УДК 517.9

О применении метода М.Н. Лагутинского к интегрированию дифференциальных уравнений в символьном виде.

М.Д. Малых.
(119991 Москва, Ленинские Горы, МГУ, факультет наук о материалах)
E-mail: malykhmd@yandex.ru.

Содержание

В 1911 г. М.Н. Лагутинский [1, 2] предложил способ отыскания частные и общие интегралы дифференцирований полиномиальных колец, основанный на вычислении определителей, современное изложение этого метода для случая кольца $\mathbb{C}[x, y]$ дано в [3, 4], общий случай — в [5]. В настоящей работе представлен пакет Lagitinski под Sage [6], его возможности по части интегрирования дифференциальных уравнений 1-го порядка проиллюстрированы на тестовых примерах из курса «Дифференциальные уравнения», взятых из задачника А.Ф. Филиппова [8].

1. Метод Лагутинского

1.1. Определители Лагутинского

Пусть R — полиномиальное кольцо с дифференцированием D и полем констант $\mathbb{Q}$. Счетное упорядоченное множество B элементов m_j кольца R будем называть базисом кольца, если

1) любой элемент кольца R можно представить как линейную комбинацию конченого числа элементов множества B с постоянными коэффициентами,

2) произведение любых двух элементов множества B принадлежит B, и следует строго после обоих сомножителей, т.е. $m_i m_j = m_n$ и n строго больше чисел i и j

В дальнейшем по умолчанию используется базис, образованный мономами в glex-упорядочении. Условимся говорить, что порядок многочлена f равен наибольшему из нумеров базисных элементов, входящих в разложение f по базису с ненулевыми коэффициентами. Порядком дроби f/g будем называть максимум из порядков числителя и знаменателя.

С тройкой R, D, B свяжем последовательность определителей Лагутинского. С этой целью вообразим бесконечную матрицу, первой строкой которой служит

$$m_1, m_2, \dots,$$

второй строкой — производная первой

$$Dm_1, Dm_2, \dots,$$

третьей — вторая производная первой

$$D^2m_1, D^2m_2, \dots,$$

и так до бесконечности. Угловой минор n-го порядка этой матрицы будем обозначать как Δ_n и называть определителем Лагутинского n-го порядка.

Замечание 1. Эти определители относительно стандартного glex-базиса были впервые введены М.Н. Лагутинским (1871 – 1915) [1, 2], ему же в существенном принадлежит изложенный ниже метод отыскания интегралов дифференцирования кольца, о нем см. [7].

1.2. Вычисление определителей Лагутинского

Вычисление этих определителей реализовано в Sage в виде функции `lagutinski_det(R,D,B,N)`.

Пример 1. Вычисление определителя Лагутинского 2-го порядка в кольце $R = \mathbb{Q}[x, y]$ с дифференцированием

$$D = y(x+1)\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 + x + 2)\frac{\partial}{\partial y}$$

в стандартном glex-базисе в Sage можно выполнить так:

```
sage: R.<x,y> = PolynomialRing(QQ, 2)
sage: D=lambda phi: y*(x+1)*diff(phi,x)+(y^2+x+2)*
  diff(phi,y)
sage: B= sorted(((1+x+y)^30).monomials(),reverse=0)
sage: load("lagutinski.sage")
None
sage: lagutinski_det(R,D,B,2)
y^2 + x + 2
```

Ресурсы, потребные для вычисления определителей Лагутиского, существенно зависят от порядка определителя. Напр., в кольце $\mathbb{Q}[x, y]$ на современном компьютере уверенно и незаметно для пользователя вычисляют определители 10 порядка, возможность же вычисления определителя 20 порядка существенно зависит от дифференцирования. Оценки сложности получены в [4].

Обычно коэффициенты этих определителей являются очень большими по абсолютному значению целыми числами, поэтому можно было бы наедятся, что переход к полю $Z/(p)$ позволит существенно ускорить вычисление. Пакет lagutinski.sage поддерживает работу с любыми полями, с которыми может работать система. Однако вычислительные эксперименты учат, что при больших порядках переход от Q к $Z/(p)$ не приводит к существенному приросту производительности.

С другой стороны, вычисление определителя Лагутинского в фиксированной точке с целыми координатами, занимает заметно меньше ресурсов при условии, что подстановка координат точек предшествует вычислению определителя.

1.3. Рациональные интегралы

Определение 1. Общим или рациональным интегралом f дифференцирования D называют элемент поля частных исходного кольца R, производная которого Df равна нулю.

Задача 1 (об отыскании рационльного интеграла)**.** Для заданной тройки R, D, B выяснить, допускает отыскать все многочлены Дарбу, порядок которых не превосходит заданного числа N; в случае утвердительного ответа вычислить интеграл.

Решение дается след. теоремой.

Теорема 1 (М.Н. Лагутинский, 1911)**.** Рациональный интеграл, порядок которого не превосходит N, существует тогда и только тогда, когда $\Delta_N = 0$, при этом интеграл можно вычислить как отношение миноров этого интеграла.

Функция `lagutinski_integral(R,D,B,N)` возвращает искомый интеграл, если $\Delta_N = 0$ и $\Delta_{N-1} \neq 0$.

