Вестник национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», 2016, том 5, No 3, с. 35-44.
УДК 517.9

Об отыскании рациональных интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений по методу М.Н. Лагутинского.

М.Д. Малых* **.
*ФНМ МГУ, **РУДН.
E-mail: malykhmd@yandex.ru.

Аннотация

Исследования М.Н. Лагутинского по теории интегрирования дифференциальных уравнений, прерванные его трагической смертью в 1915 г., рассмотрены с позиций современной компьютерной алгебры. Для произвольного кольца A с дифференцированием D и базисом B введена последовательность определителей, именуемых далее определителями Лагутинского. Любой частный интеграл является делителем всех определителей Лагутинского достаточно большого порядка. Понятие рационального интеграла дифференцирования D введено без предположения о целостности кольца A и доказано, что обращение в нуль любого из определителей Лагутинского влечет существование рационального интеграла; для отыскания такого интеграла выписаны явные формулы. Обратное утверждение доказано при дополнительных предположениях относительно кольца A. Возможности метода Лагутинского проиллюстрированы простыми вычислительными примерами в кольце $\mathbb{Q}[x, y]$.

Ключевые слова: многочлены Дарбу, алгебраические интегралы, решение в конечном виде.

1. Историческое введение

Задача об отыскании рациональных интегралов системы дифференциальных уравнений возникла вместе с дифференциальным исчислением. Еще в 1630-х года Дебон предложил Декарту несколько «обратных задач на касательные», которые с современной точки зрения представляли собой задачи об интегрировании дифференциальных уравнений. В те времена теория логарифмов не была еще разработана и Декарт пытался отыскать решение уравнения $dy = ydx$ среди алгебраических кривых, перебирая выражения вида $y^n = ax^2 + bx + c$ и тому подобные. Фактически же Декарт в письме к Дебону [1], с. 192, мимоходом поставил задачу об интегрировании дифференциальных уравнений в алгебраических функциях, полного ее решения он не дал, но упомянул о том, что доходил до n, равных тысячам. Математики следующих двух веков смотрели на эти усилия свысока, полагая, что теория трансцендентных функций и разложения в степенные ряды сделали эти исследования неактуальными.

Новый интерес к этой задаче возник на рубеже XIX-XX веков, причем тогда ее связывали с именем Паункаре. Поводов к такому интересу было несколько. Во-первых, 1870-х годах Ян Пташицкий [2] и Вейерштрасс [3] обобщили метод Остроградского на интегралы от произвольных алгебраических функций; это давало основание предполагать, что и алгебраические интегралы дифференциальных уравнений могут быть найдены чисто арифметическим путем. Во-вторых, в 1887 году Брунс доказал отсутствие новых алгебраических интегралов у задачи многих тел, что делало в конце XIX века исследование вопроса о существовании алгебраических законов сохранения динамических систем весьма популярной задачей, которой посвятили свои работы крупнейшие аналитики того времени — Пенлеве и Пуанкаре [4]. В последнее время классическая задача об отыскании алгебраического интеграла стала опять актуальной в связи с разработкой алгоритмов аналитического решения дифференциальных уравнений для систем компьютерной алгебры [5],[6].

Для определенности выберем одну из многих возможных постановок задачи об отыскании алгебраического интеграла: за конченое число действий выяснить, допускает ли заданное дифференциальное уравнение

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y],$$

рациональный интеграл

$$r(x, y) = c, \quad r \in \mathbb{Q}(x, y),$$

и в том случае, когда допускает, вычислить этот интеграл. Отыскание интеграла, числитель и знаменатель которого являются многочленами, порядок которых не превосходит заданное число N, сводится к системе алгебраических уравнений для отыскания коэффициентов этих многочленов. Однако из общих соображений очевидно, что число этих *нелинейных* уравнений быстро растет с ростом N, что весьма ограничивает практическое применение такого сорта соображений. Совсем недавно были разработаны эффективные алгоритмы для отыскания рациональных интегралов заданного порядка N, однако при их тестировании на современном компьютере N менялось в пределах первого десятка [5].

Однако еще в 1911 году М.Н. Лагутинскому [7], [8] удалось найти для рациональных интегралов формулы, подобные формулам Крамера для линейных уравнений. Такого рода формулы, как и формулы Крамера, едва ли будут полезны для вычисления интегралов большого порядка, однако сам факт их существования наводит на мысль о том, что задача об отыскании рационального интеграла в некотором смысле линейная. Работы Лагутинского были высоко оценены Д.Д. Мордухай-Болтовским, но затем затерялись в пучине Первой мировой войны [9]. Определители, введенные М.Н. Лагутинским, стали появляться в работах современных авторов при исследовании интегралов некоторых дифференциальных уравнений в 1990-х годах, а на связь этих построений с работами М.Н. Лагутинским обратил внимание Ж.-М. Стрельцын [9], [10], [11].

