О символьном интегрировании алгебраических функций

М. Д. Малых, Л. А. Севастьянов, Юй Ин

28 ноября 2019 г.

Аннотация

Алгоритмы интегрирования алгебраических функций, реализованные в современных системах компьютерной алгебры, не способны решать классические задачи об интегрировании в классе алгебраических или элементарных функций. Наиболее общий подход к описанию интеграла от алгебраической функции — отыскание стандартного представления для абелевых интегралов, которое с одной стороны было бы не слишком громоздко, а с другой стороны позволяло бы сразу ответить на ряд вопросов об интеграле. Мы полагаем в качестве такого представления использовать представление абелева интеграла как линейную комбинацию интегралов 3-х типов в том виде, как это представление было описано в Лекциях Вейерштрасса.

В настоящей статье доказано, что это представление позволяет решить классические задачи символьного интегрирования — выяснить, берется ли интеграл в алгебраических или элементарных функциях. В тех случаях, когда интеграл берется в элементарных функциях, получается явное выражение для первообразной, в противном случае интегрирование сводится к вычислению интегралов, свойства которых известны.

1. Введение

Вычисление интегралов в символьном виде является одной из наиболее востребованных задач, в целом успешно решаемыми в системах компьютерной алгебры. Эти успехи связаны в первую очередь с тем, что еще в 1960-х удалось создать и реализовать на ЭВМ алгоритмы символьного интегрирования элементарных трансцендентных функций, в существенном опираясь на работы Лиувилля 1830-х годов [1, 2, 3]. Наиболее трудным оказался вопрос об интегрировании алгебраических функций или, что то же, о вычислении абелевых интегралов [4]. С другой стороны, нельзя не заметить, что это тип интегралов представляет наибольший интерес для пользователей.

Очевидный источник таких интегралов — динамические системы. Эти системы удается решить в конечном виде только в том случае, когда они допускают алгебраические законы сохранения. Использование этих законов сводит систему к набору «квадратур», которые представляют собой интегралы от алгебраических функций [5, 6]. Поэтому вопрос о возможности вычисления таких интегралов в конечном виде и, вообще, об их свойствах встает весьма остро. Следует подчеркнуть, что закон сохранения энергии в механических задачах обычно является квадратичной функцией относительно скоростей, поэтому сведение к квадратурам, напр., по методу Лиувилля для гамильтониан систем [5], непременно требует извлечения радикалов, то есть выводит за рамки рациональных функций, даже если исходная задача имела рациональный потенциал.

Однако задача о возможности вычисления интеграла от алгебраической функции в классе алгебраических функций (см. ниже задача 1) важна не только для этого этапа исследования динамических систем, но и для поиска алгебраических законов сохранения.

Следует напомнить, что задача об отыскании всех алгебраических интегралов движения динамической системы была сформулирована очень давно, однако до сих пор не решена [6, 7, 8, 9]. В общем случае, можно отыскать все интегралы движения, степень которых не превосходит некоторой заданной величины, напр. по методу М.Н. Лагутинского, реализованному в Sage [10] и Math Partner [11]. Приятным исключением является задача многих тел, в которой Брунсу удалось перечислить все алгебраические интегралы. Подход Брунса, в изложении Пенлеве [12], дает конструктивный способ отыскания всех алгебраических интегралов механических задач, гамильтониан которых представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергий, а именно сводит эту задачу к задаче о возможности вычисления абелева интеграла в алгебраических функциях. Есть все основания думать, что класс динамических систем, для которых проходит этот прием заметно шире, поскольку, напр., система, описывающая движение гироскопа, тоже может быть исследована таким путем [13].

Во многих случаях динамическая система имеет недостаточное для сведения к квадратурам число интегралов или, как, напр., в случае волчка Ковалевской [14] эти квадратуры слишком сложны. Такие системы, обычно, исследуют численно по методу конечных разностей. Стандартные разностные схемы, в том числе весьма популярные схемы Рунге-Кутты 4-го порядка, никак не учитывают эти интегралы, то есть при дискретизации исходной динамической системы мы теряем все ее характерные свойства, в том числе вносим численную диссипацию. Желание строить явные разностные схемы, счет по которым не выводит решение динамической системы с интегрального алгебраического многообразия, приводит нас опять к теории абелевых интегралов [15].

2. Трудности вычисления интегралов в современных системах компьютерной алгебры

Математики XIX века рассматривали теорию абелевых интегралов как необходимое завершение математического анализа, однако после Первой Мировой войны эта теория была надолго забыта, о чем с сожалением писал Феликс Клейн [16]. К сожалению, освоение этого наследия находится до сих пор в зачаточном состоянии. Чтобы убедиться в этом, посмотрим прежде всего, как стандартные интеграторы, встроенные в современные системы компьютерной алгебры, справляются с символьным интегрированием алгебраических функций. В качестве систем мы рассмотрим две наиболее популярные — Maple и Wolfram Alpha.

Задача 1. Дана подынтегральная алгебраическая функция, требуется выяснить, является ли интеграл алгебраической функцией. В случае утвердительного ответа выписать выражение для этой функции.

Эта задача была очень популярна у русских математиков в середине XIX века, ей посвятили работы Остроградский, Чебышев и Золотарев, а полное ее решение было дано Яном Пташицким [19]. Вероятно, не зная об этих работах, свой алгоритм решения этой задачи предложил Девенпорт [4]. И у Пташицкого, и у Девенпорта описаны довольно сложные алгоритмы. Ни Maple, ни Wolfram Alpha не заявляют об имплементации в свой код реализации этих алгоритмов, равно как и каких либо других.

Пример 1. Для теста мы использовали интеграл

$$\int \frac{(-3x^5+x+2)dx}{2(x+\sqrt{x^5+x+1})^2\sqrt{x^5+x+1}} = \frac{x}{x+\sqrt{x^5+x+1}} + C.$$

Wolfram Alpha распознал алгебраический интеграл, используя элементарную эвристику, Maple с задачей не справился.

