

# Разностные схемы для дифференциальных уравнений с полиномиальной правой частью, задающие бирациональные соответствия

М. Д. Малых, Э. А. Айрян, Л. О. Лапшенкова, Л. А. Севастьянов

20 февраля 2025 г.

## Аннотация

В начале XX века Апфельрот заметил, что любую систему обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальной правой частью можно свести к системе дифференциальных уравнений с квадратичной правой частью, то есть «квадратизировать» исходную систему путем введения дополнительных переменных. В 2010-х годах среди разностных схем, наследующих некоторые свойства исходных дифференциальных уравнений, выделили разностные схемы, задающие бирациональные преобразования между слоями по времени. Такие схемы можно составить для любой системы дифференциальных уравнений с квадратичной правой частью по методу, который одни авторы связывают с именем W. Kahan, а другие — с Hirota and Kimura. Квадратизация по Апфельроту позволяет применить метод Кагана к любому динамическому система с полиномиальной правой частью. В настоящей работе мы рассматриваем свойства приближенных решений, полученных в результате сочетания квадратизации по Апфельроту и дискретизации по Кагану. Оказывается, что схема Кагана навязывает системе, полученной после квадратизации, свойство Пенлеве и разрушает алгебраические интегралы этой системы.

## 1. Введение

Уравнения Ньютона задают взаимно однозначное соответствие между начальным и конечным положением динамической системы. Разностные схемы, аппроксимирующие уравнения Ньютона, задают соответствие между начальным и конечным положением системы, которое описывается при

помощи алгебраических уравнений. Такое соответствие будет взаимно-однозначным в том и только в том случае, если оно будет бирациональным [1].

Всякую динамическую систему

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

or, for short,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (1)$$

с квадратичной правой частью можно аппроксимировать разностной схемой, задающей бирациональное соответствие между положениями системы в момент времени  $t$  и положением при  $t + \Delta t$ . В самом деле, если условится обозначать первое положение просто как  $\mathbf{x}$ , а второе как  $\hat{\mathbf{x}}$ , то эту схему можно записать в виде

$$\hat{x}_i - x_i = F_i \Delta t, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где  $F_i$  получается из выражения  $f_i$  путем замены монома  $x_j^2$  на  $x_j \hat{x}_j$ , а монома  $x_j x_k$  — на  $x_j \hat{x}_k$ . Конечно, удобнее использовать замену, симметричную относительно начальных и конечных значений: моном  $x_j^2$  меняется на  $x_j \hat{x}_j$ , моном  $x_j x_k$  — на  $(x_j \hat{x}_k + \hat{x}_j x_k)/2$ , а моном  $x_j$  — на  $(x_j + \hat{x}_j)/2$ . В любом случае система (2) является линейной как относительно  $\hat{\mathbf{x}}$ , так и относительно  $\mathbf{x}$ . Поэтому  $\hat{\mathbf{x}}$  можно выразить в виде рациональной функции  $\mathbf{x}$  и, наоборот,  $\mathbf{x}$  — в виде рациональной функции  $\hat{\mathbf{x}}$ . Таким образом, схема (2) задает бирациональное соответствие между точками  $\mathbf{x}$  и  $\hat{\mathbf{x}}$   $n$ -мерного пространства над полем  $\mathbb{R}$ .

Описанный выше способ аппроксимации динамической системы (1) с квадратичной правой частью вошел в употребление в середине прошлого века в тематике, связанной с солитонами, на что было указано в [2]. После доклада, сделанного Уильямом Каганом в 1993 г., эта разностная схема была применена к системе Вольтерры-Лотки [3], к квадратичной гамильтоновой системе [4, 5] и уравнениям движения гироскопа для двух

классических случаев — Эйлера-Пуансо [6, 7, 8, 9] и Лагранжа-Эйлера [10]. То обстоятельство, что разностная схема Кагана задает бирациональное соответствие впервые было отмечено в [7].

В центре внимания этих исследований было наследование разностной схемой Кагана алгебраических интегралов движения исходной динамической системы. Для гамильтоновых систем в [4] получены явные выражения для симплектической структуры и модифицированного гамильтониана, точно сохраняющихся на схеме Кагана. Для гироскопа модифицированные выражения для квадратичных интегралов были указаны в [6, 10], метод их получения был восстановлен в [8] и, по нашему мнению, представляет собой разностный аналог метода Лагутинского [9].

Если решение дифференциального уравнения имеет подвижный полюс, то решение, найденное по схеме Кагана, подражает ему: на графике приближенного решения хорошо видно, как приближенное решение уходит на бесконечность, но и возвращается обратно без заметного накопления ошибки [9, п. 6]. Поэтому точки приближенного решения естественно рассматривать как точки проективного пространства, что вполне согласуется с традицией рассматривать бирациональные преобразования  $n$ -мерного пространства как преобразования проективного пространства [1]. При этом бирациональное преобразование  $n$ -мерного пространства называют преобразованием Кремоны. Поэтому можно сказать, что схема (2) задает преобразование Кремоны между новыми и старыми положениями динамической системы (1).