При ближайшем рассмотрении оказывается, что теория, развитая М.Н. Лагутинским, — очень общая и касается вообще дифференциальных колец с однозначным разложением на множители. Однако изложена она на языке полярных форм, весьма популярных в конце XIX века, но по современным мерка частным и весьма прихотливым образом. В настоящей статье эта теория будет изложена в общем виде, ее возможности будут показаны на простых вычислительных примерах.

2. Определители Лагутинского

Пусть R — дифференциальное кольцо с дифференцированием D и кольцом констант $C(R)$. Элементы кольца констант будем называть постоянными. Будем всюду ниже предполагать, что любой элемент этого кольца можно представить как линейную комбинацию конечного числа элементов некоторого бесконечного множества

$$B(R) = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}, \quad \varphi_i \in R,$$

с коэффициентами в кольце констант $C(R)$. Это множество будем называть базисом кольца. Мы не требуем, чтобы это представление было единственно, но будем всегда предполагать, что элементы $B(R)$ линейно независимы над $C(R)$. Напр., для $R = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ можно взять систему всевозможных мономов, приняв glex-упорядочение. Конечно, на практике выбор удачного базиса может существенно упростить задачу.

Составим бесконечную матрицу, первой строкой которой служит

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots,$$

второй строкой — производная первой

$$D\varphi_1, D\varphi_2, \dots,$$

третьей — вторая производная первой

$$D^2\varphi_1, D^2\varphi_2, \dots,$$

и так до бесконечности. Угловой минор n-го порядка этой матрицы, то есть

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ D\varphi_1 & D\varphi_2 & \dots & D\varphi_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{n-1}\varphi_1 & D^{n-1}\varphi_2 & \dots, & D^{n-1}\varphi_n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

будем обозначать как Δ_n и называть определителем Лагутинского n-го порядка.

Определители Лагутинского зададим в Sage как функциями порядка N и множества $B(R)$:

```
def lagutinski_det(N,B):
   phi=B[:N]
   L=[phi]
   for n in range(1,N):
       phi = [D(phi[i]) for i in range(N)]
       L.append(phi)
   return det(matrix(L))
```

Пример 1. Возьмем кольцо многочленов

```
sage: R.<x,y> = PolynomialRing(QQ, 2)
```

с дифференцированием

```
sage: D=lambda phi: y*(x+1)*diff(phi,x)+(y^2+x^2+2)*
   diff(phi,y)
```

Чтобы не задавать первые элементы множества $B(R)$ руками, воспользуемся списком мономов в разложении бинома Ньютона:

```
sage: B= sorted(((1+x+y)^30).monomials(),reverse=0)
sage: B[:5]
[1, y, x, y^2, x*y]
```

Определители до 10-го порядка легко считаются, напр.,

```
sage: lagutinski_det(2,B)
x^2 + y^2 + 2
sage: lagutinski_det(3,B)
x^5 - x^3*y^2 + x^4 - 3*x^2*y^2 + 4*x^3 + 4*x^2 + 2*
   y^2 + 4*x + 4
```

3. Частные интегралы

Частным интегралом будем называть всякий непостоянный элемент φ кольца R, производная $D\varphi$ которого делится на сам элемент φ, то есть найдется такой элемент λ кольца R, что

$$D\varphi = \lambda\varphi.$$

Из этого равенства следуют

$$D^2\varphi = (D\lambda + \lambda)\varphi = \lambda_2\varphi, \dots,$$

то есть все производные частного интеграла делятся на сам интеграл.

Частные интегралы были введены в рассмотрение Дарбу [11] в связи с интегрированием системы дифференциальных уравнений и по этой причине частные интегралы в полиномиальных полях называют многочленами Дарбу. Если $R = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$, то с дифференцированием D можно связать систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = Dx_i \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{2}$$

имеющую бесконечно много решений в силу теоремы Коши. Тогда для любого многочлена ψ верно

$$\frac{d}{dt}\psi(x_1(t), \dots, x_n(t)) = D\psi(x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Для частного интеграла φ это означает, что

$$\frac{d^m}{dt^m}\varphi(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \lambda_m\varphi(x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Если при одном значении t решение аннулирует интеграл φ, то оно аннулирует при этом значении и все производные $\varphi(x_1(t), \dots, x_n(t))$ и потому в силу аналитичности решения аннулирует интеграл при всех значениях t. Геометрически это означает следующее: интегральная кривая не может покинуть гиперповерхность, образованную нулями частного интеграла.

Вспомним теперь, что всякий элемент кольца R, в том числе и ψ, можно представить как линейную комбинацию конченого числа базисных элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, то есть можно указать такие постоянные $c_1, c_2, \ldots$, что

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i,$$

лишь бы число n было достаточно велико.