Задача 2. Дана подынтегральная алгебраическая функция, требуется выяснить, является ли интеграл элементарной функцией. В случае утвердительного ответа выписать выражение для этой функции.

Замечание 1. Говоря об элементарных функциях переменной x, мы подразумеваем вслед за Лиувиллем [18] аналитические функции, для вычисления которых можно составить конечное символьное выражение, содержащее букву x, числовые константы и элементарные операции (арифметические действия, вычисление логарифма и экспоненты), а также решение алгебраических уравнений. Современные авторы часто трактуют элементарные функции чуть уже, заменяя операцию решения алгебраических уравнений вычислением радикалов [2].

Согласно теореме Лиувилля, абелев интеграл представим в элементарных функциях тогда и только тогда, когда его можно представить в виде

$$G_0(x,y)+\alpha_1\ln G_1(x,y)+\dots+\alpha_q\ln G_q(x,y), \qquad (1)$$

где $G_0,\dots,G_q$ — рациональные функции на рассматриваемой кривой, а $\alpha_1,\dots,\alpha_q$ — подходящим образом подобранные комплексные числа. Не ограничивая общности рассмотрения, можно считать, что числа $\alpha_1,\dots,\alpha_q$ — линейно независимы над кольцом $\mathbb{Z}$. Это представление далее для краткости будем называть нормальным представлением Лиувилля, G_0 — его алгебраической частью, а оставшуюся линейную комбинацию логарифмов — логарифмической частью этого представления.

Эта теорема может быть доказана как чисто алгебраическим путем [17, §53, th. II], так и заметно проще на основании принципа Лиувилля [23]. По этой причине интегрирование в символьном виде трансцендентных функций и оказывается более простым вопросом, чем интегрирование функций алгебраических. Хотя названными выше авторами были предложены алгоритмы решения задачи 2, современные CAS не справляются даже с простейшими тестами.

Пример 2. Для теста мы использовали

$$\int\frac{(5x^2+2\sqrt{x^5+x+1}+1)dx}{2(x+\sqrt{x^5+x+1})\sqrt{x^5+x+1}}=\ln\left(x+\sqrt{x^5+x+1}\right)+C.$$

Ни Wolfram Alpha, ни Maple не распознали элементарный интеграл.

В тех случаях, когда Maple или Wolfram Alpha не могут взять интеграл, они не выдают пользователю никакой достоверной информации об этом интеграла.

Пример 3. Относительно интеграла

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^5+x+1}}$$

Wolfram Alpha сообщает: «no result found in terms of standard mathematical functions». Этому верить нельзя, поскольку такое же сообщение Wolfram

Alpha выдает на интеграл из примера 2, который допускает представление в элементарных функциях.

Этот пример интересен тем, что имеющиеся в Maple инструменты позволяют дать весьма полную характеристику этого интеграла. Прежде всего в Maple имеется пакет Algcurves, который позволяет вычислить род кривой

$$y^2 = x^5 + x + 1,$$

равный 2, и построить базис линейного пространства интегралов первого типа (kind) [17]. Поэтому Maple может выяснить, что этот интеграл — абелев интеграл 1-го типа. Отсюда следует, что

1) этот интеграл не берется в элементарных функциях, и что

2) он имеем 4 периода, линейно независимых над $\mathbb{Z}$.

Более того, в пакете Algcurves имеется функция для вычисления этих периодов.

Пример 4. Относительно интеграла

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^5 + x + 1}}$$

Wolfram Alpha возвращает сообщение, процитированное в прошлом примере. Нетрудно заметить, что это — интеграл 2-го типа, поэтому

1) он не берется в элементарных функциях,

2) его четыре периода можно вычислить по тем же путям интегрирования, которые в Algcurves строятся для интегралов 1-го типа.

Однако в обеих рассматриваемых CAS нет никакого инструмента для опознания интеграла 2-го типа.

В системе Maple, как только что было отмечено, имеется специальный пакет для работы с алгебраическими кривыми — Algcurves [20], основанный на работах M. van Hoeij [21]. Схожий функционал имеет пакет CASA for Maple [22]. Эти пакеты умеют вычислять род кривой и базис линейного пространства интегралов первого типа. К сожалению, с интегралами другого типа они работать не умеют.

Особо следует рассмотреть случай эллиптических интегралов, то есть интегралов, содержащих иррациональность вида $\sqrt{p(x)}$, где p — многочлен степени 3 или 4 с простыми корнями.

Еще Лежандр заметил, что любой эллиптический интеграл можно представить как линейную комбинацию трех интегралов, получивших название нормальных форм трех типов, и некоторого алгебарического выражения. В XIX веке были в ходу таблицы этих интегралов [24], поэтому уделялось большое внимание приведению заданного интеграла к нормальным формам. Алгоритм сведения подробно описан как в старых руководствах [25, §124], так и в современных работах [26]. Он реализован и в Maple, и в Wolfram Alpha, однако на практике этот алгоритм является источником малопонятных выражений.

Пример 5. Интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$$

является абелевым интегралом 1-го типа. Wolfram Alpha выдает для него следующее выражение

$$\frac{2i\sqrt{(-1)^{5/6}(x-1)}\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt[4]{3}\sqrt{1-x^3}} F\left(\operatorname{arcsin}^{-1}\frac{\sqrt{-ix-(-1)^{5/6}}}{\sqrt[4]{3}}, \sqrt[3]{-1}\right),$$

F — эллиптический интеграл 1-го типа

$$F(\varphi, m) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-m\sin^2\varphi)}}$$

Maple дает еще более сложное выражение. Обе системы не понимают, что перед F стоит константа. Это удивительно вдвойне, поскольку реализуемый алгоритм должен был дать здесь именно константу.

Пример 6. Интеграл

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^3+x+1}}$$

примечателен тем, что для него в обоих системах получается громоздкие выражения, содержащие комплексные константы, вычисленные приближенно.