Пример 2. Дифференцирование

$$D = y(x+1)\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 + x + 2)\frac{\partial}{\partial y}$$

кольца $R = \mathbb{Q}[x, y]$ не имеет интегралов, числитель и знаменатель которых зависят от x и y линейно ($N = 3$), поскольку

```
sage: lagutinski_det(R,D,B,3)==0
False
```

но имеет таковой, среди функций, числитель и знаменатель которых зависят от x и y квадратично ($N = 6$), поскольку

```
sage: lagutinski_det(R,D,B,6)==0
True
```

Интегралом будет

```
sage: lagutinski_integral(R,D,B,6)
(-54*x^2 + 18*y^2 - 72*x)/(-18*y^2 - 36*x - 54)
```

Как отмечалось выше в 1.2, при больших порядках N вычисление определителя Лагутинского как многочлена является заметно более ресурсоемким по сравнению с вычислением его значения в одной точке с целыми коэффициентами. В пакет Lagutinski встроена функция `lagutinski_det_random`, которая вычисляет значение Δ_N при случайных целых значениях переменных $x, y, \ldots$, порождавших рассматриваемое кольцо R, взятых в окне $|x| \leq 100, \ldots$; за каждое применение координаты случайной точки генерируются заново. Если эта функция возвращает число, отличное от нуля, то дифференцирование не допускает рациональный интеграл, порядок которого не превосходит N. Если получился нуль, то весьма вероятно, что дифференцирование таковой допускает и поэтому следует потратить ресурсы на вычисление определителя как многочлена.

Пример 3. Дифференцирование

$$D = (x + 4y)\frac{\partial}{\partial x} + (2x + 3y^2)\frac{\partial}{\partial y}$$

кольца $R = \mathbb{Q}[x, y]$ не имеет рациональных интегралов, порядок которых меньше 50:

```
sage: D=lambda phi: (x+4*y)*diff(phi,x) +(2*x+3*y^2)
  *diff(phi,y)
sage: lagutinski_det_random(R,D,B,50)==0
False
```

Пример 4. Дифференцирование

$$D = (x + 4y)\frac{\partial}{\partial x} + (2x + 3y - 5)\frac{\partial}{\partial y}$$

кольца $R = \mathbb{Q}[x, y]$ вероятно имеет рациональный интеграл порядка 28:

```
sage: D=lambda phi: (x+4*y)*diff(phi,x) +(2*x+3*y-5)
  *diff(phi,y)
sage: lagutinski_det_random(R,D,B,27)==0
False
sage: lagutinski_det_random(R,D,B,28)==0
True
sage: lagutinski_det_random(R,D,B,28)==0
True
```

1.4. Многочлены Дарбу

Определение 2. Многочленом Дарбу или частным интегралом дифференцирования D называют такой многочлен f, производная которого Df делится на f нацело.

Если многочлен Дарбу разлагается на множители, то его сомножители тоже являются многочленами Дарбу [9].

Задача 2 (об отыскании многочлена Дарбу)**.** Для заданной тройки R, D, B отыскать все многочлены Дарбу, порядок которых не превосходит заданного числа N

Теорема 2 (М.Н. Лагутинского, 1911)**.** Если порядок многочлена Дарбу не превосходит N, то определитель Δ_N или равен нулю или делится на этот многочлен нацело.

Если Δ_N равен нулю тождественно, то в силу теоремы 1 дифференцирование допускает рациональный интеграл, а следовательно, и бесконечное число многочленов Дарбу.

При небольших порядках можно прямо вычислить определитель и разложить его на множители.

Пример 5. Все линейные относительно x и y многочлены Дарбу дифференцирования

$$D = y(x+1)\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 + x + 2)\frac{\partial}{\partial y}$$

кольца $R = \mathbb{Q}[x, y]$ являются линейными множителями определителя Δ_3.

```
sage: lagutinski_det(R,D,B,3).factor()
(-10) * (-x + y + 5) * (x + 2*y - 2)
```

Поэтому имеется лишь единственный кандидат на эту роль — многочлен $x+1$. Непосредственной подстановкой можно проверить, что в данном случае получился многочлен Дарбу:

```
sage: D(x+1).factor()
x + 4*y
```

При больших N и операция вычисления определителя, и факторизация являются затратными. При необходимости факторизацию многочленов большого порядка можно сократить, приняв во внимание след. наблюдение: если уравнение (1) имеет многочлен Дарбу f, порядок которого не превосходит N, то все многочлены $\Delta_N, \Delta_{N+1}, \ldots$ делятся на f нацело. Поэтому можно сначала вычислить наибольший общий делитель Δ_N, Δ_{N+1}, а затем среди его простых сомножителей отыскать многочлены Дарбу.

Пример 6. Отыщем все многочлены Дарбу до 4-го порядка относительно x, y дифференцирования

$$D = 3(x^2 - 4)\frac{\partial}{\partial x} + (3 + xy - y^2)\frac{\partial}{\partial y},$$

кольца $R = \mathbb{Q}[x, y]$.

```
sage: D=lambda phi: 3*(x^2-4)*diff(phi,x) +(3+x*y-y^2)*diff(phi,y)
sage: gcd(lagutinski_det(R,D,B,5*3),lagutinski_det(R,D,B,5*3+1)).factor()
(x - 2)^22 * (x + 2)^22 * (y^4 - 4*x*y - 6*y^2 - 3) * (2*x*y^3 + y^4 + x^2 + 2*x*y + 6*y^2 - 3)
```

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что каждый из четырех получившихся сомножителя, является многочленом Дарбу, ср. [9, 10].