Большинство изученных систем можно отнести к числу эллиптических осцилляторов, то есть динамических систем, для которых интегральные кривые являются эллиптическими кривыми. В этом случае, как было показано в [9], дискретная теория повторяет непрерывную теорию полностью: 1.) точки приближенного решения ложатся на некоторую эллиптическую кривую, которая при  $\Delta t \rightarrow 0$  переходит в интегральную кривую, 2.) разностная схема допускает представление при помощи квадратуры, 3.) при-

ближенное решение можно представить при помощи эллиптической функции дискретного аргумента. Это позволяет построить теорию эллиптических функций, основанную на преобразованиях Кремоны (гипотеза Эрмита) [9].

Особняком стоит система Вольтерры-Лотки, интегральные кривые которой являются трансцендентными. Компьютерные эксперименты со схемой Кагана показывают, что точки приближенного решения ложатся на некоторые трансцендентные кривые — инвариантные кривые соответствующего преобразования Кремоны [9]. Трансцендентные инвариантные кривые преобразований Кремоны, вероятно, впервые были описаны в [11].

Прием Кагана можно без особого труда перенести на случай динамических систем с полиномиальной правой частью. Дело в том, что динамическую систему с полиномиальной правой частью всегда можно свести к квадратичной системе путем введения дополнительных переменных. Эта процедура, впервые указана Г.Г. Аппельротом [12], в компьютерной алгебре называется квадратизацией системы дифференциальных уравнений [13]. В настоящей работе мы представим результаты применения метода Кагана к квадратизованным динамическим системам.

## 2. Квадратизация динамических систем с полиномиальной правой частью

В оригинальной работе Г.Г. Аппельрота [12] квадратизация описана в проективных координатах. Опишем его прием в более привычных аффинных координатах.

Пусть правые части дифференциальных уравнений системы (1) являются многочленами относительно  $x_1, \dots, x_n$  и пусть  $m$  — наибольшая из степеней многочленов  $f_1, \dots, f_n$ . Обозначим множество всех мономов

$$x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n},$$

степень которых

$$m_1 + \dots + m_n$$

строго меньше  $m$ , но больше 1, как  $M$ . Перенумеруем мономы в этом множестве в любом порядке и будем обозначать их как  $z_1, \dots, z_r$ . Тогда всякий многочлен, степень которого не превосходит  $m$ , является линейной комбинацией  $1, x_i, z_j$  и всевозможных их произведений вида  $x_i z_j$ . Поэтому системе (1) можно переписать в виде

$$\frac{dx_p}{dt} = f_p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij}^{(p)} x_i z_j + \sum_j b_j^{(p)} z_j + \sum_j c_j^{(p)} x_j + d^{(p)}, \quad (3)$$

где  $a_{ij}^{(p)}, \dots$  — некоторые константы.

Пусть  $z_q = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ . Тогда

$$\frac{dx_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}}{dt} = m_1 x_1^{m_1-1} \dots x_n^{m_n} \frac{dx_1}{dt} + \dots + m_n x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n-1} \frac{dx_n}{dt}$$

или

$$\frac{dx_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}}{dt} = m_1 x_1^{m_1-1} \dots x_n^{m_n} \left( \sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} x_i z_j + \dots \right) + \dots \quad (4)$$

При умножении  $x_1^{m_1-1} \dots x_n^{m_n}$  на  $x_i$  получается моном из  $M$  или  $1, x_1, \dots, x_n$ . Поэтому левая часть (4) является линейной комбинацией произведений вида  $z_i z_j, z_j x_i$  и  $z_j 1$ :

$$\frac{dz_q}{dt} = \sum_{i,j} A_{ij}^{(q)} z_i z_j + \sum_{i,j} B_{ij}^{(q)} x_i z_j + \sum_j C_j^{(q)} z_j. \quad (5)$$

Добавляя к системе (1), записанной в виде (3), систему (5), мы получим систему дифференциальных уравнений с линейной или квадратичной правой частью, в которой число искомых функций совпадает с числом уравнений.

Таким образом,

- во-первых, всякое решение (1) дает решение системы (3)-(5), если разделить  $z_q$  по формуле  $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ ,

- во-вторых, система (3)-(5) обладает интегральным многообразием

$$z_q = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}, \quad q = 1, \dots, r,$$

и решения, лежащие на этом многообразии, дают решения системы (1).

Проиллюстрируем метод Апфельрота простым примером.