Теорема 1. Если частный интеграл можно представить как линейную комбинацию первых n элементов $B(R)$, то определитель Лагутинского n-го порядка после умножения на надлежащим образом выбранную константу или делится на этот частный интеграл, или равен нулю.

Доказательство. Поскольку частный интеграл не может быть равен тождественно нулю, хотя бы один коэффициент в разложении

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$$

должен быть отличен от нуля. Допустим, что $c_m \neq 0$. Умножив в определителе Δ_n m-ый столбец на c_m и прибавив к нему остальные столбцы, умноженные на $c_1, c_2, \ldots$, мы получим определитель, все еще равный $c_m \Delta_n$. Его m-ый столбец равен

$$\begin{pmatrix} \psi \\ D\psi \\ \vdots \\ D^{n-1}\psi \end{pmatrix} = \psi \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Это означает, что $c_m \Delta_n$ или делится на ψ, или равен нулю. □

Пример 2. В кольце многочленов

```
sage: R.<x,y> = PolynomialRing(QQ, 2)
```

с дифференцированием

```
sage: D=lambda phi: y*(x+1)*diff(phi,x)+(y^2+x^2+2)*
   diff(phi,y)
```

многочлен $x+1$ является частным интегралом:

```
sage: D(x+1).factor()
y * (x + 1)
```

Этот многочлен является суммой трех первых базисных элементов из $B(R)$, если принять

```
sage: B= sorted(((1+x+y)^30).monomials(),reverse=0)
sage: B[:3]
[1, y, x]
```

Как и утверждает теорема, при $n>2$ множитель $x+1$ появляется во всех определителях:

```
sage: lagutinski_det(2,B).factor()
x^2 + y^2 + 2
sage: lagutinski_det(3,B).factor()
(-1) * (x + 1) * (-x^4 + x^2*y^2 + 2*x*y^2 - 4*x^2 -
    2*y^2 - 4)
sage: lagutinski_det(4,B).factor()
(-2) * y * (x + 1) * (x^2 + y^2 + 2) * (-9*x^6 + 4*x
   ^4*y^2 + x^2*y^4 - 6*x^5 + 20*x^3*y^2 + 2*x*y^4 -
   42*x^4 - 18*x^2*y^2 - 8*y^4 - 24*x^3 - 8*x*y^2 -
   60*x^2 - 28*y^2 - 24*x - 24)
```

Если в кольце R имеется способ разложения заданного элемента на простые множители и $\Delta_n \neq 0$, то теорема 1 дает способ отыскания всех частных интегралов, являющихся линейной комбинацией первых n элементов из $B(R)$.

Напр., всякий линейный интеграл первого порядка, то есть интеграл вида $a+bx+cy$, можно представить при помощи трех первых базисных элементов $1, x$ и y, поэтому всякий частный интеграл должен быть делителем определителя 3-го порядка. В примере 2 определитель Δ_3 имел лишь один линейный множитель. Поэтому в кольце $\mathbb{Q}[x, y]$ с так введенным дифференцированием может быть только один единственный с точностью до мультипликативной константы линейный интеграл, а именно, $x+1$.

4. Общие интегралы

Если кольцо R — целостное, то дифференцирование естественным образом продолжается на его поле частных $K(R)$, а дробь ψ_1/ψ_2 будем называть общим интегралом, если

$$D\psi_1/\psi_2 = 0$$

или, что то же,

$$\psi_1 D\psi_2 = \psi_2 D\psi_1. \tag{3}$$

Для дальнейшего удобно принять последнее равенство за определение общего интеграла и не выходить за пределы кольца R: пара ψ_1, ψ_2 элементов какого-угодно дифференциального кольца R называется *общим интегралом*, если эти элементы линейно независимы над кольцом констант и удовлетворяют тождеству (3). И только следуя традиции, мы будем записывать эту пару как ψ_1/ψ_2.

К сожалению, чтобы прояснить связь между частным и общим интегралами придется все же сделать некоторые предположение о рассматриваемом кольце. Проще всего предположить, что R — дифференциальное кольцо с однозначным разложением на множители. Тогда из равенства (3) сразу следует, что $D\psi_1$ делится на ψ_1, а $D\psi_2$ — на ψ_2:

$$D\psi_i = \lambda_i \psi_i, \quad i = 1, 2.$$

Но тогда опять из равенства (3) следует $\lambda_1 = \lambda_2$ и поэтому

$$D(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = \lambda(c_1\psi_1 + c_2\psi_2)$$

при любом выборе $c_1, c_2 \in C(R)$. Это равенство означает, что $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ — частный интеграл кольца. Отсюда, в частности, следует, что для кольца

$R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ общий интеграл сохраняется на любом решении системы (2).