2. Рациональные интегралы дифференциального уравнения

2.1. Задача Дебона

Задача 3 (задача Дебона)**.** Выяснить, допускает ли заданное дифференциальное уравнение

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0, p, q \in \mathbb{Q}[x, y], \tag{1}$$

интеграл u в поле $\mathbb{Q}(x, y)$, порядок которого не превосходит заданного числа N, и в случае утвердительного ответа выписать этот интеграл.

Замечание 2. Задача об интегрировании дифференциальных уравнений в алгебраических функциях возникла еще в 1630-х годах, когда Дебон

(Florimond de Beaune) предложил Декарту несколько «обратных задач на касательные» [11], с. 192. В начале прошлого века эту задачу связывали с именем Пуанкаре.

Замечание 3. То, что интеграл ищется именно в поле $\mathbb{Q}(x, y)$, а не в более широком $\mathbb{C}(x, y)$, нисколько не сужает задачу, поскольку интеграл из $\mathbb{C}(x, y)$ уравнения (1) с точностью до мультипликативной константы всегда имеет целые коэффициенты.

Задачу Дебона можно сформулировать и применительно к интегральным кривым.

Задача 4 (задача Дебона)**.** Выяснить, являются ли интегральные кривые заданного дифференциального уравнения (1) алгебраическим кривыми, порядок которых не превосходит заданного числа n, и в случае утвердительного ответа выписать уравнение пучка этих кривых.

Порядок N в определении 3 понимается в том же смысле, что и в разделе 1.1, поэтому

$$N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

В теории по методу неопределенных коэффициентов можно подставить в уравнение $Dr = 0$ выражение

$$u = \frac{a + \cdots + by^n}{1 + \cdots + cy^n}$$

и получить систему нелинейных алгебраических уравнений для отыскания коэффициентов $a, b, c, \ldots$. Выяснить разрешимость этой системы можно за конечное число действий и чисто алгебраическим путем. На практике описанное решение системы нелинейных алгебраических уравнений потребует заметных вычислительных мощностей, поэтому создатели алгоритмов решения этой задачи стремятся обойти решение нелинейных систем. Среди реализованных алгоритмов следует отметить метод определителей Лагутинского и метод Ж.-А. Вейля, 1985 [13].

2.2. Решение задачи по методу Лагутинского

Задача Дебона состоит в отыскании рационального интеграла *u* дифференцирования

$$D = p\frac{\partial}{\partial y} - q\frac{\partial}{\partial x},$$

порядки числителя и знаменателя которого не превосходят заданного числа N.

Теорема 3. Дифференциальное уравнение (1) допускает рациональный интеграл, порядок которого не превосходит N, тогда и только тогда, когда $\Delta_N = 0$, при этом интеграл можно вычислить как отношение миноров этого интеграла.

Напр., дифференциальное уравнение (1) допускает семейство интегральных кривых 2-го порядка в том и только в том случае, когда $\Delta_6 = 0$, 3-го порядка — когда $\Delta_{10} = 0$ и т.д.

Пример 7. Чтобы выяснить, является ли интегральные кривые уравнения

$$xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2,$$

предложенного в [8] за № 169, кривыми второго порядка, следует вычислить Δ_6.

```
sage: R.<x,y> = PolynomialRing(QQ, 2)
sage: B= sorted(((1+x+y)^30).monomials(),reverse=0)
sage: p=(2*x+1)*y-y^2-x^2
sage: q=-x
sage: D=lambda phi: q*diff(phi,x) -p*diff(phi,y)
sage: lagutinski_det(R,D,B,5)==0
False
sage: lagutinski_det(R,D,B,6)==0
True
```

Зная, что $\Delta_6 = 0$, а $\Delta_5 \neq 0$, можно вычислить интеграл этого уравнения:

```
sage: lagutinski_integral(R,D,B,6)
(-288*x^2 + 288*x*y - 288*x)/(-288*x + 288*y)
```

Чтобы убедится в том, что уравнение не допускает интегральных кривых порядка n, достаточно вычислить определитель Лагутинского порядка $N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ в случайной точке, тем самым существенно сэкономив вычислительные ресурсы.

Пример 8. Интегральные кривые уравнения

$$(x - y^2)y' - (2x + 1)y + y^2 = -x^2,$$

даже если они и являются алгебраическими, имеют порядок, большей 9:

```
sage: p=(2*x+1)*y-y^2-x^2
sage: q=-x+y^2
sage: D=lambda phi: q*diff(phi,x) -p*diff(phi,y)
sage: lagutinski_det_random(R,D,B,55)==0
False
```

Часто отыскать уравнения интегральных кривых больших порядков помогает теория интегрирующего множителя, см. пример 17.

2.3. Задача, в которой порядок искомого интеграла не задан

В формулировке задачи 3 явно требуется задание границы N для порядка искомых многочленов должна быть задана. Однако в классической парадигме интегрирования дифференциальных уравнений большое значение уделяли выяснению вопроса о существовании алгебраического интеграла произвольной степени.

