Вестник национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», 2016, том 5, No 2, с. 152–161.
УДК 517.9

О дифференциальных уравнениях, общее решение которых является алгебраической функцией константы.

М.Д. Малых* **.
*ФНМ МГУ, **РУДН.
E-mail: malykhmd@yandex.ru.

Поступила в редакцию 03.12.2015 г.

Аннотация

Рассмотрен вопрос о численном и аналитическом интегрировании дифференциального уравнения 1-го порядка $y' = f(x, y)$ с рациональной по y правой частью в предположении, что его общее решение является алгебраической функцией константы. Большинство дифференциальных уравнений, интегрируемых явно в элементарных курсах, принадлежит этому классу. Его изучение в общем виде было начато в первых работах Пенлеве как альтернатива тому, что теперь называют свойством Пенлеве, однако затем надолго заброшено. С аналитической точки зрения эти уравнения замечательны тем, что алгебраической заменой их всегда можно свести к уравнению Риккати (Пенлеве, 1890 г.); более того, сказанное является естественным завершением элементарной теории интегрирования дифференциальных уравнений. С вычислительной точки зрения они замечательны тем, что для них можно построить разностные схемы, которые позволяют проходить подвижные особые точки решения без заметного накопления ошибки.

Ключевые слова: свойство Пенлеве, разностные схемы, дробно-линейное преобразование, решение в конечном виде.

1. Введение

Работы Поля Пенлеве, выполненные в 90-х годах XIX века, определили направление развития аналитической теории дифференциальных уравнений в XX веке, с тех пор достигнут замечательный прогресс как в отыскании новых дифференциальных уравнений, обладающих свойством Пенлеве, так и в построении теории трансцендентных Пенлеве, представляющих решения шести дифференциальных уравнений второго порядка, обладающих свойством Пенлеве и не сводящихся к ранее проинтегрированным [1],[2],[3]. Задача об отыскании дифференциальных уравнений, обладающих тем свойством, которое теперь называют в честь Пенлеве, возникла во второй половине XIX века в связи с задачей об отыскании «аналитического решения» обыкновенных дифференциальных уравнений. Со временем эта связь утерялась, а вместе с ней и целый ряд алгебраических идей Пенлеве, которые, по всей видимости, могут быть очень полезны для интегрирования дифференциальных уравнений в конченом виде средствами систем компьютерной алгебры. Для простоты и обозримости речь пойдет об уравнениях 1-го порядка с рациональной правой частью.

В XIX веке разложения в степенной ряд рассматривали как эффективный метод интегрирования дифференциальных уравнений, метод конечных разностей стал стандартом при численном решении дифференциальных уравнений лишь в XX веке во многом благодаря развитию вычислительной техники [4]. Линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = p(x) + q(x)y,$$

коэффициенты которого не имеют особенностей на x-плоскости, допускает представление общего решение в виде всюду сходящегося ряда по степеням x, однако в силу теоремы Реллиха [5] общее решение нелинейного уравнения никогда не представимо в таком виде. Уравнение Риккати

$$\frac{dy}{dx} = p(x) + q(x)y + r(x)y^2 \tag{1}$$

допускает представление общего решения в виде отношения всюду сходящихся степенных рядов. Поскольку это представление справедливо при всех x и теоретически дает возможность вычислить частное решение при любых фиксированных значениях x с любой заданной точностью, полученную таким путем формулу часто считают аналитическим решением, не требующим каких-либо дополнительных изысканий. На практике вычислительные ресурсы ограничены и поэтому ожидаемая точность вычислений может потребовать невообразимых даже сейчас ресурсов.

Пример 1. Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + x^2 \tag{2}$$

подстановкой

$$y = -\frac{z'}{z}$$

сводится к линейному уравнению

$$z'' + x^2 z = 0;$$

общее решение этого уравнения легко пишется в цилиндрических функциях

$$z = c_1\sqrt{x}J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right) + c_2\sqrt{x}J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Поэтому решение уравнения (2) можно представить в виде двух всюду сходящихся рядов по степеням x. Несмотря на сходимость, при значениях аргумента, больших 30, эти ряды бесполезны, поскольку члены ряда выходят за разрядную сетку даже на современных арифмометрах. В данном случае это не создает большой проблемы, поскольку известна асимптотика функции Бесселя при больших значения аргумента, они и применяются для вычисления функций Бесселя на ЭВМ [6].

Выяснить, какие дифференциальные уравнения допускают общее решение такого вида, помогает анализ особенностей: особые точки частных решений должны быть полюсами. Для теоретических изысканий оказалось удобным работать в предположениях, чуть более общих, чем это было сделано выше: пусть правая часть дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{3}$$

является рациональной функцией y, коэффициенты которых — аналитические функции x, имеющие некоторые особые точки. Общее решение линейного уравнения может иметь особые точки там, где особенность имеют коэффициенты p и q. Эти особые точки общего решения не зависят от константы и потому их называют неподвижными. Приняв это соглашение, можно сказать, что линейное уравнение не имеет подвижных особых точек, а уравнение Риккати — подвижных точек, отличных от полюсов. Это свойство дифференциального уравнения теперь называют свойством Пенлеве.

В 1880-х годах Лазарус Фукса доказал обратное утверждение.