Заметим теперь, что оба элемента ψ_1, ψ_2 можно представить как линейную комбинацию некоторого числа первых элементов множества $B(R)$. Поэтому в силу теоремы 1 определитель Лагутинского Δ_n при достаточно большом n должен делится нацело на $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$. Если R — кольцо многочленов $\mathbb{C}[x, y]$, это означает, что определитель Лагутинского должен делится нацело на бесконечное множество различных многочленов и поэтому тождественно равен нулю. Сказанное можно сформулировать чуть более общим образом.

Теорема 2. Пусть R — дифференциальное кольцо с однозначным разложением на множители и пусть его кольцо констант является бесконечным полем, содержащим все обратимые элементы кольца R. Если в кольце R имеется общий интеграл, то все определители Лагутинского достаточно большого порядка равны нулю.

5. Вычисление общего интеграла

Теорема 2 дает необходимые условия существования общего интеграла. Весьма удивительно то, что доказать достаточность этих условий можно, приняв только определение общего интеграла, без каких либо дополнительных предположений о кольце R. Доказательству этой теоремы предпошлем несколько лемм.

Набор из n элементов кольца R будем записывать как строку, а множество всех таких строк длины n будем рассматривать как модуль над R и обозначать как R^n. С тем, чтобы различать элементы R и R^n будем писать над последними символ вектора. Определитель матрицы, строками которой служат векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, будем обозначать как смешанное произведение векторов:

$$(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n).$$

Лемма 1. Каковы бы ни были векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-2}, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{c}_1, \vec{c}_2$ из R^n, произведение

$$(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-2}, \vec{b}_1, \vec{b}_2)(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-2}, \vec{c}_1, \vec{c}_2)$$

равно разности произведений

$$(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-2}, \vec{b}_1, \vec{c}_1)(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-2}, \vec{b}_2, \vec{c}_2)$$

и

$$(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-2}, \vec{b}_1, \vec{c}_2)(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-2}, \vec{b}_2, \vec{c}_1)$$

Доказательство. Пусть x_i минор матрицы

$$(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-2}, \vec{b}_1, \vec{b}_2),$$

который получается путем вычеркивания последней строки b_2 и i-го столбца.

Если все эти миноры равны нулю, то

$$(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-2}, \vec{b}_1, *) = 0,$$

какая бы строка не стояла на месте $*$, и поэтому утверждение леммы очевидно.

Если же среди миноров имеются отличные от нуля, условимся сразу выбирать знаки миноров так, чтобы было верно

$$\vec{b}_2\vec{x}^T = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-2}, \vec{b}_1, \vec{b}_2),$$

а также

$$\vec{c}_1\vec{x}^T = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-2}, \vec{b}_1, \vec{c}_1)$$

и

$$\vec{c}_2\vec{x}^T = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-2}, \vec{b}_1, \vec{c}_2).$$

Поскольку определитель матрицы с равными строками равен нулю,

$$\vec{a}_i\vec{x}^T = 0, \quad i = 1, \ldots n-2.$$

Это означает, что система

$$\begin{cases} \vec{a}_i\vec{x}^T = 0, \quad i = 1, \dots n-2, \\ \vec{b}_2\vec{x}^T = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-2}, \vec{b}_1, \vec{b}_2), \\ \vec{c}_1\vec{x}^T = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-2}, \vec{b}_1, \vec{c}_1), \\ \vec{c}_2\vec{x}^T = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-2}, \vec{b}_1, \vec{c}_2) \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение. Здесь имеется $n-2+3 = n+1$ уравнений с n неизвестными, поэтому определитель расширенной матрицы системы должен быть равен нулю. Разлагая его по последнему столбцу, видим, что сумма трех членов

$$(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-2}, \vec{b}_1, \vec{b}_2)(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-2}, \vec{c}_1, \vec{c}_2),$$

$$-(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-2}, \vec{b}_1, \vec{c}_1)(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-2}, \vec{b}_2, \vec{c}_2)$$

и

$$(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-2}, \vec{b}_1, \vec{c}_2)(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-2}, \vec{b}_2, \vec{c}_1).$$

равна нулю. □

Дифференцирование D можно распространить на R^n, приняв по определению, что

$$D\vec{\varphi} = (D\varphi_1, \dots, D\varphi_n).$$

Лемма 2. Пусть векторы $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ принадлежат $C(R)^n$, а вектор $\vec{\varphi}$ — модулю R^n, положим

$$\psi_i = (\vec{\varphi}, \dots, D^{n-2}\vec{\varphi}, \vec{c}_i), \quad i = 1, 2,$$

тогда

$$\psi_1 D\psi_2 - \psi_2 D\psi_1 = (\vec{\varphi}, \dots, D^{n-1}\vec{\varphi})(\vec{\varphi}, \dots, D^{n-3}\vec{\varphi}, \vec{c}_1, \vec{c}_2).$$