Задача 5 (задача Дебона). Выяснить, допускает ли заданное дифференциальное уравнение (1) интеграл u в поле $\mathbb{Q}(x, y)$, и в случае утвердительного ответа выписать этот интеграл.

В теории оценка сверху для порядков интегралов заданного дифференцирования позволила бы свести эту задачу предыдущей. Однако с XVII века предпринимались многочисленные попытки нахождения оценок сверху для порядков интегралов заданного дифференциального уравнения, тем не менее эта проблема не решена и в то же время не доказана и ее алгоритмическая неразрешимость. Оценки, полученные Пуанкаре в [12] на стр. 35-95, применимы лишь в некоторых частных случаях [1], стр. 181. Во всех современных реализациях алгоритмов отыскания рациональных интегралов дифференциальных уравнений 1-го порядка порядок интеграла полагают заданным [13].

2.4. Задача о малочленах

С практической точки зрения решение задачи 3 при больших N малоинтересно: решение в виде алгебраического уравнения, содержащего несколько сотен слагаемых, обладает многими недостатками, в теории характерными только для решений в степенных рядах. Поэтому интересны не какие угодно рациональные интегралы, но представимые в виде компактном виде, то есть в виде отношения малого числа слагаемых (малочленов) или в виде произведения больших степеней нескольких многочленов небольшой степени. Обсудим обе эти возможности.

Задача 6 (задача Дебона о малочленах)**.** Выяснить, допускает ли заданное дифференциальное уравнение (1) интеграл в поле $\mathbb{Q}(x, y)$, числитель и знаменатель которого является линейной комбинацией M мономов, порядки которых не превосходят заданного числа N, и в случае утвердительного ответа выписать этот интеграл.

При решении этой задачи по методу Лагутинского требуется вычислить много не связанных друг с другом определителей M-го порядка и выяснить, равен ли из них хоть один нулю или нет, эта процедура допускает естественное распараллеливание. Эта идея реализована в виде функции lagutinski_micronomial(R,D,B,N,M), которая возвращает интеграл, представимый в виде отношения малочленов, если таковой существует.

Пример 9. Выясним, допускает ли заданное дифференциальное уравнение

$$(3x^4 + 2y)xdy - (5x^4 + y)ydx = 0$$

интеграл, числитель и знаменатель которого является линейной комбинацией трех мономов, а порядок интегральных кривых не превосходит $n = 5$. В этом случае порядок интеграла ограничен числом $N = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$.

```
sage: p=-(5*x^4 + y)*y
sage: q=(3*x^4 + 2*y)*x
sage: D=lambda phi: q*diff(phi,x) -p*diff(phi,y)
```

Функция lagutinski_micronomial находит интеграл

```
sage: lagutinski_micronomial(R,D,B,21,3).factor()
y^-3 * x * (x^4 + y)
```

на современном компьютере примерно за 20 секунд.

Задача 7 (вторая о малочленах)**.** Выяснить, допускает ли заданное дифференциальное уравнение (1) интеграл в поле $\mathbb{Q}(x, y)$, представимый в виде произведения некоторых степеней многочленов, порядок которых не превосходит заданного числа M, и в случае утвердительного ответа выписать этот интеграл.

Если интеграл представим в виде

$$f_1^{n_1} \dots f_r^{n_r}, \quad n_i \in \mathbb{Z}, f_i \in \mathbb{Q}[x, y],$$

то $f_1, \dots, f_r$ являются многочленами Дарбу. В силу теоремы 2 все многочлены Дарбу, порядок которых меньше M, можно отыскать как делители Δ_M.

Замечание 4. Теоремы Дарбу [9] утверждает, что интеграл такого вида обязательно существует, если имеется достаточное число многочленов Дарбу.

Пример 10. Как было показано выше в примере 4, дифференциальное уравнение

$$(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5$$

вероятно имеет интеграл 28 порядка, однако вычисление миноров 27 порядка представляет в данном случае весьма ресурсоемкую задачу. Вместо того, чтобы решать ее, выясним, можно ли представить интеграл в виде произведения степеней линейных функций. Найдем все линейные многочлены Дарбу:

```
sage: p=2*x+3*y-5
sage: q=-x-4*y
sage: D=lambda phi: q*diff(phi,x) -p*diff(phi,y)
sage: lagutinski_det(R,D,B,3).factor()
(10) * (-x + y + 5) * (x + 2*y - 2)
```

Подставив выражение

$$u = (-x + y + 5)^n (x + 2y - 2)^m$$

в уравнение $Du = 0$, получим однородное линейное уравнение для отыскания n, m, решением которого будет $n = 5, m = 1$. Как видно, интегральные кривые имеют 6-ой порядок, то есть $N = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$.

2.5. Интегрирование тестовых задач

Чтобы оценить возможности применения метода Лагутинского, обратимся к наиболее очевидному и простому источнику несложных дифференциальных уравнений — университетскому курсу «Дифференциальных уравнений», а именно к задачнику А.Ф. Филиппова [8].