В настоящее время задачи приближенного вычисления интегралов по таблицам не стоит, поэтому ценность такого рода выражений требует обсуждения. Приведение радикала к виду $\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ является источником появления в выражении корней уравнения 3-ей степени и не дает никакой полезной информации, поэтому мы считаем этот шаг лишним. Напротив, представление абелева интеграла как линейной комбинации интегралов 3-х типов (kind) крайне важно, поскольку сводит заданный интеграл к интегралам, свойства которых известны.

Задача 3. Дана рациональная функция на кривой f, требуется представить интеграл от этой функции как линейную комбинацию интегралов трех типов на этой кривой и рациональной функции на этой кривой.

Понятие интегралов трех типов со случая эллиптической кривой было обобщено в 1860-х годах на любые неприводимые алгебраические кривые [17]. На наш взгляд наиболее последовательно это было сделано в лекциях, прочитанных Вейерштрассом в берлинском университете в 1870-х годах [27]. Здесь не только введено само понятие, но и описан алгоритм, позволяющий решать задачу 3 за конечное число действий.

Замечание 2. По целому ряду обстоятельств, описанных Покровским [29], эти лекции не были своевременно опубликованы — они были изданы Хеттнером и Кноблаухом только в 1902. Текст лекций — сплошной, в нем отсутствуют формулировки теорем, примеры, какие-либо комментарии, позволяющие читателю оценить полученный результат. W. Wirtinger, при написании обзора для Энциклопедии математических наук[28], в примечаниях с удивлением заметил, что это представление дает новое и весьма простое решение задачи 1.

Изложение лекций очень конструктивно, всегда приводятся алгоритмы вычисления всех используемых объектов. Специфическая особенность этих алгоритмов состоит в том, что вычисления ведутся в алгебраических числах. В XIX веке это было объектом критики, поскольку считалось, что алгебраические выкладки должны оперировать только с целыми числами. До недавнего времени это мнение совпадало с возможностями CAS, в которых многие операции были выполнимы в полиномиальных кольцах над $\mathbb{Q}$ или над конечными полями. Однако сравнительно недавно появилась реализация поля алгебраических чисел $\overline{\mathbb{Q}}$ в Sage [30], которая, как нам представляется, идеально подходит для реализации идей Вейерштрасса. Поэтому в дальнейшем мы будем ориентироваться на вычисления в этой свободной системе компьютерной алгебры.

На наш взгляд, решение задачи 3 дает не только решение задачи 1, но и решение задачи 2. Более того, если интеграл не берется в элементарных функциях, представление в виде комбинации интегралов трех типов дает возможность свести задачу к интегралам, свойства которых известны. Цель настоящей статьи — описать решение задач 1 и 2 на основе задачи 3; вопрос о реализации алгоритма решения задачи 3, взятого из лекций Вейерштрасса, будет затронут очень кратко.

3. Нормальное представление абелева интеграла

Рассмотрим неприводимую кривую

$$f(x, y) = 0$$

рода (genus) ρ на плоскости xy. Будем считать, что коэффициенты f — целые числа, и что многочлен f неприводим даже над $\mathbb{C}$.

Рациональную функцию R переменных x, y, связанных соотношением, будем называть рациональной функцией на кривой $f(x, y) = 0$ и, следуя Вейерштрассу, обозначать как $R(xy)$ без запятой. Всякую алгебраическую функцию можно представить как рациональную функцию на соответствующим образом подобранной кривой, причем такое представление, конечно, не является единственным [27, 31].

Чтобы ввести конструктивно понятие кратности нуля и полюса, мы используем локальную униформизацию [31]. Напомним, что в окрестности любой, в том числе бесконечно удаленной, точки (a, b) дуга кривой может быть представлена параметрически

$$x = x_t,\ y = y_t$$

где x_t и y_t — ряды по целым степеням t. При этом, соответствие между точками дуги и параметром t взаимно однозначное; отрицательные степени t появляются только при описании окрестности бесконечно удаленной точки и только в конечном числе. Само понятие точки подправлено так, что обыкновенная особая точка кратности s считается как s различных точек. Точка (a, b) называется центром пары функций x_t и y_t или дуги (x_t, y_t) кривой.

Определение 1. Говорят, что в точке (a, b) кривой рациональная функция R принимает значение $R(ab)$ с кратностью n, если

$$R(x_t y_t) = R(ab) + ct^n + \dots, \quad (c \neq 0)$$

где $(x_t y_t)$ — дуга кривой с центром в (a, b). Точки кривой, в которой $R(xy)$ обращается в бесконечность называют полюсами, а порядок полюса вводят из соотношения

$$R(x_t y_t) = ct^{-n} + \dots.$$

Замечание 3. Алгоритм отыскания первых членов в рядах x_t, y_t сейчас реализован, напр., в Algcurve. В Sage мы не нашли подходящую реализацию над полем $\overline{\mathbb{Q}}$, поэтому написали свою [32]. Этого вполне достаточно для вычисления кратностей.

При любом выборе числа r уравнение

$$R(xy) = r$$

дает на кривой одно и то же число точек, если принять во внимание их кратность. Это число называется степенью функции R.

Выражение вида

$$\int R(xy)dx \tag{2}$$

называют абелевым интегралом. При этом подразумевается, что вдоль рассматриваемого пути интегрирования (x, y) меняются таким образом, что все время удовлетворяет уравнение $f(x, y) = 0$.

Возьмем теперь на этой кривой $(\rho+1)$ точку общего положения, скажем,

$$(a_0, b_0), \ldots, (a_\rho, b_\rho). \tag{3}$$

По определению рода существует рациональная функции степени $\rho + 1$ на кривой, которая имеет полюса во всех этих точках, но не имеется функции меньшей степени, полюса которой принадлежат множеству (3).

Определение 2. В связи с набором (3) Вейерштрасс [27] ввел $2\rho + 1$ дифференциал, а именно:

- Набор из ρ линейно независимых над полем $\mathbb{C}$ дифференциалов

  $$H_1(xy)dx, \ldots, H_\rho(xy)dy$$

  называются набором дифференциалов 1-го типа, если в окрестности любой точки (a, b) на кривой верно

  $$H_i(x_t y_t)dx_y = \mathfrak{P}(t)dt,$$

  где $\mathfrak{P}$ — ряды по целым неотрицательным степеням t.