Доказательство. Заметим, что для любого вектора $\vec{c} \in C(R)^n$ верно

$$D(\vec{\varphi}, \dots, D^{n-3}\vec{\varphi}, D^{n-2}\vec{\varphi}, \vec{c}) = (\vec{\varphi}, \dots, D^{n-2}\vec{\varphi}, D^{n-1}\vec{\varphi}, \vec{c}).$$

Поэтому утверждение леммы сразу получается из равенства, установленного в лемме 1, если принять

$$\vec{a}_i = D^{i-1}\vec{\varphi}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-2$$

и

$$\vec{b}_1 = D^{n-2}\vec{\varphi}, \vec{b}_2 = D^{n-1}\vec{\varphi}.$$

$\square$

Теорема 3. Если определитель Лагутинского некоторого порядка равен нулю, то существует общий интеграл.

Доказательство. Пусть n — наименьший из порядков определителей Лагутинского, равных нулю, и $\vec{\varphi}$ — строка, собранная из n первых элементов $B(R)$. Согласно лемме 2 при любом выборе постоянных векторов $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$ верно

$$\psi_1 D\psi_2 - \psi_2 D\psi_1 = \Delta_n(\vec{\varphi}, \ldots, D^{n-3}\vec{\varphi}, \vec{c}_1, \vec{c}_2),$$

где

$$\psi_i = (\vec{\varphi}, \ldots, D^{n-2}\vec{\varphi}, \vec{c}_i), \quad i = 1, 2.$$

Возьмем для определенности

$$\vec{c}_1 = (0, \ldots, 1, 0) \quad \text{и} \quad \vec{c}_2 = (0, \ldots, 0, 1).$$

Поскольку

$$(\vec{\varphi}, \ldots, D^{n-1}\vec{\varphi}, \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_{n-1} & \varphi_n \\ D\varphi_1 & \ldots & D\varphi_{n-1} & D\varphi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ D^{n-2}\varphi_1 & \ldots & D^{n-2}\varphi_{n-1} & D^{n-2}\varphi_n \\ c_1 & \ldots & c_{n-1} & c_n \end{pmatrix},$$

при таком выборе $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$ имеем

$$\psi_1 = \pm \det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_{n-2} & \varphi_n \\ D\varphi_1 & \ldots & D\varphi_{n-2} & D\varphi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ D^{n-2}\varphi_1 & \ldots & D^{n-2}\varphi_{n-2} & D^{n-2}\varphi_n \end{pmatrix}$$

и

$$\psi_2 = \pm \det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_{n-2} & \varphi_{n-1} \\ D\varphi_1 & \dots & D\varphi_{n-2} & D\varphi_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ D^{n-2}\varphi_1 & \dots & D^{n-2}\varphi_{n-2} & D^{n-2}\varphi_{n-1} \end{pmatrix} = \Delta_{n-1}.$$

Число n выбрано таким образом, что, во-первых, Δ_{n-1} не равен нулю и поэтому $\psi_2 \neq 0$ и, во-вторых, Δ_n равен нулю и поэтому

$$\psi_1 D\psi_2 - \psi_2 D\psi_1 = 0.$$

Если к тому же ψ_1, ψ_2 линейно независимы над $C(R)$, то пара ψ_1/ψ_2 является общим интегралом.

Если же ψ_1, ψ_2 линейно независимы над $C(R)$, то нетривиальная линейная комбинация определителей

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_{n-2} & \varphi_{n} \\ D\varphi_1 & \dots & D\varphi_{n-2} & D\varphi_{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ D^{n-2}\varphi_1 & \dots & D^{n-2}\varphi_{n-2} & D^{n-2}\varphi_{n} \end{pmatrix}$$

и

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_{n-2} & \varphi_{n-1} \\ D\varphi_1 & \dots & D\varphi_{n-2} & D\varphi_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ D^{n-2}\varphi_1 & \dots & D^{n-2}\varphi_{n-2} & D^{n-2}\varphi_{n-1} \end{pmatrix} = \Delta_{n-1}$$

равна нулю. Поэтому найдутся такие константы c_{n-1}, c_n, что

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_{n-2} & c_n\varphi_n + c_{n-1}\varphi_{n-1} \\ D\varphi_1 & \dots & D\varphi_{n-2} & D(c_n\varphi_n + c_{n-1}\varphi_{n-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ D^{n-2}\varphi_1 & \dots & D^{n-2}\varphi_{n-2} & D^{n-2}(c_n\varphi_n + c_{n-1}\varphi_{n-1}) \end{pmatrix} = 0, \qquad (4)$$