Теорема 1 (Лазаруса Фукса; [7])**.** Дифференциальное уравнение (3) обладает свойством Пенлеве тогда и только тогда, когда оно является уравнением Риккати. При этом линейное уравнение рассматривается как частный случай уравнения Риккати.

С точки зрения классификации изолированных особых точек аналитических функций, следующим по сложности после полюса типом особенности является алгебраическая особая точка. Напомним, что точка $x = a$ называется алгебраической особой точкой аналитической функции $f(x)$, если в некоторой окрестности этой точки функцию можно представить рядом по дробным степеням $x - a$, такой ряд называют рядом Пюизё [8]. Еще Эйлер и Лагранж с успехом раскладывали в такие ряды решения дифференциальных уравнений [9],[4]. Было бы естественно перейти от уравнений, подвижные особые точки которых являются полюсами, к уравнениям, подвижные особые точки которых являются алгебраическими. Пенлеве, однако, удалось доказать, что подвижные особые точки дифференциального уравнения 1-го порядка всегда являются алгебраическими [10], [7], [11], n.7-11, поэтому по локальным свойствам зависимости решения от x далее невозможно выделить новый класс дифференциальных уравнений, которые бы можно было бы решить аналитически. Именно по этой причине в XX веке было сделано так много для отыскания однозначных решений уравнений n-го порядка [12] и так мало для отыскания многозначных решений уравнения 1-го порядка.

Заметим, что свойство Пенлеве не сохраняется при алгебраических преобразованиях переменных, а такие преобразования делаются при решении дифференциальных уравнений весьма часто. Желая избавиться от этого недостатка, Пенлеве в своей первой большой работе, посвященной аналитической теории дифференциальных уравнений, выделил новый класс дифференциальных уравнений — дифференциальные уравнения, общее решение которых зависит от константы алгебраически.

Теорема 2 (Пенлеве, 1890; [13])**.** Общее решение дифференциального уравнения (3) зависит от константы алгебраически тогда и только тогда, когда оно алгебраической заменой сводится к уравнению Риккати.

Свойство Пенлеве говорит о зависимости общего решения от x, а это новое свойство — о зависимости от константы и поэтому можно сказать, что оно «двойственно» свойству Пенлеве. Сравнив теоремы Фукса и Пенлеве, имеем: для дифференциальных уравнений свойство общего решения зависеть от константы алгебраически и то его свойство, которое теперь называют свойством Пенлеве, эквивалентны.

В своих знаменитых Стокгольмских лекциях [10] Пенлеве дал обобщение этой теоремы на случай уравнений, неразрешенных относительно производной и уравнений 2-го порядка. Однако среди уравнений 2-го порядка обнаружились такие, общие решения которых можно представить в виде отношения двух всюду сходящихся степенных рядов, но зависимость которых от константы, по всей видимости,является трансцендентной. Таково, напр., уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6y^2 + x$$

общее решение которого можно представить как

$$y = -\frac{d^2 \ln z}{dx^2},$$

где z — целая трансцендентная функция x [7], гл. III, §7. Теперь решение этого уравнения называют первой трансцендентой Пенлеве. Современниками сказанное было воспринято как доказательство неэлементарности этой новой трансцендентной функции и подвергнуто с этой точки зрения критике [14]. Тогда казалось, что поиск новых дифференциальных уравнений высших порядков сулит скорое решение большого числа механических задач, для которых отношения степенных рядов будут играть ту же роль, которую степенные ряды играют для экспоненты [15], [16]. По всей видимости между последней работой Пенлеве [17], в которой были внесены важные правки в первоначальное изложение, и работами Хироши Умемуры [14], то есть между 1908 и 1990 годами, исследованию дифференциальных уравнений, обладающих двойственным свойством Пенлеве, не было посвящено ни одного исследования.

Между тем, двойственное свойство Пенлеве интересно тем, что оно — чисто алгебраическое, стало быть оно дает возможность построения чисто алгебраической теории классических трансцендентных функций, к которым мы относим все трансцендентные функции, кроме трансцендентных Пенлеве. Хироши Умемура дал современное изложение этих изысканий Пенлеве, представив их как версию дифференциальной теории Галуа. Впрочем, не трудно заметить, что эта теория весьма отличается от стандартной теории Галуа для нелинейных уравнений, берущей свое начало в работах Лиувилля [18]: здесь список трансцендентных функций не требуется фиксировать заранее — он получается сам собой из чисто алгебраических соображений. В [19],[20] была предпринята попытка подчеркнуть это ее своеобразие, теперь же на примере уравнения первого порядка мы хотим показать, чем двойственное свойство Пенлеве может быть полезно для аналитического и численного решения дифференциальных уравнений 1-го порядка.

2. Рациональные интегралы дифференциальных уравнений, общее решение которых зависит от константы алгебраически

Предположение о том, что общее решение дифференциального уравнения зависит от константы алгебраически, может быть сформулировано различными способами, эквивалентность которых не бросается в глаза. Проще всего принять сразу, что дифференциальное уравнение (3) допускает интеграл

$$r(x,y) = a_0(x)\frac{y^n + \cdots + a_n(x)}{y^n + \cdots + b_n(x)}, \tag{4}$$

коэффициенты которого являются какими угодно функциями x, мероморфными в окрестности какой-нибудь точки $x = a$ области G. Такое интеграл кратко будем называть рациональным, помня, что его коэффициентами могут быть трансцендентные функции x.