- Набор из ρ линейно независимых над полем $\mathbb{C}$ дифференциалов

  $$H_1'(xy)dx, \ldots, H_\rho'(xy)dy$$

  называются набором дифференциалов 2-го типа, если

  $$H_i'(x_t y_t)dx_y = -\varepsilon_i \frac{dt}{t^2} + \mathfrak{P}(t)dt,$$

  где ε_i равно единице, если центр (a, b) рассматриваемой дуги совпадает с точкой (a_i, b_i), и равно нулю в противном случае.

- Дифференциал
$$H(x'y', xy)dx,$$
называется дифференциалом 3-го рода, если
$$H(x'y', x_t y_t)dx_t = \varepsilon \frac{dt}{t} + \mathfrak{P}(t)dt,$$
где ε равно единице, если центр (a, b) рассматриваемой дуги совпадает с точкой (x', y'), равно -1, если центр совпадает с точкой (a_0, b_0), и равно нулю в противном случае.

Замечание 4. Мы вслед за Вейерштрассом используем символ $\mathfrak{P}(t)$ как обозначение для произвольного ряда по целым положительным степеням t. Разумеется, ряды, появившиеся выше, зависят от индекса i и выбора точки (a, b), однако для дальнейшего существенны только сингулярные члены, поэтому напоминание об этой зависимости может быть без ущерба опущена.

Замечание 5. Как уже отмечалось выше, пакет Algcurves for Maple и его аналоги умеют вычислять для заданной кривой ее род и набор дифференциалов 1-го типа, но не умеют вычислять дифференциалы 2-го и 3-го типов. В лекциях Вейерштрасса описан алгоритм построения т.н. главной функции, которая является производящей функцией для дифференциалов 3-х типов. Поэтому основная сложность состоит в построении главной функции. Для ряда случаев, напр., для гиперэллиптических кривых главная функция выписывается явно.

Вычисление произвольного абелева интеграла может быть сведено к вычислению этих интегралов.

Теорема 1 (Вейерштрасса о нормальном представлении абелева интеграла)**.** Пусть $R(xy)$ — произвольная рациональный функция на кривой f с особенностями в точках
$$(x_1, y_1), \ldots, (x_r, y_r),$$

тогда дифференциал $R(xy)dx$ можно представить как линейную комбинацию интегралов трех типов с точностью до полного дифференциала некоторой другой рациональной функции. Иными словами, для любой заданной функции R найдутся такие комплексные числа

$$c_1, \ldots, c_r, g_1, g_1', \ldots, g_\rho, g_\rho' \tag{4}$$

и такая рациональная функция $G(xy)$, что дифференциал $R(xy)dx$ равен

$$\sum_{i=1}^{\rho} (g_i' H_i(xy)dx - g_i H_i'(xy)dx) + \sum_{j=1}^{r} c_j H(x_j y_j, xy)dx + dG(xy). \tag{5}$$

Представление (5) будем называть нормальным представлением абелева дифференциала Rdx, а выражение dG — его алгебраической частью.

Замечание 6. Род прямой линии равен нулю, поэтому интеграл от рациональных функций одной переменной x представляется как сумма интегралов имеющих логарифмические особенности и некоторой рациональной функции. При этом интегралы третьего рода переходят в интегралы от элементарных дробей

$$\int \frac{dx}{x - x_j}$$

есть выбрать точку $a_0 = \infty$.

Замечание 7. Мысль о перенесении теоремы Лежандра о нормальном представлении эллиптических интегралов на общий случай имеет очень давнюю историю. Н.Г. Чеботарев в своих комментариях к посметному письму Галуа [33] полагает, что это замечательное открытие принадлежит Галуа.

В лекциях Вейерштрасса не только доказано существование такого представление, но и указан способ отыскания его коэффициентов (4), основанный на вычислении коэффициентов в разложениях $R(x_t y_r)dx_t$ в ряды по степеням t. Реализация этого способа в Sage не представляет никаких трудностей, если известен набор дифференциалов 3-х типов (или хотя бы главная функция для этой кривой).

В дальнейшем мы будем предполагать, что коэффициенты R — алгебраические числа, тогда и коэффициенты нормального представления для Rdx тоже оказываются алгебраическими числами.

4. Интегрирование в алгебраических функциях

Очевидно, что теорема 1 дает достаточный критерий интегрирования в алгебраических функциях: для алгебраичности $\int R(xy)dx$ достаточно выполнения равенств

$$c_1 = \cdots = c_r = g_1 = g_1' = \cdots = g_\rho = g_\rho' = 0.$$

Замечательно то, что это условие и необходимо, на что обратил внимание Wirtinger [28].

Теорема 2 (об интегрировании в алгебраических функциях)**.** Для того, чтобы абелев интеграл был алгебраической функцией необходимо и достаточно, чтобы его нормальное представление сводилось только к первой алгебраической части, то есть

$$g_1 = g_1' = \cdots = g_p = g_p' = 0 \tag{6}$$

и

$$c_1 = \cdots = c_r = 0. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть интеграл берется в алгебраических функциях. Такая функция в особых точках не может иметь логарифмические особенности. Но в точке (x_j, y_j) интеграл

$$\int H(x_j y_j; x, y)dx$$

имеет именно такую особенность. Поэтому в нормальном представлении все $c_j = 0$. Но в таком случае третья часть

$$\sum_{i=1}^{p} g_i' \int H_i(xy)dx - g_i \int H_i'(xy)dx$$

является разностью исходного интеграла и его алгебраической частью, поэтому является алгебраической функцией. Она имеет особенности разве только в точках $(a_1, b_1), \dots (a_\rho, b_\rho)$. При этом дифференциалы имеют особенность типа t^{-2}, что после интегрирования дает особенность типа t^{-1}. Таким образом, третья часть — алгебраическая функция, имеющая разве лишь ρ простых полюсов на кривой. По определению рода, такая рациональная функция сводится к константе. Это означает, что подынтегральная функция сводится к нулю, то есть что $g_i = g_i' = 0$. □

Для вычисления алгебраической части нормального представления по формулам, указанным Вейерштрассом, необходимо использовать координаты особых точек подынтегральной функции.