Вычисление Δ_{55} в случайной точке (x, y) позволяет сразу выделить уравнения, интегральные кривые которых вероятно имеют порядок, не превышающий 9-ти. В учебном курсе, кончено, алгебраические кривые большого порядка не встречаются, поэтому таким путем мы выделяем все 21 уравнение, интегральные кривые которых являются алгебраическими. Для двух третей из них $\Delta_{10} = 0$ и поэтому они легко интегрируются по методу Лагутиского, см. пример 7. Из оставшихся 7 нумеров большинство удается проинтегрировать, повысив N.

Пример 11. Интегрирование уравнения № 198

$$xy^2(xy' + y) = 1$$

требует увеличения N до 25.

```
sage: q=x^2*y^2
sage: p=x*y^3-1
sage: D=lambda phi: q*diff(phi,x) -p*diff(phi,y)
sage: lagutinski_det(R,D,B,25)
0
sage: lagutinski_integral(R,D,B,25)
-x^3*y^3 + 3/2*x^2
```

В данном случае определитель 25-го порядка считается на удивление быстро.

Путем увеличения N не удается проинтегрировать лишь два номера — №№ 116 и 187, вычисления застревают на $N = 15$. Первое из этих уравнений, рассмотренное выше в примера 4 и 10, имеет интеграл, представимый в виде произведения степеней двух линейных функций. Интеграл второго уравнения оказывается четырехчленом, который за несколько минут находится при помощи функции `lagutinski_micronomial(R,D,B,N,M)`. Следует также заметить, что уравнение № 187 — уравнение в полных дифференциалах, поэтому указанный способ, конечно, является чрезвычайно неэкономным.

Проделанный вычислительный эксперимент подсказывает след. процедуру отыскания алгебраических интегральных кривых заданного дифференциального уравнения вида (1).

1) Вычислить Δ_{55} в случайно выбранной точке. Если $\Delta_{55} \neq 0$, то интегральные кривые имеют 10-й порядок и более или вовсе являются трансцендентными. Если $\Delta_{55} = 0$, то интегральные кривые вероятно имеют порядок, не превышающий 9-ти.

2) Если $\Delta_{55} = 0$, вычислить Δ_{10} как функцию x и y. Если Δ_{10} тождественно равен нулю, то интегральные кривые имеет порядок, не превышающий 3-х, и они находятся по методу Лагутинского без существенных затрат.

3) Если Δ_{10} не равно тождественно нулю, пытаться вычислить Δ_N, постепенно повышая N до тех пор, пока не получится нуль или исчерпаются ресурсы.

4) Если ресурсы исчерпались, следует попытаться найти интегралы среди малочленов.

3. Интегрирование в квадратурах

3.1. Интегрируемость в квадратурах

Символьное интегрирование остается в рамках классической парадигмы интегрирования в квадратурах, восходящей еще к Лейбницу и до сих пор доминирующей в элементарных курсах дифференциальных уравнений. Формализация этой парадигмы, восходящая к работам Лиувилля [14] и Д.Д. Мордухай-Болтовского [15, 16, 17], нуждалась во введении понятия элементарных функций, список которых обычно считают предметом договора [18]. Избавить теорию от упоминая упоминания об элементных функций можно при помощи P-интегралов Вольтерра.

Определение 3. Если дифференциальная 1-форма

$$udx + vdy$$

является точной, то выражения

$$\mathrm{S}(udx+vdy)=\lim\sum(u_n\Delta x+v_n\Delta y)=\int udx+vdy$$

и

$$\mathrm{P}(1+udx+vdy)=\lim\prod(1+u_n\Delta x+v_n\Delta y)=e^{\int udx+vdy}$$

можно считать функциями переменных x, y.

P-интеграл является столь же естественным обобщением произведения, как обычный S-интеграл — обобщением сложения, экспонента — трансцендентная функция, связывающая эти два интеграла.

Определение 4. Будем говорить, что зависимость z от переменных x, y можно выразить при помощи квадратур, если z можно представить как алгебраическую функцию переменных x, y и вспомогательных функций $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ переменных x, y, каждая из которых выражается при помощи квадратуры из предыдущих:

$$\alpha_i=\mathrm{S}\left(f_i(x,\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1})dx+g_i(x,\ldots)dy\right)$$

или

$$\alpha_i=\mathrm{P}\left[1+f_i(x,\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1})dx+g_i(x,\ldots)dy\right],$$

где f_i, g_i — алгебраические функции своих аргументов.

Пример 12. Функция x^y представима при помощи квадратур, поскольку

$$x^y=\exp(y\ln x)=\exp\int(\frac{ydx}{x}+\ln xdy)=$$
$$=\mathrm{P}\left[1+\frac{ydx}{x}+\mathrm{S}\left(\frac{dx}{x}\right)\cdot dy\right].$$

Определение 5. Будем говорить, что дифференциальное уравнение (1) интегрируется при помощи n квадратур, если оно имеет однопараметрическое семейство интегральных кривых, заданных уравнением

$$F(\alpha_n,\alpha_{n-1},\ldots,x,y,C)=0,$$

левая часть которого является алгебраический функцией x, y и квадратур $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Задача 8 (об интегрировании в квадратурах)**.** Выяснить, интегрируется ли заданное уравнение (1) в квадратурах; в случае утвердительного ответа выписать эти квадратуры.