Можно, однако, подумать, что переход от общих решений к интегралу излишне сужает класс рассматриваемых уравнений. Сделаем как будто более общее предположение: пусть интегральные кривые дифференциального уравнения (3) можно записать как

$$g(x,y,c) = 0,$$

где g — многочлен относительного y и c, причем степень g по c больше первой, скажем, равна $m > 1$. В силу теоремы Коши через произвольную точку (x_0, y_0) проходит одна единственная дуга интегральной кривой, а с другой стороны из уравнения

$$g(x_0, y_0, c) = 0$$

можно отыскать m значений для c, а следовательно, и m интегральных кривых, проходящий через точку (x_0, y_0). Это кажется невозможным, но в действительности так может быть, напр., если

$$g(x,y,c) = g_0(x,y) + g_1(x,y)c^m$$

и поэтому всем m найденным значениям c отвечает одна и та же кривая семейства, если

$$g(x,y,c) = (g_0(x,y) + g_1(x,y)c)^m$$

и поэтому все m значений c оказываются равными, и если

$$g(x,y,c) = \prod_{i=1}^{m}(g_0(x,y) + g_1(x,y)(c-i))$$

и поэтому найденным значениям c отвечают различные составные интегральные кривые, имеющие общую компоненту, которая и проходит через точку (x_0, y_0). Множество всех функций, выражения для которых можно составить при помощи коэффициентов f, g и комплексных чисел, является полем, обозначим его буквой K. Поскольку отыскание общих множителей не выводит за поле K, можно быть уверенным в том, что для любой точки (x_0, y_0) найдется единственная проходящая через нее интегральная кривая

$$h(x, y) = 0,$$

заданная неразложимым многочленом из $K[y]$, такую кривую дальше будем называть неприводимой.

В алгебраической геометрии однопарметрическое множество кривых называют пучком. Если связь с параметром дается системой алгебраических уравнений, то пучок называют алгебраическим. Если к тому же через произвольную точку проходит одна единственная кривая, то пучок называют рациональным, а первейшая теорема теории пучков кривых на плоскости утверждает, что рациональный пучок является линейным, то есть параметр c можно выбрать таким образом, что кривые вырезаются на плоскости уравнением

$$g_0(x, y) + g_1(x, y)c = 0.$$

Предположение о том, что интегральные кривые образуют алгебраический пучок

$$g(x, y, c) = 0$$

в силу теоремы Коши неизбежно приводит к существованию рационального пучка интегральных кривых, а следовательно и линейного. В таком случае

$$\frac{g_1(x, y)}{g_0(x, y)}$$

является рациональным интегралом уравнения (3) и мы пришли к тому предположению, которое казалось более узким.

Замечание. Упомянутая теорема о линейных пучках обычно формулируется для алгебраических кривых, то есть в предположении, что g является многочленом и по x. Однако все построения легко переносятся на кривые, левые части которых принадлежат $K[y]$. На самом деле достаточно рассмотреть эти кривые как точки на проективной прямой $\mathbb{P}$ над K и воспользоваться безымянной теоремой, которая обычно предшествует доказательству теоремы Люрота, [21], п. 5: если на проективной прямой задан алгебраический ряд Σ групп, состоящих из n точек, причем общая точка прямой принадлежит одной единственной группе, то ряд Σ является линейным, то есть его группы можно описать при помощи уравнения вида

$$f(x) + \lambda g(x) = 0,$$

где f и g – заданные полиномы степени n, а λ – переменный параметр.

По всей видимости, любая другая трактовка предположения о том, что общее решение уравнения (3) зависит от константы алгебраически, ведет к существованию рационального интеграла $r(x, y)$, коэффициенты которого являются какими угодно функциями x, мероморфными в окрестности какой-нибудь точки $x = a$ области G.

3. Численное интегрирование дифференциальных уравнений, общее решение которых зависит от константы алгебраически

Как уже отмечалось выше, разложения в ряд не является эффективным решением дифференциальных уравнений. Maple открывает доступ в большую библиотеку высших трасцендент, при помощи которых в ряде случае общее решение частных уравнений Риккати удается выразить явно. Тем не менее, напр., несложное на вид уравнение

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + (x^3 + 3x + 1)y + x^2$$

решено не будет. Желая нарисовать графики частных решений этого уравнения, мы едва ли станем искать его решение в виде отношения степенных рядов. Вместо этого мы воспользуемся методом конечных разностей.

3.1. Интегрирование уравнения Риккати

Метод конечных разностей возник в работах Эйлера как раз в связи с уравнением Риккати, которое безуспешно пытались решить в квадратурах на протяжении всего XVIII века [22]. Чтобы отыскать решение начальной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y|_{x=0} = y_0 \end{cases} \tag{5}$$

методом конечных разностей, разобьем рассматриваемый интервал изменения переменой $x = x_0 ... h$ на отрезки с шагом Δx и вычислим приближенные значения $y = y_n$ решения задачи (5) для уравнения Риккати в точке $x_n = x_0 + n\Delta x$ по схеме

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = f(x_n, y_n),$$

именуемой теперь схемой Эйлера. Для сравнения на рис. 1 изображены точное решение задачи

$$y' = 1 + y^2, \quad y|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \tan x \tag{6}$$

и приближенное, найденное по схеме Эйлера. Точное решение имеет подвижный полюс при $x = \frac{\pi}{2}$, поэтому вычисления по схеме Эйлера мы вынуждены остановить на подходе к этой точке, причем точность при приближении к особой точке падает. Эйлер счел это фатальным недостатком метода.