5. Интегрирование в элементарных функциях

5.1. Представление Лиувилля

По теореме Лиувилля, абелев интеграл представим в элементарных функциях тогда и только тогда, когда его можно представить в виде

$$G_0(x, y) + \alpha_1 \ln G_1(x, y) + \dots + \alpha_q \ln G_q(x, y),$$

где $G_0, \dots, G_q$ — рациональные функции на рассматриваемой кривой, а $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ — подходящим образом подобранные комплексные числа [17, §53, th. II]. Это представление далее для краткости будем называть представлением Лиувилля, G_0 — его алгебраической частью, а оставшуюся линейную комбинацию логарифмов — логарифмической частью этого представления.

5.2. Алгебраическая часть

Сравнения представление Лиувилля с нормальным представлением (5), сразу имеем следующее.

Теорема 3 (об алгебраической части представления Лиувилля)**.** Для того, чтобы абелев интеграл был элементарной функцией необходимо, чтобы выполнялись следующие равенства

$$g_1 = \cdots = g_\rho = 0. \tag{8}$$

При этом алгебраическая часть нормального представления интеграла совпадает с алгебраической частью в представлении Лиувилля.

Доказательство. Если интеграл берется в элементарных функциях, то и разность

$$D = \int R(x,y)dx - R_0(x,y)$$

является элементарной функцией. Поэтому, по теореме Лиувилля, эта разность представима в виде

$$\alpha_1 \ln G_1(x,y) + \cdots + \alpha_q \ln G_q(x,y) + G_0(x,y),$$

где $G_0, \ldots, G_q$ — рациональные функции на рассматриваемой кривой.

С другой стороны разность D равна сумме логарифмической части интеграла

$$\sum_m c_m H(x_m, y_m; x, y)dx$$

и третьей части

$$\sum_{n=1}^{p} g_n' \int H_n(x,y)dx - g_n \int H_n'(x,y)dx$$

Эта сумма имеет логарифмические особенности в точках $(x_1, y_1), \ldots, (x_r, y_r)$ и полюса 1-го порядка в точка $(a_1, b_1), \ldots, (a_\rho, b_\rho)$, вносимые слагаемыми

$$g_1 \int H_1'(x,y)dx, \ldots, g_p \int H_p'(x,y)dx$$

соответственно.

Функция $\ln G$ имеет особенности только там, где G имеет нуль или полюс. Допустим, что в окрестности некоторой точки (a,b) верно

$$G(x_t, y_t) = Ct^s + C't^{s+1} + \cdots = Ct^s \left(1 + \frac{C'}{C}t + \ldots\right), \quad C \neq 0$$

тогда

$$\ln G(x_t, y_t) = s\ln t + \ln C + \ln\left(1 + \frac{C'}{C}t + \dots\right) = s\ln t + \mathfrak{P}(t), \quad C \neq 0$$

Поэтому логарифмические члены могут вносить в разложения по степеням t только логарифмические члены, но не члены с отрицательными степенями.

Поэтому выражение

$$D = \alpha_1 \ln G_1(x, y) + \dots + \alpha_q \ln G_q(x, y) + G_0(x, y)$$

имеет полюса только в тех точках, в которых их имеет функция G_0. Это означает, что G_0 может иметь полюса только в точках $(a_1, b_1), \dots, (a_\rho, b_\rho)$, причем только первого порядка. Это невозможно по определению рода, поэтому

$$g_1 = \dots = g_\rho = 0$$

и $G_0 = 0$. Последнее означает, что

$$\int R(x, y)dx - R_0(x, y) = \alpha_1 \ln G_1(x, y) + \dots + \alpha_q \ln G_q(x, y),$$

поэтому R_0 — является алгебраической частью и в представлении Лиувилля. $\square$

Таким образом, зная нормальное представление для интеграла, берущегося в элементарных функциях, мы можем сразу, без каких либо дополнительных вычислений выписать его алгебраическую часть в представлении Лиувилля. Без использования нормальной формы Вейерштрасса, алгоритм отыскания алгебраической части интеграла, берущегося в элементарных функциях, описан в книге Девенпорта [4]. Этот алгоритм очень сложен и, как видно из примеров, рассмотренных выше в разделе 2, не реализован в современных системах компьютерной алгебры даже частично.

5.3. Логарифмическая часть

В силу теоремы 3 логарифмическая часть в представлении Лиувилля

$$\alpha_1 \ln G_1(x, y) + \dots + \alpha_q \ln G_q(x, y) \tag{9}$$

равна двум суммам

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \int H(x_i, y_i; x, y)dx + \sum_{n=1}^{p} g_n' \int H_n(x, y)dx \tag{10}$$

в нормальном представлении.

Лемма 1. Линейная оболочка, натянутая на коэффициенты $c_1, \ldots c_r$ нормального представления над кольцом $\mathbb{Z}$, совпадает с линейной оболочкой, натянутой на числа $\alpha_1, \ldots \alpha_q$:

$$L_{\mathbb{Z}}(c_1, \ldots, c_r) = L_{\mathbb{Z}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_q).$$

Доказательство. (i) Докажем сначала вложение

$$L_{\mathbb{Z}}(c_1, \ldots, c_r) \subseteq L_{\mathbb{Z}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_q). \tag{11}$$

В окрестности точки (x_1, y_1) сумма (10) разлагается в ряд

$$c_1 \ln t + \mathfrak{P}(t),$$

а сумма (9) в ряд

$$(\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_q m_q) \ln t + \mathfrak{P}(t),$$

где $m_1, \ldots, m_q$ — целые числа (кратности точки (x_1, y_1) как нуля или полюса функций $G_1, \ldots, G_q$, см. опр. 1). Поэтому коэффициенты $c_1, \ldots c_r$ принадлежат линейной оболочке, натянутой на числа $\alpha_1, \ldots \alpha_q$ над кольцом $\mathbb{Z}$, то есть выполняется (11).