причем $c_n \neq 0$, коль скоро $\Delta_{n-1} \neq 0$. Переопределяя

$$\vec{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, c_n\varphi_n + c_{n-1}\varphi_{n-1}),$$

получим

$$(\vec{\varphi}, \dots, D^{n-2}\vec{\varphi}) = 0.$$

Диагональные миноры матрицы (4) меньшего порядка совпадают с определителями Лагутинского и, следовательно, отличны от нуля. Вновь используя лемму 2, опять получим или общий интеграл, или две линейно зависимые функции. Двигаясь в этом направлении мы или получим общий интеграл, или, уменьшив порядок определителя до 1, придем к равенству вида

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n = 0, \quad c_n \neq 0,$$

что невозможно, поскольку элементы $B(R)$ линейно независимы. $\square$

При доказательстве теоремы фактически был предъявлен алгоритм построения интеграла, если известен порядок нулевого определителя Лагутинского. При этом интеграл получается как отношение двух определителей в полной аналогии с формулами Крамера. Мы будем называть этот алгоритм методом М.Н. Лагутинского.

Пример 3. Возьмем в кольце многочленов

```
sage: R.<x,y> = PolynomialRing(QQ, 2)
```

дифференцирование

```
sage: D=lambda phi: y*(x+1)*diff(phi,x)+(y^2+x+2)*
   diff(phi,y)
```

Это дифференцирование замечательно тем, что 6-ой определитель Лагутинского равен нулю:

```
sage: B= sorted(((1+x+y)^30).monomials(),reverse=0)
sage: lagutinski_det(5,B)==0
False
sage: lagutinski_det(6,B)==0
True
```

Особый случай, когда числитель и знаменатель получаются линейно зависимы на практике пока не встречался. Поэтому реализуем алгоритм без проверки на линейную зависимость.

```
def lagutinski_integral(N,B):
    phi=B[:N]
    L=[phi]
    for n in range(1,N-1):
        phi = [D(phi[i]) for i in range(N)]
        L.append(phi)
    A=matrix(L)
    psi1=det(A.matrix_from_columns(range(1,N)))
    psi2=det(A.matrix_from_columns(range(0,N-1)))
    return psi1/psi2
```

Таким образом, общим интегралом будет дробь

```
sage: lagutinski_integral(6,B)
(-54*x^2 + 18*y^2 - 72*x)/(-18*y^2 - 36*x - 54)
sage: D(lagutinski_integral(6,B))==0
True
```

Дарбу первым указал на возможность построения общего интеграла системы (2) в том случае, когда известно достаточно много частных интегралов одного порядка, [12], 2.21. Средствами развитой выше теории этот результат легко получается в след. виде.

Следствие 1. Пусть R — дифференциальное кольцо с однозначным разложением на множители и пусть его кольцо констант содержит все обратимые элементы кольца R. Если в кольце имеется бесконечно много частных интегралов, которые можно выразить через одно и то же конечное число элементов $B(R)$, то имеется и общий интеграл.

Разумеется, подразумевается, что частные интегралы различаются более чем на постоянный множитель.

Доказательство. Пусть все эти частные интегралы можно выразить через первые n элементов $B(R)$, тогда в силу теоремы 1 определитель Δ_n имеет бесконечное число делителей и поэтому равен нулю. В силу теоремы 3 это дает существование общего интеграла. □

В предположениях теоремы 2 условие обращение в нуль определителей Лагутинского является необходимым и достаточным условием интегрируемости.

Следствие 2. Пусть R — дифференциальное кольцо с однозначным разложением на множители и пусть его кольцо констант является бесконечным полем, содержащим все обратимые элементы кольца R. В кольце R имеется общий интеграл тогда и только тогда, когда все определители Лагутинского достаточно большого порядка равны нулю.

6. Заключение

Среди практических задач, в которых может быть употреблена развитая выше теория, в первую очередь следует назвать задачи об отыскании многочленов Дарбу и рациональных интегралов заданного порядка.

1. Чтобы найти в кольце $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m]$ с дифференцированием D многочлен Дарбу, представимый как линейная комбинация n мономов, идущих первыми в некотором упорядочении, следует составить n-ый определитель Лагутинского. Если этот определитель равен нулю тождественно, то имеется бесконечно много различных многочленов Дарбу. Если же он не равен нулю тождественно, то многочленами Дарбу могут быть только его делители, которые без труда можно найти в любой современной системе компьютерной алгебры.

2. Чтобы найти в кольце $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m]$ с дифференцированием D рациональный интеграл, числитель и знаменатель которого представимы как линейные комбинации n мономов, идущих первыми в некотором упорядочении, следует составить n-ый определитель Лагутинского. Если этот

определитель не равен нулю тождественно, то искомого интеграла не существует. Если же этот определитель равен нулю тождественно, то вообще говоря другой рациональный интеграл может быть найден как отношение миноров этого определителя.