> «Погрешность при этом вычислении происходит оттого, что на протяжении каждого отдельного промежутка обе переменные x и y сохраняющими свои значения, соответствующими началу этого

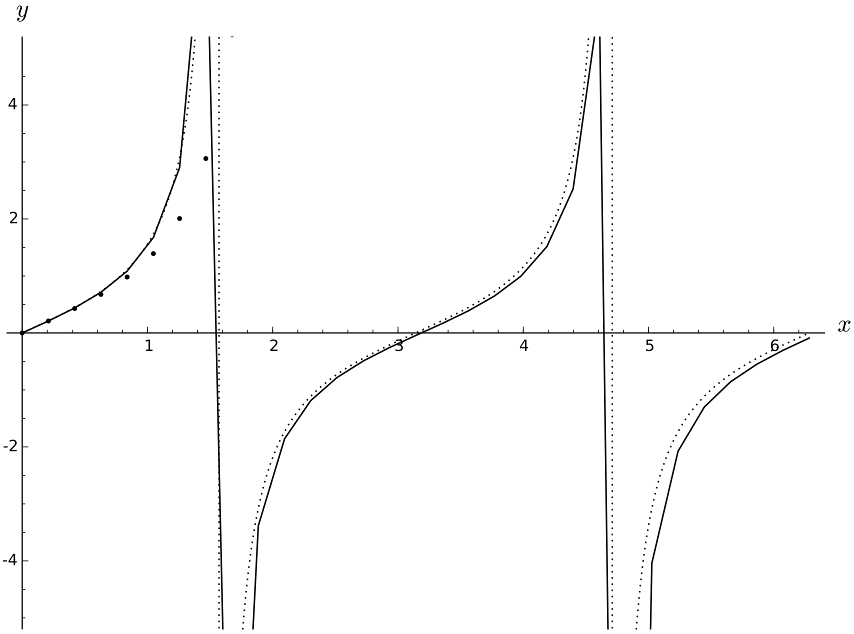

Рис. 1. Решения задачи (6): точное (пунктир), схема Эйлера (отдельные точки) и (1,1)-схема (сплошная).

> промежутка, так что и значение функции $f(x,y)$ остается постоянным, поэтому: чем быстрее значение этой функции меняется от одного промежутка к следующему, тем большую можно ожидать погрешность. Это невыгодное обстоятельство имеет место обыкновенно там, где значения $f(x,y)$ или уничтожаются, или же становятся бесконечно большими.» [4]

Это высказывание Эйлера было процитировано А.Н. Крыловым в его знаменитых Лекциях по приближенным методам (1911 год), спустя полторы сотни лет. Однако для уравнения Риккати упомянутое выше «невыгодное обстоятельство» не возникло бы вовсе, если бы с самого начала стояла задача правильно описать зависимость решения начальной задачи от y_0.

Как известно, общее решение уравнения Риккати является дробно-линейной функцией константы

$$y = \frac{\alpha(x)c + \beta(x)}{\gamma(x)c + \delta(x)}$$

и наоборот, всякое уравнение 1-го порядка, общее решение которого зависит от константы интегрирования дробно-линейно, является уравнением

Риккати. Чтобы подобрать c для решения начальной задачи, мы должны разрешить уравнение

$$y_0 = \frac{\alpha(x_0)c + \beta(x_0)}{\gamma(x_0)c + \delta(x_0)},$$

из которого c найдется как дробно-линейная функция y_0. Поскольку суперпозиция дробно-линейных преобразований опять является дробно-линейным, решение начальной задачи для уравнения Риккати является дробно-линейной функцией y_0, то есть

$$y = \frac{\alpha(x, x_0)y_0 + \beta(x, x_0)}{\gamma(x, x_0)y_0 + \delta(x, x_0)}.$$

Если фиксировать x и x_0, а начальное и конечное значения, то есть y_0 и y, вообразить как подвижные точки на двух проективных прямых, то можно сказать, что начальная задача задает связь между этими точками. Будем называть эти прямые начальным и конечным слоем, тогда можно сказать, что *начальная задача для уравнения Риккати задает проективное соответствие между начальным и конечным слоем*, причем это свойство выделяет уравнения Риккати из всех прочих дифференциальных уравнений вида (3).

Тем же путем сопоставим сетке $x_0, x_1, \dots$ семейство слоев, тогда начальная задача задает проективное соответствие между точкой y_0 на начальном слое и точкой y_n на n-м слое. При этом между двумя слоями устанавливается взаимно-однозначное соответствие, а схема Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + (p_n + q_n y_n + r_n y_n^2)\Delta x$$

нарушает это условие: заданному y_n отвечает одно значение y_{n+1}, но заданному y_{n+1} отвечают два значения y_n. За каждый шаг количество корней возрастает вдвое, поэтому заданному y_n отвечает 2^n значений y_0. Однако, минимальные поправки в схеме позволят сохранить тип зависимости от y_0:

$$y_{n+1} - y_n = (p_n + q_n y_n + r_n y_n y_{n+1})\Delta x \tag{7}$$

задает $(1,1)$-соответствие между соседними, а следовательно, и любыми слоями. С точки же зрения аппроксимации уравнения Риккати эта схема не лучше, и не хуже схемы Эйлера [23]. Однако решение задачи (6) по схеме Эйлера развалилось на подходе к подвижному полюсу при $x = \frac{\pi}{2}$, а решение найденное по схеме (7) проходит его без заметного накопления ошибки, см. рис. 1. Отмеченное свойство схемы (7) можно вывести, воспользовавшись сохранением ангармонического отношения четырех точек при проективных преобразованиях [24].