(ii) Покажем теперь, что существует базис

$$\{\beta_1, \ldots, \beta_g\}$$

линейной оболочки

$$L_{\mathbb{Z}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$$

над $\mathbb{Z}$, первые s элементов которого являются базисом

$$L_{\mathbb{Z}}(c_1, \ldots, c_r).$$

В самом деле, пусть линейная оболочка

$$L_{\mathbb{Q}}(c_1, \ldots, c_r)$$

над полем $\mathbb{Q}$ имеет размерность s и пусть $\{\beta_1, \ldots \beta_s\}$ — ее базис. Тогда его можно достроить до базиса

$$\{\beta_1, \ldots, \beta_g\}$$

линейной оболочки

$$L_{\mathbb{Q}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_q).$$

Пусть N — наименьшее общее кратное для знаменателей коэффициентов выражений чисел $c_1, \ldots, c_r$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ через базисные элементы. Тогда эти числа можно выразить как линейные комбинации чисел

$$\{\beta_1/N, \ldots, \beta_g/N\}$$

с целыми коэффициентами. Заменяя β_i на β_i/N, имеем базис

$$L_{\mathbb{Z}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$$

над $\mathbb{Z}$, первые s элементов которого являются базисом

$$L_{\mathbb{Z}}(c_1, \ldots, c_r).$$

(iii) Доказательство леммы теперь сводится к установлению равенства $s = g$. Чтобы сделать это, заметим, что в силу (ii) выражение

$$\alpha_1 \ln G_1(x, y) + \cdots + \alpha_q \ln G_q(x, y)$$

можно переписать как

$$\beta_1 \ln G_1'(x, y) + \cdots + \beta_g \ln G_g'(x, y), \tag{12}$$

где $G_1', \ldots G_g'$ — рациональные функции на кривой. Сравнивая разложения в ряды суммы (10) и этой суммы в окрестности точки (x_1, y_1), получим

$$c_1 = m_1'\beta_1 + \cdots + m_g'\beta_g,$$

где m_i' — кратность точки (x_i, y_i) как нуля или полюса функции G_i'.

Если $s < g$, то $m_g' = 0$. Это означает, что G_q' не имеет особенности в точке (x_1, y_1). Тем же путем можно убедиться, что эта функция не может иметь особенностей и в других особых точках подынтегральной функции. Однако непостоянная функция должна иметь где-то особую точку. Обозначим кратность этой точки как нуля или полюса функции G_i' как m_i, тогда $m_g \neq 0$. Разложение в окрестности этой точки для суммы (10) не содержит сингулярных членов, а разложения для $\ln G_i'$ могут дать член $m_i \ln t$. Поэтому получается, что

$$m_1\beta_1 + \cdots + m_g\beta_g = 0$$

Это невозможно, поскольку по построению $\beta_1, \ldots, \beta_g$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$. Поэтому $s = g$. □

Лемма 2. Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_g$ — базис линейной оболочки, натянутой на коэффициенты $c_1, \ldots c_r$ нормального представления интеграла над кольцом $\mathbb{Z}$, и

$$c_i = \sum_{j=1}^{g} m_{ij}\beta_j, \quad m_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

Если рассматриваемый интеграл берется в элементарных функциях, то логарифмическая часть в представлении Лиувилля равна

$$\frac{\beta_1}{N}\ln R_1(xy) + \cdots + \frac{\beta_g}{N}\ln R_g(xy), \tag{13}$$

где N — надлежащим образом подобранное натуральное число, а $R_1, \ldots R_g$ — рациональные функции, имеющие нули и полюса только в точках

$$(x_1, y_1), \ldots, (x_r, y_r),$$

причем Nm_{ij} — кратность точки (x_i, y_i) как нуля или полюса функции R_j.

Доказательство. Перепишем с учетом введенного базиса неалгебраическую часть (10) нормального представления как

$$\sum_{j=1}^{g}\beta_j\sum_{i=1}^{r}m_{ij}\int H(x_i, y_i; x, y)dx + \sum_{n=1}^{p}g_n'\int H_n(x, y)dx \tag{14}$$

В силу леммы 1 найдутся такие целые числа N, m'_{ij}, что

$$N\alpha_i = \sum_{j=1}^{g} m'_{ij}\beta_j, \quad m_{ij} \in \mathbb{Z},$$

Поэтому логарифмическую частью (9) в представлении Лиувилля можно переписать в виде

$$\frac{\beta_1}{N}\left(m_{11}\ln G_1(xy) + \dots + m_{q1}\ln G_q(xy)\right) + \dots,$$

или

$$\frac{\beta_1}{N}\ln G'_1(xy) + \dots + \frac{\beta_g}{N}\ln G'_g(xy), \tag{15}$$

где G'_i — рациональные функции.

Повторяя аргументацию из доказательства леммы 1, видим, что нули и полюса эти функции могут иметь только в точках $(x_1, y_1), \dots, (x_r, y_r)$. Обозначим кратность точки (x_i, y_i) как нуля или полюса функции G_j как m'_{ij}. Сравнивая коэффициенты при $\ln t$ в (14) и (15) в окрестности точки (x_i, y_i), имеем

$$\sum_{j=1}^{r}\beta_j m_{ij} = \frac{\beta_1}{N}m'_{ij} + \dots + \frac{\beta_g}{N}m'_{ij}$$

или, в силу линейной независимости $\beta_1, \dots, \beta_g$,

$$N m_{ij} = m'_{ij},$$

что и утверждает лемма. □

Выражение (13) леммы 2 можно записать так

$$\beta_1 \ln \sqrt[N]{R_1(xy)} + \dots + \beta_g \ln \sqrt[N]{R_g(xy)},$$

где $\beta_1, \dots, \beta_g$ — базис линейной оболочки $L_{\mathbb{Z}}(c_1, \dots c_r)$. Очевидно, что путем перехода к новому базису $\beta_1/N, \dots, \beta_g/N$ можно избавиться от радикалов. Покажем, что от радикалов можно избавиться при любом выборе базиса.