Теорема 4. Если дифференциальное уравнение (1) интегрируется при помощи конечного числа квадратур, то оно допускает интегрирующий множитель среди P-интегралов вида

$$\mu = \mathrm{P}(1 + udx + vdy) = e^{\int udx+vdy}, \tag{2}$$

где $udx + vdy$ — точная дифференциальная форма, коэффициенты u и v принадлежат полю $\mathbb{Q}(x, y)$.

Эта теорема может быть доказана элементарными средствами времен Лиувилля и представляет собой вариацию на тему теоремы об интегрирующем множителе, доказанной М. Зингером [19]; сама возможность элементарного доказательства теоремы Зингера была отмечена в [20].

Теорема 5. Дифференциальное уравнение (1) интегрируется при помощи конечного числа квадратур, в том и только в том случае, когда дифференцирование

$$D_v = q^2\frac{\partial}{\partial x} - pq\frac{\partial}{\partial y} + \left(vq^2\frac{\partial}{\partial y}\frac{p}{q} + q^2\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{q}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right)\right)\frac{\partial}{\partial v} \tag{3}$$

кольца $\mathbb{Q}[x, y, v]$ допускает многочлен Дарбу F, линейный относительно v. Зная один такой многочлен, можно найти u и v из СЛАУ

$$\begin{cases} pv - qu + \dfrac{\partial p}{\partial y} - \dfrac{\partial q}{\partial x} = 0, \\ F(x, y, v) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

и вычислить интегрирующий множитель по формуле (2).

Теорема 5 сводит исследование интегрируемости дифференциального уравнения в квадратурах к задаче об отыскании многочленов Дарбу.

Задача 9 (об отыскании многочлена Дарбу)**.** Для заданной тройки R, D, B отыскать все неприводимые многочлены Дарбу.

Эта задача, однако, отличается от решенной выше задачи 2 тем, что в ней не задана граница для порядка. В настоящее время не известны алгоритмы решения этой задачи даже для случая $R = \mathbb{Q}[x, y]$ [9].

Метод Лагутинского позволяет легко отыскивать все многочлены Дарбу, являющиеся линейными комбинациями первых N из набора B мономов

$$1, x, y, v, xv, yv, \dots,$$

линейных по v. Функция `lagutinski_uv(R,p,q,N)` из пакета Lagutinski отыскивает все такие многочлены и, если таковые нашлись при заданном N, возвращает u и v.

Пример 13. Рассмотрим уравнение Бернулли

$$\frac{dy}{dx} = y + \frac{x}{y}$$

или

$$(x + y^2)dx - ydy = 0.$$

Имеем

```
sage: R.<x,y,v> = PolynomialRing(QQ,3)
sage: lagutinski_uv(R,(x+y^2),-y,2)
[[-2, 0]]
```

Отсюда

$$\mu = \exp \int -2dx = e^{-2x};$$

и ответ дается квадратурой

$$\int e^{-2x} \left[(x + y^2)dx - ydy\right] = C.$$

3.2. Интегрирование тестовых задач

Задавшись на удачу числом N, попытаемся проинтегрировать уравнения № 301-331 из задачника А.Ф. Филиппова. Среди этих уравнений 20 имеют вид (1), 18 из 20 уравнений интегрируются при $N = 4 \div 5$.

Замечание 5. Все упомянутые задачи интегрируются в элементарных функциях и поэтому в теории должны просто решаться по алгоритму Преля-Зингера [9]. Обобщение этого алгоритма было реализовано в виде пакета Lsolver [21, 22] под Maple, обсуждение его возможностей выходит за рамки настоящей статьи.

Пример 14. Уравнение № 308 интегрируется при $N = 5$

$$x^2y' = y(x + y).$$

```
sage: R.<x,y,v> = PolynomialRing(QQ,3)
sage: lagutinski_uv(R,-y*(x+y),x^2,5)
[[(-1)/x, (-2)/y]]
```

$$\mu = \exp - \int \frac{dx}{x} + \frac{2dy}{y} = e^{-\ln(xy^2)} = \frac{1}{xy^2}$$

и ответ дается квадратурой

$$\int \frac{-y(x + y)dx + x^2dy}{xy^2} = C,$$

которая в данном случае берется в элементарных функциях.

Оба оставшихся номера приметны тем, что определители Лагутинского 12-го порядка для них обращаются в нуль, поэтому имеется бесконечно много многочленов Дарбу, а следовательно и вариантов для v.

Пример 15. Уравнение № 327

$$\frac{y - xy'}{x + yy'} = 2$$

В этом примере определители считаются очень быстро и ответ получается при $N = 12$.

```
sage: R.<x,y,v> = PolynomialRing(QQ,3)
sage: lagutinski_uv(R,2*x-y,2*y+x,12)
[[(-y)/(x^2 + y^2), x/(x^2 + y^2)], [(2*x - 3*y)/(2*
  x^2 + 2*y^2), (3*x + 2*y)/(2*x^2 + 2*y^2)]]
```

3.3. Практическое определение порядка N

Проделанный вычислительный эксперимент подсказывает, что для интегрирования заданного дифференциального уравнения как правило достаточно взять очень небольшое $N = 4 \div 5$. Если заранее не известно, что уравнение интегрируется в квадратурах, то возникает вопрос о том, стоит ли тратить ресурсы на повышение N. Для задачи Дебона 5 был указан быстрый практический способ подбора N — вычисление определителя Лагутинского Δ_N в случайной точке, см. пример 8. Та же идея может быть использована и при подборе N при отыскании линейных по v многочленов Дарбу.