Стало быть, с вычислительной точки зрения уравнение Риккати «просто» не потому, что его решение можно представить в виде отношения двух рядов, и не потому, что его можно свести к линейному уравнению 2-го порядка. Дело же в том, что для уравнения Риккати можно построить разностную схему, которая точно передает дробно-линейный характер зависимости решения начальной задачи от y_0; вычисления по этой схеме можно продолжать через подвижные полюса без заметного накопления ошибок.

3.2. Интегрирование других уравнений

Допустим теперь, что уравнение (3) отлично от уравнения Риккати, но его общее решение зависит от константы алгебраически. Тогда это уравнение допускает рациональный интеграл r, а решение начальной задачи (5) дается уравнением

$$r(x, y) = r(x_0, y_0),$$

одной степени n относительно y и y_0, поэтому начальная задача задает проективное (n, n)-значное соответствие между слоями. Сказанное нисколько не противоречит теореме о единственности решения задачи Коши.

Пример 2. Интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{8}$$

представляют собой концентрические окружности

$$x^2 + y^2 = c.$$

При $x_0 \neq 0$ и любом конечном y_0 решение начальной задачи для (8) дается рядом

$$y = y_0 - \frac{x_0}{y_0}(x - x_0) + \ldots,$$

который можно продолжить на всю комплексную плоскость до двузначной аналитической функции

$$y = \sqrt{x^2 - x_0^2 - y_0^2}.$$

Среди разностных схем для (3) выделяются те, которые как и точное решение задают (n, n)-значное соответствие между слоями.

Пример 3. Схема Эйлера для уравнения (8) записывается так

$$y_i(y_{i+1} - y_i) = -x_i \Delta x$$

и поэтому задает $(1, 2)$-соответствие между соседними слоями. Как видно на рис. 2, решение, найденное по этой схеме, разваливается возле особой точки и начинает случайным образом «прыгать» с одной интегральной кривой на другую. Однако совсем нетрудно составить схему, задающую $(2, 2)$-соответствие между слоями, слегка симметризовав схему Эйлера:

$$\frac{y_{i+1} + y_i}{2}(y_{i+1} - y_i) = -x_i \Delta x.$$

Таким образом, дифференциальные уравнения, общие решения которых зависят от константы алгебраически, интересны тем, что для них всегда можно составить разностную схему, задающую (n, n)-значное соответствие между слоями, вычисления по которым можно продолжить за подвижные особые точки без заметного накопления ошибки.

Существование (n, n)-схемы доказать не трудно, ведь в теории можно взять интеграл r и принять формулы

$$r(x_i, y_i) = r(x_{i+1}, y_{i+1})$$

за формулы перехода от слоя к слою. Для практических же нужд важно разработать алгоритмы построения таких схем.

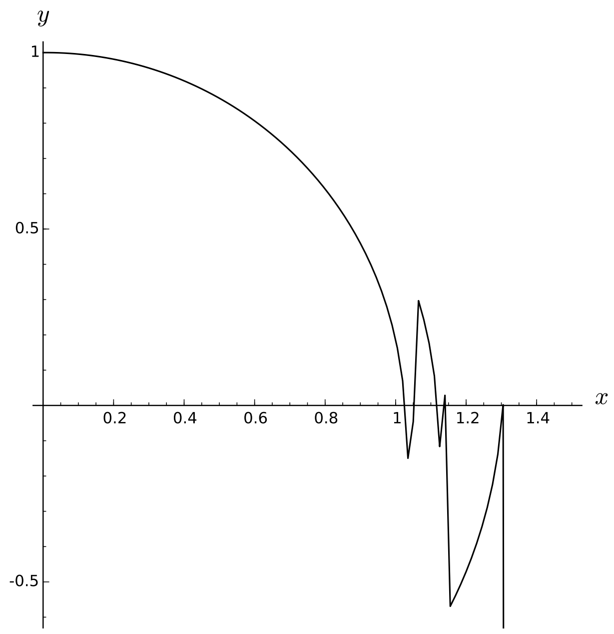

Рис. 2. Решение уравнения (8), найденное по методу Эйлера.