Вообще говоря, задача об алгебраическом интеграле в своей классической поставке не предполагает, что число n задано. На языке дифференциальной алгебры эта задача состоит в том, чтобы выяснить имеет ли дифференциальное уравнение $Dr = 0$ решение в рациональных функциях. Метод Лагуинтского предлагает нам рассмотреть бесконечную последовательность определителей

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$$

Вообще говоря, мы не можем за конечное число шагов выяснить, обращается ли в нуль цепочка многочленов, начиная с некоторого n, или нет. Сколько можно понять, М.Н. Лагутинский надеялся убрать эту бесконечность и высказал некоторые общие соображения о том, как это можно сделать при помощи анализа локальных особенностей соответствующей системы дифференциальных уравнений [7], с. 181-182. Небезынтересно заметить, что и Декарт столкнулся с этой проблемой при решении задачи Дебона: в своих вычислениях он дошел до тысячной степени, но не нашел способа ее ограничить. Сталкиваются с ней и современные авторы, так, напр., в [5] рассматриваются алгоритмы, в которых порядок искомого многочлена ограничен заданной константой. Однако и без этой безусловно важной добавки, которая бы украсила всю теорию, придав ей полную завершенность, метод Лагутинского позволяет легко и быстро решать по крайней мере тестовые уравнения, в чем мы имели возможность убедиться выше на конкретных примерах.

Сравнение быстродействия современных методов вычисления рациональных интегралов [5] с методом Лагутинского будет, конечно, не в пользу последнего. Его формулы во многом подобны формулам Крамера и по этой причине возможность их применения существенно зависит от того, на сколько трудоемко будет вычисление определителей.

Пример 4. Возьмем вслед за [5] в кольце многочленов $\mathbb{Q}[x, y]$ дифференцирование

$$D = a(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial}{\partial y},$$

где

$$\begin{aligned} a =& x^6 - x^5 + 2x^4y - x^4 + 2x^3y - x^2y^2 + xy^2 - x^2 - 2xy + y^2 + x - 2y + 1 \\ b =& - x^6 + 2x^5y - 3x^4y + 4x^3y^2 + 3x^4 - 4x^3y + 3x^2y^2 - 2xy^3 + y^3 - \\ & - 3x^2 + 2xy - y^2 - y + 1 \end{aligned}$$

В этом случае имеется рациональный интеграл

$$r = \frac{(y - x)(x^2 + y - 1)}{x^4 + y^2 - 1}$$

4-го порядка, причем множители числителя являются многочленами Дарбу 1-го и 2-го порядка. Оба эти многочлена мгновенно вычисляются как делители определителей Лагутинского 3-го и 6-го порядков, выражение в виду его громоздкости здесь не приводится. Однако, чтобы убедится по методу Лагутинского в существовании рационального интеграла, в который входит x^4, при стандартном выборе базиса, необходимо вычислить определитель 15-го порядка. На современном компьютере (AMD A10-6700, 8 Гб памяти) его вычисление без распараллеливания заняло где-то час.

Метод Лагутинского годится и для вычисления рациональных интегралов в полиномиальных кольцах $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m]$ и при $m > 2$, однако здесь его не с чем сравнить.

Можно наедятся, что более удачный выбор базиса, приводящий к разреженным матрицам Лагутиского, позволит существенно ускорить вычисления, а стало быть, вычислительные методы, разработанные в линейной алгебре, найдут применение в теории интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений.

Благодарности. Автор признателен проф. Л.А. Севастьянову, взявшему на себя труд прочитать статью в рукописи, и сделавшему ряд важных замечаний.

Приведенные в статье вычисление были выполнены при помощи Sage Mathematics Software [13].

Список литературы

[1] Декарт Р. Геометрия с приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта. Москва-Ленинград: ГОНТИ НКТП СССР, 1938.

[2] Пташицкий И. Об интегрировании в конечном виде иррациональных дифференциалов. СПб.: Типография имп. акад. наук, 1881.

[3] Weierstrass K. Math. Werke. Bd. 4. Berlin, Mayer&Müller, 1902.

[4] Painlevé P. Mémoire sur les intégrales premieres du probleme des n corps. // Œuvres de Painlevé. T. 3. Paris: CNRS, 1975. P. 666-699.

[5] Bostan A., Chèze G., Cluzeau T. and Weil, J.-A. Efficient Algorithms for Computing Rational First Integrals and Darboux Polynomials of Planar Polynomial Vector Fields // arXiv e-print (arXiv:1310.2778). 2013.

[6] Ngoc Thieu Vo and Winkler F. Algebraic General Solutions of First Order Algebraic ODEs. // Proc. of 17th International Workshop CASC'2015. P. 479-492

[7] Лагутинский М.Н. Приложение полярных операций к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений в конечном виде. // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. 1911. Т. 12. Стр. 111-243.