Численные эксперименты учат, что в общем случае последовательность определителей Лагутинского $\Delta_N, \Delta_{N+1}, \dots$ не имеет общего непостоянного делителя. В особом же случае, когда имеется многочлен Дарбу N-го порядка, все эти определители делятся на него нацело в силу теоремы 2. Если взять две случайные точки (x_0, y_0, v_0) и (x_0, y_0, v_1) и вычислить значения $\Delta_N, \Delta_{N+1}, \Delta_{N+2}$ в этих двух точках, то разложения на множители

$$\gcd(\Delta_N(x_0, y_0, v_0), \Delta_{N+1}(x_0, y_0, v_0), \dots), \quad \gcd(\Delta_N(x_0, y_0, v_1), \Delta_{N+1}(x_0, y_0, v_1), \dots)$$

в общем случае совпадают, в особом же случае появятся различные множители. Функция `lagutinski_uv_random(R,p,q,N)` возвращает разложение такой пары чисел. Трудность идентификации особого случая в том, что степень 2, 3 и 5 может меняться и в общем случае.

Пример 16. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(x+1)ydx - (x - xy - y^2 + x^2)dy = 0,$$

которое имеет интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{e^{x/y}}{(x+y)^2} = e^{\frac{x}{y} - 2\ln(x+y)} = e^{\int \frac{ydx - xdy}{y^2} - 2\int \frac{dx+dy}{x+y}},$$

найденные в [21] из тех соображений, что $x+y$ — многочлен Дарбу. Для нашего подхода уравнение очень трудное, поскольку v является многочленом, содержащим третьи степени x и y, то есть $N \simeq 20$. Применяя предложенный выше тест, имеем:

```
sage: R.<x,y,v> = PolynomialRing(QQ,3)
sage: lagutinski_uv_random(R,(x + 1)*y, - (x - x*y - y^2 + x^2),13)
[2^333 * 3^41 * 7^19 * 29^72, 2^321 * 3^39 * 7^19 * 29^72]
sage: lagutinski_uv_random(R,(x + 1)*y, - (x - x*y - y^2 + x^2),13)
[2^258 * 3^9 * 29^13 * 577^72, 2^267 * 3^9 * 5 * 29^13 * 577^72]
sage: lagutinski_uv_random(R,(x + 1)*y, - (x - x*y - y^2 + x^2),17)
[2^60 * 3^9 * 7^163 * 17^21 * 29^32 * 677^129, 2^60 * 3^9 * 5 * 7^163 * 17^21 * 29^32 * 677^129]
sage: lagutinski_uv_random(R,(x + 1)*y, - (x - x*y - y^2 + x^2),17)
[2^70 * 3^313 * 7^32 * 29^129 * 41^21 * 47^129, 2^60 * 3^314 * 7^32 * 29^129 * 41^21 * 47^129]
sage: lagutinski_uv_random(R,(x + 1)*y, - (x - x*y - y^2 + x^2),18)
[2^480 * 3^11 * 7^145 * 13^290 * 19^38 * 31 * 61 * 163^23 * 2503, 2^480 * 3^14 * 7^145 * 13^290 * 19^38 * 163^23 * 229 * 30187]
sage: lagutinski_uv_random(R,(x + 1)*y, - (x - x*y - y^2 + x^2),18)
[2^441 * 3^63 * 17 * 59^23 * 3049^145 * 49157, 2^440 * 3^63 * 59^23 * 3049^145 * 1464373]
```

Хорошо видно, что многочлен Дарбу может появиться при $N = 18$.

Было бы крайне желательно выяснить геометрический смысл числа N и заменить задачу 8 на задачу с заданным N.

3.4. Применение теории интегрирующего множителя к решению задачи Дебона

В тех случаях, когда решение задачи Дебона требует вычисления определителей слишком большого порядка, вычисление интегрирующего множителя часто не представляет никакого труда.

Пример 17. Рассмотрим уравнение

$$(5x^4 + y)ydx + (3x^4 + 2y)xdy = 0$$

Выясним, допускает ли это уравнение интегральные кривые порядка 9 или меньше:

```
sage: R.<x,y> = PolynomialRing(QQ,2)
sage: D=lambda phi: (3*x^4+2*y)*x*diff(phi,x) -(5*x^4+y)*y*diff(phi,y)
sage: B= sorted(((1+x+y)^30).monomials(),reverse=0)
sage: lagutinski_det_random(R,D,B,55)==0
False
```

Раз определитель не равен нулю тождественно, то не допускает. Попытается выяснить, интегрируется ли это уравнение в квадратурах:

```
sage: R.<x,y,v> = PolynomialRing(QQ,3)
sage: lagutinski_uv(R,(5*x^4+y)*y,(3*x^4+2*y)*x,6)
[[10/7/x, 20/(7*y)]]
```

Отсюда

$$\ln\mu = \frac{10}{7}\int \frac{dx}{x} + \frac{2dy}{y} = \frac{10}{7}\ln(xy^2)$$

и поэтому

$$\mu = x^{10/7}y^{20/7}.$$

Отсюда уравнение интегральных кривых дается квадратурой

$$\int (5x^4 + y)x^{10/7}y^{20/7+1}dx + (3x^4 + 2y)x^{10/7+1}y^{20/7}dy = C,$$

эта квадратура берется в радикалах. Теоретически рационализация должна привести к рациональному интегралу, однако выполнить ее на практике весьма непросто.