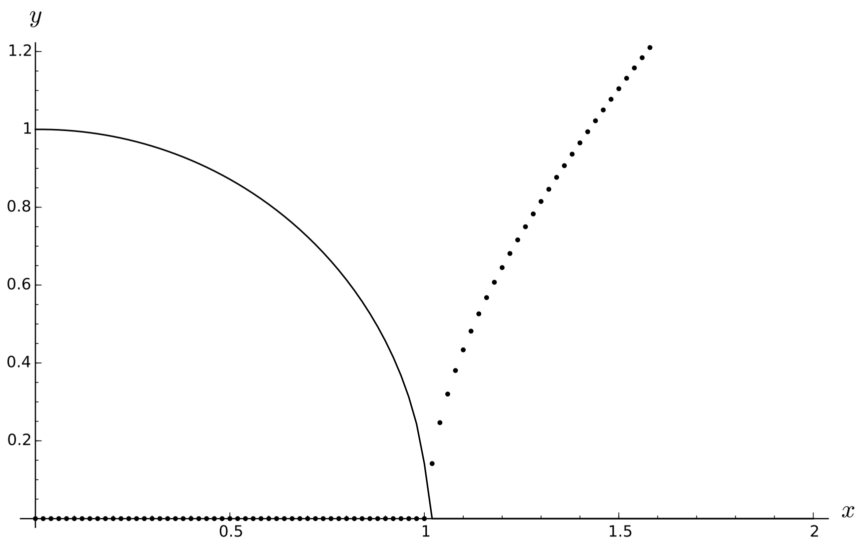

Рис. 3. Вещественная (сплошная) и мнимая части (точки) решения уравнения (8), найденного по (2,2)-схеме.

Замечание. При построении таких схем важно иметь ввиду, что (n, n)-значное соответствие получается между любыми двумя слоями. Каждый слой подразделяется на наборы по n точек в каждом, а уравнение перехода со слоя на слой задает взаимно-однозначное соответствие не между точками слоев, но между этими наборами. В терминологии Луиджи Кремоны [25], п. 21, на каждом слое задана инволюция n-го порядка, те сеть семейство $\mathfrak{J}$ подмножеств проективной прямой $\mathbb{P}$, каждое из которых составлено из n точек, обладающие тем свойством, что всякая точка из $\mathbb{P}$ принадлежит одному и только одному подмножеству семейства $\mathfrak{J}$. Однако вскоре во всеобщее употребление в проективной геометрии вошло представление об инволюции как о циклическом проективном преобразовании 2-го порядка [26], гл. 2, §6. Поводом к обоим названиям послужили сочинения Шаля по истории геометрии [27], прим. X, но второй вариант кажется более логичным. Если T — проективное преобразование второго порядка, то всевозможные пары (y, Ty) точек проективной прямой образуют подразделение прямой 2-го порядка, однако это лишь частный случай подразделения прямой. Поскольку проективное отображение сохраняет ангармоническое отношение четырех точек, для любых четырех точек $y_1, \ldots, y_4$ проективной прямой верно

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = (Ty_1, Ty_2, Ty_3, Ty_4)$$

и в частности

$$(y_1, y_2, y_3, Ty_3) = (Ty_1, Ty_2, Ty_3, T^2 y_3) = (Ty_1, Ty_2, Ty_3, y_3).$$

Это последнее равенство означает, что шесть точек $y_1, Ty_1, \ldots, Ty_3$ состоят в инволюции в том смысле, в котором этот термин использовали старые геометры [27], прим. X, п. 32. Следующее за Кремоной поколение итальянских геометров предпочитало более пространное описание $\mathfrak{J}$, говоря об «алгебраическом ряде групп, состоящих из n точек» [21], п. 5. Однако и это название не может теперь использоваться из-за неудачной коннотации с понятием группы.

4. Аналитическое интегрирование дифференциальных уравнений, общее решение которых зависит от константы алгебраически

Большинство уравнений 1-го порядка, которые интегрируют в элементарных курсах дифференциальных уравнений [28], и из них все наиболее популярные, обладают общим решением, зависящим от константы алгебраически, причем с точки зрения этой зависимости классификация элементарных методов интегрирования выглядит весьма просто. Простейший тип зависимости общего решения от константы — линейная зависимость:

$$y = \alpha(x)c + \beta(x);$$

исключение постоянной приводит к уравнению

$$\frac{dy}{dx} = p(x) + q(x)y,$$

которое называют линейным. Самая общая зависимость, при которой между y и c имеется взаимно-однозначное соответствие, — дробно-линейная:

$$y = \frac{\alpha(x)c + \beta(x)}{\gamma(x)c + \delta(x)},$$

исключение постоянной приводит к уравнению

$$\frac{dy}{dx} = p(x) + q(x)y + r(x)y^2,$$

которое называют уравнением Риккати, причем всякое дифференциальное уравнение такого вида имеет общее решение, зависящее от константы дробно-линейно. Уравнение Бернулли

$$\frac{dy}{dx} = q(x)y + r(x)y^n$$

доставляет пример уравнения, общее решение которого зависит от константы алгебраически, но не рационально, поскольку уравнение Бернулли сводится алгебраической заменой к линейному.

С этой точки зрения теорема 2 Пенлеве — естественное завершение элементарной теории интегрирования дифференциальных уравнений, которое для практики необходимо дополнить лишь разъяснениями относительно того, каким образом можно отыскать замену, существование которой гарантирует теорема.

Замечание. Г. Энештрём, написавший исторические комментарии к статьям в франко-германской Энциклопедии физико-математических наук, в т.ч и к статье Пенлеве, с удивлением отметил случаи, когда авторы XVIII века забывали добавлять константы в общее решение; более того, до Пуанкаре и Пенлеве вопрос о зависимости решения начальной задачи от начальных данных даже не ставился. До сих пор зависимость общего решения от x считается более важной по сравнению с зависимостью от константы, а изложенная выше элементарная теория интегрирования дифференциальных уравнений подается как набор на удачу открытых подстановок.

5. Заключение

Дифференциальные уравнения (3), общие решения которых зависит от константы алгебраически, обладают двумя замечательными свойствами:

- для их численного решения можно предложить разностные схемы, которые точно описывают зависимость от константы и поэтому проходят через подвижные особые точки без существенного накопления ошибки,
- для их аналитического решения всегда можно подобрать алгебраическую замену, сводящую их к уравнению Риккати.