[8] Лагутинский М.Н. О некоторых полиномах и связи их с алгебраическим интегрированием обыкновенных дифференциальньных алгебраических уравнений. // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. 1912. Т. 13. Стр. 200-224.

[9] Добровольский В.А., Стрельцын Ж., Локоть Н.В. Михаил Николаевич Лагутинский (1871 - 1915). // Историко-математические исследования. 2001. Т. 6 (41). Стр. 111-127

[10] Maciejewski A.J., Strelcyn J.-M. On the algebraic non-integrability of the Halphen system // arXiv e-print (arXiv:950.5002), 2008.

[11] Chèze G. Computation of Darboux polynomials and rational first integrals with bounded degree in polynomial time // Journal of Complexity. 2011. Vol. 27. № 2. P. 246-262.

[12] Айнс Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Факториал Пресс, 2005.

[13] Stein W.A. and others. Sage mathematics software (version 6.7), 2015.

On M.N. Lagutinsky's method for computation of rational integrals of ordinary differential equations systems.

M.D. Malykh.
Moscow State University Materials Science Department and Peoples' Friendship University of Russia, Faculty of Science.
E-mail: malykhmd@yandex.ru.

M. N. Lagutinsky's researches on the theory of integration of the differential equations were interrupted with his tragic death in 1915; here they are considered from viewpoint of modern computer algebra. For a ring A with differentiation D and basis B the sequence of determinants is entered, they are called further as Lagutinsky determinants. Any particular integral is a divider of all Lagutinsky determinants of big order. The notion of rational integral is entered without assumption about integrity of the ring. If one of Lagutinsky determinants is equal to zero, the rational integral exists, moreover, we can always calculate this integral. The converse is proved at additional assumptions concerning the ring A. Possibilities of Lagutinsky's method are illustrated with simple examples in a ring $Q[x, y]$.

Keywords: Darboux polynomials, algebraic integrals, solving in finite terms.

References

1) Descartes R. Geometrija s prilozheniem izbrannyh rabot P. Ferma i perepiski Dekarta [Geometry with the appendix of some works of P. Fermat and Descartes's correspondence.]. Moskva-Leningrad: GONTI NKTP SSSR, 1938. (in Russian)

2) Ptaszicki J. Ob integrirovanii v konechnom vide irracional'nyh differencialov [On integration of irrational differentials in finite terms.]. SPb.: Tipografija imp. akad. nauk, 1881. (in Russian)

3) Weierstrass K. Math. Werke. Bd. 4. Berlin, Mayer&Müller, 1902.

4) Painlevé P. Mémoire sur les intégrales premieres du probleme des n corps. // Œuvres de Painlevé. T. 3. Paris: CNRS, 1975. P. 666-699.

5) Bostan A., Chèze G., Cluzeau T. and Weil, J.-A. Efficient Algorithms for Computing Rational First Integrals and Darboux Polynomials of Planar Polynomial Vector Fields // arXiv e-print (arXiv:1310.2778). 2013.

6) Ngoc Thieu Vo and Winkler F. Algebraic General Solutions of First Order Algebraic ODEs. // Proc. of 17th International Workshop CASC'2015. P. 479-492

7) Lagutinski M.N. Prilozhenie poljarnyh operacij k integrirovaniju obyknovennyh differencial'nyh uravnenij v konechnom vide [The application of polar operations to integration of the ordinary differential equations in finite terms]. // Soobshh. Har'kov. matem. obshh. 2 ser. 1911. T. 12. P. 111-243. (in Russian)

8) Lagutinski M.N. O nekotoryh polinomah i svjazi ih s algebraicheskim integrirovaniem obyknovennyh differencial'nyh algebraicheskih uravnenij [On some polynoms and their aplication for algebraic integration of ordinary differential algebraic equations]. // Soobshh. Har'kov. matem. obshh. 2 ser. 1912. T. 13. P. 200-224. (in Russian)

9) Dobrovol'skij V.A., Strelcyn J.-M., Lokot' N.V. Mihail Nikolaevich Lagutinskij (1871 - 1915). // Istoriko-matematicheskie issledovanija. 2001. T. 6 (41). P. 111-127. (in Russian)

10) Maciejewski A.J., Strelcyn J.-M. On the algebraic non-integrability of the Halphen system // arXiv e-print (arXiv:950.5002), 2008.

11) Chèze G. Computation of Darboux polynomials and rational first integrals with bounded degree in polynomial time // Journal of Complexity. 2011. Vol. 27. № 2. P. 246-262.

12) Ince E.L. Ordinary Differential Equations. Nabu Press, 2010.

13) Stein W.A. and others. Sage mathematics software (version 6.7), 2015.