4. Заключение

Проделанные вычислительные эксперименты показывают, что метод Лагутинского предлагает целый спектр средств для исследования интегральных кривых дифференциального уравнения в алгебраических функциях и квадратурах, среди них есть быстрые, как напр., способ быстро прикинуть, являются ли интегральные кривые заданного дифференциального уравнения алгебраическими кривыми заданного порядка, так и весьма затратные.

Благодарности. Исследование выполнено в рамках соглашения № 02.a03.21.0008 от 24.04.2016 г. между Министерством образования и науки Российской Федерации и Российским университетом дружбы народов. Работа поддержана грантом РФФИ № 16-07-00556.

Список литературы

[1] Лагутинский М.Н. Приложение полярных операций к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений в конечном виде. // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. 1911. Т. 12. Стр. 111-243.

[2] Лагутинский М.Н. О некоторых полиномах и связи их с алгебраическим интегрированием обыкновенных дифференциальньных алгебраических уравнений. // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. 1912. Т. 13. Стр. 200-224.

[3] *C. Christopher, J. Llibre, and J. Vitório Pereira.* Multiplicity of invariant algebraic curves in polynomial vector fields. // Pacific J. Math. 2007. Vol. 229. № 1. P. 63–117.

[4] *Chèze G.* Computation of Darboux polynomials and rational first integrals with bounded degree in polynomial time // Journal of Complexity. 2011. Vol. 27. № 2. P. 246-262.

[5] *Малых М.Д.* Об отыскании рациональных интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений по методу М.Н. Лагутинского // Вестник НИЯУ МИФИ, 2016. Том 5, № 3. С. 35-44.

[6] *Stein W. A. et al.* Sage Mathematics Software (Version 7.1). The Sage Development Team, 2016. `http://www.sagemath.org`.

[7] Добровольский В.А., Стрельцын Ж., Локоть Н.В. Михаил Николаевич Лагутинский (1871 – 1915). // Историко-математические исследования. 2001. Т. 6 (41). Стр. 111-127

[8] *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. R&C, 2000.

[9] *Гориэли А.* Интегрируемость и сингулярность. R&C, 2006.

[10] *Zoladek H.* Algebraic invariant curves for the Liénard equation. // Trans. Am. Math. Soc. 1998. V. 350. P. 1681-1701.

[11] Декарт Р. Геометрия с приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта. Москва-Ленинград: ГОНТИ НКТП СССР, 1938.

[12] *Poincaré H.* Œuvres, volume 3. Gautier, Paris, 1934.

[13] *Bostan A., Chéze G., Cluzeau T. and Weil, J.-A.* Efficient Algorithms for Computing Rational First Integrals and Darboux Polynomials of Planar Polynomial Vector Fields // To appear in Mathematics of Computation, 2015. arXiv e-print (arXiv:1310.2778).

[14] *Г.Н. Ватсон.* Теория бесселевых функций. Часть первая. М.: Издательство иностранной литературы, 1949.

[15] *Д.Д. Мордухай-Болтовской.* Общие исследования, относящиеся к интегрированию в конечном виде дифференциальных уравнений первого порядка, статья I. // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер., 1907, т.10. С. 34–64.

[16] *Д.Д. Мордухай-Болтовской.* Общие исследования, относящиеся к интегрированию в конечном виде дифференциальных уравнений первого порядка, статья II. Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер., 1907, т. 10. С. 231–270.

[17] *Prelle M. J. and Singer M. F.* Elementary first integrals of differential equations. // Trans. Amer. Math. Soc., 1983. Vol. 279, № 1. P. 215–229.

[18] *J.M. Borwein* and *R.E. Crandall.* Closed Forms: What They Are and Why We Care // Notices of the AMS. Vol. 60, Number 1. January 2013. Pag. 50-65.

[19] *Singer M.F.* Liouvillian first integrals of differential equations. // Trans. Amer. Math. Soc., 1992. Vol. 333, № 2. P. 673–688.

[20] *Junzhi Lei.* Nonlinear differential Galois theory. // Arxiv:0608492v2, 2011.

[21] *J. Avellar, L.G.S. Duarte, S.E.S. Duarte, and L.A.C.P. da Mota.* Determining Liouvillian first integrals for dynamical systems in the plane. // Computer Physics Communications, 2007, vol. 177, no. 7. P. 584–596.

[22] *J. Avellar, L.G.S. Duarte, S.E.S. Duarte, and L.A.C.P. da Mota.* Lsolver (Version 2.0). Computer Physics Communications Program Library, 2013. `http://cpc.cs.qub.ac.uk`.