Дело же стоит за разработкой алгоритмов построения таких схем и преобразований. При этом нельзя не заметить, что метод конечных разностей играет в теории уравнений, обладающих двойственным свойством Пенлеве, ту же роль, что метод разложения в степенной ряд в теории уравнений, обладающих свойством Пенлеве. В прошлом веке было принято противопоставлять аналитические и численные методы, однако методы, основанные на разложениях в степенных ряды, когда-то тоже были численными и лишь со временем были осмыслены как «аналитические». Можно надеяться, что метод конченых разностей удастся осмыслить как аналитический или даже алгебраический метод решения дифференциальных уравнений.

Замечание. В XX веке идея перенести свойство Пенлеве на разностые уравнения возникала несколько раз [3], последний — в 1990-х годах: Conte и Musette [29], стр. 901, предложили перенести определение свойства Пенлеве на разностные уравнения прямо: разностное уравнение

$$\Delta y = f(x, y, \Delta x)$$

обладает свойством Пенлеве, если оно допускает общее решение $y = f(x, \Delta x)$ в некоторой окрестности точки $\Delta x = 0$, зависимость которой от переменной x допускает в качестве подвижных особых точек разве только полюса. При таком подходе, конечно, переменная x принимает значения в некотором континууме, а не дискретный набор значений $x_0, x_0 + \Delta x, \dots$. Пока не ясно, как можно употребить эти соображения при анализе разностных схем для дифференциальных уравнений.

Благодарности. Автор имел возможность рассказать об алгебраических аспектах интегрирования дифференциальных уравнений, затронутых в этой статье, на международных совещаниях по компьютерной алгебре в Дубне, ежегодных конференциях «Polynomial Computer Algebra» (Математический институт Эйлера, Санкт-Петербург) и научной сессии НИЯУ МИФИ-2015 и признателен их участникам за внимание и интересные советы.

Список литературы

[1] Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 2002.

[2] Итс А.Р., Капаев А.А., Новокшенов В.Ю., Фокас, А.С. Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана. Москва-Ижевск: R & C, 2005.

[3] Conte R., Musette M. The Painlevé Handbook. Bristol, 2008.

[4] Крылов А.Н. Лекции о приближенных вычислениях. Ленинград: АН СССР, 1933.

[5] Виттих Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. Москва: ГТТИ, 1960.

[6] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, 2007.

[7] Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Москва-Ленинград, ГИТТЛ, 1950.

[8] Неванлинна Р. Униформизация. Москва: ИЛ, 1955.

[9] История математики. Под ред. А.П. Юшкевича. Т.2. Москва: Наука, 1970.

[10] Painlevé P. Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm (septembre, octobre, novembre 1895) sur l'invitation de S. M. le roi de Suède et de Norwège. // Œuvres de Painlevé. T. 1. Paris: CNRS, 1971.

[11] Schlesinger L. Einführung in die Theorie der Gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Funktionentheoretischer Grundlage. Berlin-Leipzig: De Gruyter, 1922.

[12] Соболевский С.Л. Подвижные особые точки решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск: БГУ, 2006.

[13] Painlevé P. Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre. // Œuvres de Painlevé. T. 2. Paris: CNRS, 1974. P. 237-461.

[14] Umemura H. Birational automorphism groups and differential equations. // Nagoya Math. J. 1990. V. 119. P. 1-80.

[15] Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Москва: ГИТТЛ, 1953.

[16] Гориэли А. Интегрируемость и сингулярность. Москва-Ижевск: R & C, 2006.

[17] Painlevé P. Sur les équations differentielles du premier ordre dont l'inégrale générale n'a qu'un nombre fini de branches. // Œuvres de Painlevé. T. 2. Paris: CNRS, 1974. P. 767-813.

[18] Junzhi Lei. Nonlinear differential Galois theory. // Arxiv:0608492v2, 2011.

[19] Малых М.Д. Об интегралах систем обыкновенных дифференциальных уравнений, представимых в конечном виде. // Вестник РУДН. Сер. математика, информатика, физика. 2014. № 3. Стр. 11-16.

[20] Малых М.Д. О трансцендентных функциях, возникающих при интегрировании дифференциальных уравнений в конечном виде // Записки научных семинаров ПОМИ. 2015. Т. 432. Стр. 196-223.

[21] Severi F. Lezioni di geometria algebrica. Padova: Angelo Graghi, 1908.

[22] Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Т. 1. Москва: ИЛ, 1949.

[23] Калиткин Н.Н. Численные методы. СПб.: БХВ-Петербург, 2011.

[24] Малых М.Д. О приближенном решении дифференциальных уравнений, общее решение которых зависит от константы алгебраически. // Вестник РУДН. Сер. математика, информатика, физика. 2015. № 3. Стр. 5-9.

[25] Cremona L. Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane. Bologna: Gamberini e Parmeggiani, 1862.

[26] Глаголев Н. А. Проективная геометрия. Москва-Ленинград: ОНТИ НКТП СССР, 1936.

[27] Шаль М. Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов. Москва: Катков, 1888.

[28] Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Высшая школа, 1967.