Лемма 3 (о радикалах)**.** Пусть задано r точек

$$(x_1, y_1), \dots, (x_r, y_r)$$

и r целых чисел $m_1, \ldots, m_r$. Если для некоторого натурального N существует рациональная функция R, которая имеет нули и полюса только в этих r точках, причем кратность точки (x_i, y_i) равна Nm_i, то $\sqrt[N]{R}$ тоже является рациональной функций на рассматриваемой кривой.

Доказательство. Пусть функция R имеет степень, которая делится на N, обозначим ее как Nq. Составим два списка из q точек, в первый отнесем нули этой функции, во второй — ее полюса. При этом точку (x_i, y_i) будем записывать в один этих списков $|m_i|$ раз. Точки первого списка будем обозначать как $(x_1', y_1'), \ldots$, второго — как $(x_1'', y_1''), \ldots$.

В силу теоремы Абеля необходимые и достаточные условия существования этой рациональной функции даются равенствами

$$\sum_{i=1}^{q} N \int\limits_{(x_i', y_i')}^{(x_i'', y_i'')} H_j(xy)dx = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, \rho)$$

которые выполняются с точностью до периодов и при любом выборе порядка следования точек в обоих списках. Сокращая эти равенства на N, видим, что выполняются достаточные условия существования рациональной функции, имеющей нули и полюса в тех же точках, что и R, но с кратностями, которые в N раз меньше, чем у R. Обозначим эту функцию как Q. Тогда Q^N имеет те же нули и особенности, что и R, и с теми же кратностями, поэтому $Q^N = R$. Это означает, что рациональная функция Q является корнем N-ой степени из R. $\square$

Собирая все результаты вместе, имеем след.:

Теорема 4 (о логарифмической части представления Лиувилля)**.** Если рассматриваемый интеграл берется в элементарных функциях, то логарифмическая часть в представлении Лиувилля равна

$$\beta_1 \ln R_1(xy) + \cdots + \beta_g \ln R_g(xy). \tag{16}$$

Здесь $\beta_1, \ldots, \beta_g$ — произвольный базис линейной оболочки, натянутой на коэффициенты $c_1, \dots c_r$ нормального представления интеграла над кольцом $\mathbb{Z}$:

$$c_i = \sum_{j=1}^{g} m_{ij}\beta_j, \quad m_{ij} \in \mathbb{Z},$$

а $R_1, \dots R_g$ — рациональные функции, имеющие нули и полюса только в точках

$$(x_1, y_1), \dots, (x_r, y_r),$$

причем m_{ij} — кратность точки (x_i, y_i) как нуля или полюса функции R_j.

Доказанная теорема позволяет за конечное число действий решить задачу 1, если известно нормальное представление интеграла. Поскольку это решение несколько сложнее, чем решение задачи 1, мы опишем его более подробно.

5.4. Алгоритм вычисления интеграла в элементарных функциях

Если известна нормальная форма абелева интеграла, то алгоритм решения задачи 2 можно описать так:

1) Проверить выполнение условий

$$g_1 = \dots = g_\rho = 0$$

Если они не выполнены, то интеграл не берется в элементарных функциях и мы прерываем вычисления.

2) Найти базис $\{\beta_1, \dots, \beta_g\}$ линейной оболочки, натянутой на коэффициенты $c_1, \dots, c_r$ нормального разложения над полем $\mathbb{Q}$, и коэффициенты m_{ij} разложения

$$c_i = \sum_{j=1}^{g} m_{ij}\beta_j, \quad m_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

3) Выяснить, существуют ли рациональные функции $R_1, \dots R_g$, имеющие нули и полюса только в точках

$$(x_1, y_1), \dots, (x_r, y_r),$$

причем m_{ij} — кратность точки (x_i, y_i) как нуля или полюса функции R_j. Если такие функции не существуют, прервать вычисления. Если существуют, то вычислить эти функции.

4) Вычислить алгебраическую часть в представлении Лиувилля как алгебраическую части в нормальном представлении, а логарифмическую — по формуле
$$\beta_1 \ln R_1(xy) + \cdots + \beta_g \ln R_g(xy).$$

5) Если производная суммы алгебраической и логарифмической частей совпадает с исходной подынтегральной функцией, то исходный интеграл берется в элементарных функциях, и сумма полученных выражений для алгебраической и логарифмической частей дает элементарное выражение для заданного интеграла. В противном случае интеграл не берется в элементарных функциях.

6. Заключение

В разделе 2 мы старались показать, что алгоритмы интегрирования алгебраических функций, реализованные в современных системах компьютерной алгебры, не способны решить значительное число классических задач, и в первую очередь задачи 1 и 2. На наш взгляд ключевая проблема — отыскания стандартного представления для абелевых интегралов, которое с одной стороны было бы не слишком громоздко, а с другой стороны позволяло бы сразу ответить на ряд вопросов об интеграле. Мы полагаем, что в качестве такого представления естественно использовать представление абелева интеграла через интегралы 3-х типов в том виде, как это представление было описано в Лекциях Вейерштрасса.

В настоящей статье было доказано, что это представление позволяет решить классические задачи символьного интегрирования — выяснить, берется ли интеграл в алгебраических или элементарных функциях. А именно, другие подходы к решению задач 1 и 2, в том числе описанные у Пташицкого [19] и Девенпорта [4], не связанные с нормальным представлением Вейерштрасса, не только очень сложны, но и не дают никакой достоверной информации в том случае, когда интеграл не берется в элементарных функциях (см. пример 3). Мы же в тех случаях, когда интеграл не берется в элементарных функциях, сводим интегрирование к вычислению интегралов, свойства которых известны.

