilon) = u_2(x)\psi_2(y) + \varepsilon u_1(x,y) + \ldots\ .$$

Умножив (1) на $\psi_1(y)$ и проинтегрировав по всему сечению S, получим

$$\frac{d^2}{dx^2}\int\limits_S dyu(x,y)\psi_1(y) + e\int\limits_S dy\, q(x,y)u(x,y)\psi_1(y) = \alpha_1^2\int\limits_S dyu(x,y)\psi_1(y).$$

Подставим сюда ряды для $e(\varepsilon)$ и $u(\varepsilon)$, тогда в первом порядке теории возмущений, обозначив

$$\int\limits_S dy u(x,y)_1 \psi_1(y) = u_{1,1}(x),$$

получим

$$\frac{d^2 u_{1,1}}{dx^2} + [e_0 q_0(x) - \alpha_1^2] u_{1,1} = e_0 u_2(x) \int\limits_S dy\, q_1(x,y) \psi_1(y) \psi_2(y).$$

Для того чтобы $u(x,y;\varepsilon)$ принадлежало L^2, необходимо, чтобы и $u_{1,1}(x)$ принадлежала $L^2(\mathbb{R}^1)$. Поскольку носитель возмущенного заполнения $q(x,y)-1$ ограничен, это уравнение имеет решение, принадлежащее пространству L^2, лишь при весьма специальных условиях на $q_1(x,y)$. Тем самым доказано следующее. (Ср. [6].)

Теорема 2. *Существуют такие кусочно-непрерывные вещественные возмущения $q_1(x,y)$ исходного заполнения $q_0(x)$, что в окрестности невозмущенного собственного значения нет возмущенных собственных значений.*

Более того, из доказательства видно, что собственное значение $e_0 = e^{(n)}$, отвечающее собственное функции $u_0(x,y) = u_2(x)\psi_2(y)$, устойчиво лишь к тем возмущениям, при которых уравнение

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + [e_0 q_0(x) - \alpha_1^2] w = e_0 u_2(x) \int\limits_S dy\, q_1(x,y) \psi_1(y) \psi_2(y) \tag{4}$$

имеет решение из $L^2(\mathbb{R}^1)$.

Простейшим примером, иллюстрирующим данное утверждение, является случай, когда

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^1, \quad y \in [0,\ +\pi]\}, \quad \Omega' = \{x \in [-1,1], \quad y \in [0,\ +\pi]\}$$

и

$$q_0\,(x) = \begin{cases} q_0, & x \in (-1,+1) \\ 1 & \end{cases}.$$

Легко показать, что в этом случае наименьшее из собственных значений, собственные функции которых имеют вид $u_2(x)\psi_2(x)$, исчезает при возмущении вида

$$q_1(x,y) = \begin{cases} \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)} \sin\sqrt{e_0 q_0 - \alpha_1^2}(x \pm 1) \cos\sqrt{\alpha_2^2 - e_0 q_0}x, & |x| < 1 \\ 1 \end{cases} \tag{5}$$

если оно вложено в непрерывный спектр.

Основной смысл доказанной теоремы заключается в том, что вложенные в непрерывный спектр собственные значения неустойчивы к малым возмущениям заполнения волновода. Это свойство является довольно неожиданным, поскольку обычно собственное значение исчезает лишь при возмущении заполнения комплексной добавкой, то есть при введении затухания.

Список литературы

[1] Davies E.B., Parnovski L. Trapped modes in acoustic waveguides. // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1998. V. 51. P. 477-492.

[2] Делицын А.Л. Спектральные свойства задачи о нерегулярном волноводе.// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2001. т 3. С. 75-76.

[3] Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д. О вещественных резонансах в волноводе с неоднородным заполнением. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2001. т 5. С. 23-25.

[4] Боголюбов А.Н., Малых М.Д. Теория возмущений для вложенных собственных значений волновода. // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал `http://jre.cplire.ru`). 2002. т 2.

[5] Шестопалов В.П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур. М.: Наука, 1987.

[6] Малых М.Д. О поведении вложенных в непрерывный спектр собственных значений при изменении заполнения волновода. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2002. т 1. С. 61-62.