[29] Ablowitz M.J., Halburd R., Herbst B. On the extension of the Painlevé property to difference equations. // Nonlinearity. 2000. V. 13. P. 889-905

On the differential equations which general solutions are algebraic functions of a constant.

M.D. Malykh.
Moscow State University Materials Science Department and Peoples' Friendship University of Russia, Faculty of Science.
E-mail: malykhmd@yandex.ru.

The 1st order differential equation of the form $y' = f(x, y)$ is considered under two assumptions: 1.) right part of the equation is rational function of y and 2.) its general solution is an algebraic function of a constant. The majority of the differential equations integrated in elementary courses belongs to this class. Its studying was begun in the first works of Painlevé as alternative for Painleve property, and then thrown for a long time. From the analytical point of view these equations are remarkable that they can be reduced by algebraic substitution to Riccati equation (Painlevé, 1890); moreover, this is natural end of the elementary theory of integration of the differential equations. From the computing point of view they are remarkable that it is possible to construct finite differeces schemes which correctly movable describe singularity.

Keywords: Painleve property, finite difference schemes, Möbius transformation, solving in finite terms.

References

1) Kudryashov N.A. Analiticheskaja teorija nelinejnyh differencial'nyh uravnenij [Analytic Theory of Nonlinear Differential Equations]. Moscow: Nauka, 2004. (in Russian)

2) Fokas A.S., Its A.R., Kapaev A.A. and Novokshenov V. Yu. Painlevé Transcendents: The Riemann-Hilbert Approach, Amer. Math. Soc., 2006.

3) Conte R., Musette M. The Painlevé Handbook. Bristol, 2008.

4) Krylov A.N. Lekcii o priblizhennyh vychislenijah [Lectures about

approximate calculations]. Leningrad: AN SSSR, 1933. (in Russian)

5) Wittich H. Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen. Springer, 1955.

6) Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical recipes. The art of scientific computing. Cambridge University Press, 2007.

7) Golubev W.W. Vorlesungen über Differentialgleichungen im Komplexen. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1958.

8) Nevanlinna R. Uniformierung. Berlin, 1953.

9) Istorija matematiki [History of mathematics]. Pod red. A.P. Jushkevicha. T.2. Moskva: Nauka, 1970. (in Russian)

10) Painlevé P. Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm (septembre, octobre, novembre 1895) sur l'invitation de S. M. le roi de Suède et de Norwège. // Œuvres de Painlevé. T. 1. Paris: CNRS, 1971.

11) Schlesinger L. Einführung in die Theorie der Gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Funktionentheoretischer Grundlage. Berlin-Leipzig: De Gruyter, 1922.

12) Sobolevskij C.L. Podvizhnye osobye tochki reshenij obyknovennyh differencial'nyh uravnenij [Movable Singularities of Solutions of Ordinary Differential Equations]. Minsk: BGU, 2006. (in Russian)

13) Painlevé P. Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre. // Œuvres de Painlevé. T. 2. Paris: CNRS, 1974. P. 237-461.

14) Umemura H. Birational automorphism groups and differential equations. // Nagoya Math. J. 1990. V. 119. P. 1-80.

15) Golubev W.W. Lectures on integration of the equations of motion of a rigid body about a fixed point. Jerusalem, 1960.

16) Goriely A. Integrability and nonintegrability of dynamical systems. World Scientific Publ., 2001.

17) Painlevé P. Sur les équations differentielles du premier ordre dont l'inégrale générale n'a qu'un nombre fini de branches. // Œuvres de Painlevé. T. 2. Paris: CNRS, 1974. P. 767-813.

18) Junzhi Lei. Nonlinear differential Galois theory. // Arxiv:0608492v2, 2011.

19) Malykh M.D. Ob integralah sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij, predstavimyh v konechnom vide [On integrals of ordinary differential equations systems which are representable in finite terms]. // Vestnik RUDN. Ser. matematika, informatika, fizika. 2014. № 3. P. 11-16. (in Russian)

20) Malykh M.D. On transcendental functions arising from integrating differential equations in finite terms // Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 209. Issue 6. Page 935-952.

21) Severi F. Lezioni di geometria algebrica. Padova: Angelo Graghi, 1908.

22) Watson G.N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2d ed. Cambridge University Press, 1944.

23) Kalitkin N.N. Chislennye metody [Numerical methods]. SPb.: BHV-Peterburg, 2011. (in Russian)

24) Malykh M.D. O priblizhennom reshenii differencial'nyh uravnenij, obshhee reshenie kotoryh zavisit ot konstanty algebraicheski [On the approximate solving of the differential equations which general solutions depend on a constant of integration algebraically]. // Vestnik RUDN. Ser. matematika, informatika, fizika. 2015. № 3. P. 5-9. (in Russian)

25) Cremona L. Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane. Bologna: Gamberini e Parmeggiani, 1862.

26) Glagolev N. A. Proektivnaja geometrija [Projective geometry]. Moskva-Leningrad: ONTI NKTP SSSR, 1936. (in Russian)

27) Chasles M. Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie particulièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne. M. Hayez, 1837.

28) Matveev N.M. Metody integrirovanija obyknovennyh differencial'nyh uravnenij [Methods for integration of the ordinary differential equations]. Moskva: Vysshaja shkola, 1967. (in Russian)

29) Ablowitz M.J., Halburd R., Herbst B. On the extension of the Painlevé property to difference equations. // Nonlinearity. 2000. V. 13. P. 889-905