Говорить о сложности предложенного подхода следует с очень большой осторожностью, пока не будет реализован алгоритм отыскания нормального представления интеграла. Для некоторых классов кривых, напр., для гиперэллиптических кривых выражения для интегралов трех типов выписываются явно. Наша routine для работы с локальной униформизацией в Sage [32] позволяет прямо использовать в этом случае формулы для коэффициентов нормального представления (5) из Лекций Вейерштрасса.

Мы провели предварительное описанного приема в Sage на простейших эллиптических интегралах, поскольку для этого случая интегралы трех типов выписываются явно. Проверка условий интегрируемости в алгебраических функций и необходимых условий интегрируемости в функциях элементарных выполняется корректно и весьма быстро. В настоящее время мы работаем над автоматизацией отыскания логарифмической части, описанной выше в разделе 5.4.

Для исследования общего случая требует разработка и реализация алгоритма отыскания нормального представления абелева интеграла. Алгоритм ее решения, описанный в Лекциях Вейерштрасса, сводится в существенном к построению главной функции рассматриваемой алгебраической кривой. Это — чисто алгебраическая задача, решение которой представляется нам делом ближайшего будущего.

Благодарности.

Список литературы

[1] Moses, J.: Symbolic Integration: The Stormy Decade. // Communications of the ACM. **14**(8) (1971).

[2] Bronstein, M.: Symbolic Integration I. Transcendental Functions. Springer (2005)

[3] Parisse, B.: Algorithmes de calcul formel. URL: `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr`, 2011.

[4] Дэвенпорт, Дж.: Интегрирование алгебраических функций. М.: Мир, 1985. Гл. 4.

[5] Whittaker, E. T.: A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies; with an introduction to the problem of three bodies. Cambridge, University Press, 1917.

[6] Goriely, A.: Integrability and Nonintegrability of Dynamical Systems. — Singapore; River Edge, NJ : World Scientific, 2001.

[7] Chèze, G.: Computation of Darboux polynomials and rational first integrals with bounded degree in polynomial time // Journal of Complexity 27 (2) (2011) P. 246–262. DOI: 10.1016/j.jco.2010.10.004.

[8] C. Christopher, J. Llibre, J. Vitório Pereira, Multiplicity of invariant algebraic curves in polynomial vector fields, Pacific Journal of Mathematics 229 (1) (2007) 63–117. doi:10.2140/pjm.2007.229.63.

[9] Ngoc Thieu Vo, F. Winkler, Algebraic general solutions of first order algebraic ODEs, Vol. 9301, Springer, Cham, 2015, pp. 479–492. doi:10.1007/978-3-319-24021-3_35.

[10] M. D. Malykh, L. A. Sevastianov, Y. Ying, On algebraic integrals of a differential equation // Discrete and Continuous Models and Applied

Computational Science. 27 (2) (2019). P. 5–23. DOI: 10.22363/2658-4670-2019-27-2-5-23.

[11] Глазков, С. А. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В MATH PARTNER // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки Том 23, No 122. 2018. P. 250-260. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-250-260

[12] Painlevé P. Mémore sur les intégrales du problème des n corps // Œuvres de Paul Painlevé. — 1975. — P. 666–699.

[13] Polubarinova-Kochina, P. Ya.: On unambiguous solutions and algebraic integrals of a problem about rotation of a gyroscope at a motionless point // S.A. Chaplygin (ed.). Dvizhenie tverdogo tela vokrug nepodvizhnoj tochki. Academy of Sciences of the USSR: Moscow-Leningrad, 1940. In Russian.

[14] Golubev, W.W.: Lectures on integration of the equations of motion of a rigid body about a fixed point. Jerusalem, 1960.

[15] Ayryan E. A., Malykh M. D., Sevastianov L. A., Yu Ying. On Explicit Difference Schemes for Autonomous Systems of Differential Equations on Manifolds // Computer Algebra in Scientific Computing. CASC 2019; 2019: pp. 343–361. DOI: 10.1007/978-3-030-26831-2_23

[16] Klein, F.: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Teil I. Springer, 1926.

[17] Чеботарев, Н.Г. Теория алгебраических функций. М.-Л.: ОГИЗ, 1948

[18] Liouville, J.: Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes // Crelles Journal d. M. Bd. 13. S. 93-118.

[19] Пташицкий, Я.: Об интегрировании в конечном виде иррациональных дифференциалов. СПб: тип. имп. акад. наук, 1888.

[20] Overview of Algcurves package // URL: https://www.maplesoft.com, 2019

[21] M. van Hoeij: An algorithm for computing an integral basis in an algebraic function field // J. of Symbolic Computation, 1994, 18, p. 353-363.

[22] CASA – Computer Algebra System for Algebraic Geometry // URL: https://www3.risc.jku.at/software/casa/

[23] Ritt, J.F.: Integration in finite terms. Liouville theory of elementary methods. NY, 1948

[24] Byrd, P.F; Friedman, M.D.: Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists. 2nd ed. Springer, 1971.

[25] Сикорский, Ю. С.: Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. М.-Л.: ОНТИ, 1936

[26] Labahn, G.; Mutrie, M.: Reduction of elliptic integrals to Legendre normal form. Waterloo, Ont. : University of Waterloo, Computer Science Department, 1997.

[27] Weierstrass, K.: Math. Werke. Bd. 4. Berlin, 1902.

[28] Wirtinger, W.: Algebraische Funktionen und ihre Integrale // Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Art. 2 B 2 (1901)

[29] Покровский, П.М.: О рациональных функциях эллиптического образа. М., 1900.

[30] Witty C. et al.: Field of algebraic numbers // URL: http://doc.sagemath.org, 2007.

[31] Nevanlinna, R.: Uniformisierung. Springer: Berlin, 1953.

[32] Malykh, M.D.; Sevastianov, L.A.: Weierstrass theory of Abelian integrals and its realization in Sage // Polynomial Computer Algebra '2017. URL: http://pca.pdmi.ras.ru/2017

[33] Галуа, Э.: Сочинения. С приложением статьи П. Дюпюи: Жизнь Эвариста Галуа. М.-Л.: Гостехиздат, 1936.