**Пример 1.**

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1^2 + x_2^2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1^3 + x_2.$$

Степень  $f_1$  равна 2, а  $f_2$  — 3, поэтому  $m = 3$ . Множество  $M$  образовано мономерами, степень которых заключена между 1 и 3 строго, то есть мономерами 2-го порядка

$$z_1 = x_1^2, \quad z_2 = x_1 x_2, \quad z_3 = x_2^2.$$

Исходную систему переписываем в виде (3), то есть:

$$\frac{dx_1}{dt} = z_1 + z_3, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 z_1 + x_2.$$

Строим систему (5):

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= 2x_1 \frac{dx_1}{dt} = 2x_1(z_1 + z_3), \\ \frac{dz_2}{dt} &= x_1 \frac{dx_2}{dt} + x_2 \frac{dx_1}{dt} = x_1(x_1 z_1 + x_2) + x_2(z_1 + z_3) = z_1^2 + z_2 + x_2(z_1 + z_3), \\ \frac{dz_3}{dt} &= 2x_2 \frac{dx_2}{dt} = 2x_2(x_1 z_1 + x_2) = 2z_1 z_2 + 2z_3. \end{aligned}$$

В итоге, имеем

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = z_1 + z_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 z_1 + x_2, \\ \frac{dz_1}{dt} = 2x_1(z_1 + z_3), \\ \frac{dz_2}{dt} = z_1^2 + z_2 + x_2(z_1 + z_3), \\ \frac{dz_3}{dt} = 2z_1 z_2 + 2z_3. \end{cases}$$

При этом

$$\frac{d(z_1 - x_1^2)}{dt} = 2x_1(z_1 + z_3) - 2x_1(z_1 + z_3) = 0,$$

то есть

$$z_1 - x_1^2 = C_1.$$

Далее,

$$\frac{d(z_2 - x_1x_2)}{dt} = z_1^2 + z_2 + x_2(z_1 + z_3) - x_1(x_1z_1 + x_2) - x_2(z_1 + z_3)$$

или

$$\frac{d(z_2 - x_1x_2)}{dt} = z_1(z_1 - x_1^2) + z_2 - x_1x_2 = C_1z_1 + z_2 - x_1x_2$$

Поэтому, многообразиие

$$z_1 = x_1^2, z_2 - x_1x_2 = 0$$

является интегральным. Наконец,

$$\frac{d(z_2 - x_2^2)}{dt} = 2z_1z_2 + 2z_3 - 2x_2(x_1z_1 + x_2)$$

или

$$\frac{d(z_2 - x_2^2)}{dt} = 2z_1(z_2 - x_1x_2) + 2(z_3 - x_2^2)$$

Поэтому многообразиие

$$z_1 = x_1^2, z_2 = x_1x_2, z_3 = x_2^2$$

является интегральным.

Число дополнительных переменных, вводимых при квадратизации по Аппельроту, может быть чрезмерным. В настоящее время разработан алгоритм, позволяющий в некоторых случаях существенно уменьшить это число [13]. Его реализация, написанная А. Бычковым [14], далее используется для квадратизации в сложных случаях.

### 3. Точки ветвления при дискретизации по Кагану

В скалярном случае аналитические свойства решений дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (6)$$

с квадратичной правой частью, то есть уравнения Риккати, хорошо изучены [15]. Во-первых, общее решение уравнения Риккати задает бирациональное соответствие между начальным и конечным значениями. Аппроксимация уравнения Риккати по схеме Кагана наследует это свойство. Во-вторых, уравнение Риккати обладает свойством Пенлеве, то есть имеет в качестве подвижных особых точек только полюса. При дискретизации по Кагану наследуется и это свойство: приближенное решение уходит на бесконечность и возвращается обратно без заметного накопления ошибки [9, п. 6]. Более того, схема Кагана верно описывает поведение решения после подвижных, соответствующие оценки были указаны в [16].

Однако, если правая часть скалярного уравнения (6) является полиномом, степень которого строго больше 2, то его общее решение уже не задает взаимно-однозначного соответствия между начальным и конечным значениями. Тем не менее, квадратизация позволяет заменить системой с квадратичной правой частью, а схема Кагана — аппроксимировать эту систему таким образом, что переход от одного слоя по времени к другому описывается бирациональным преобразованием. Таким образом, приближенное решение обретает алгебраическое свойство, которого не было у решения исходного дифференциального уравнения.

Более того, если степень  $f$  выше 2, то уравнение (6) не обладает и свойством Пенлеве: среди его подвижных точек имеются критические (алгебраические) точки [15]. Однако квадратизация позволяет заменить системой с квадратичной правой частью. Позволит ли схема Кагана подражать алгебраическим особенностям?

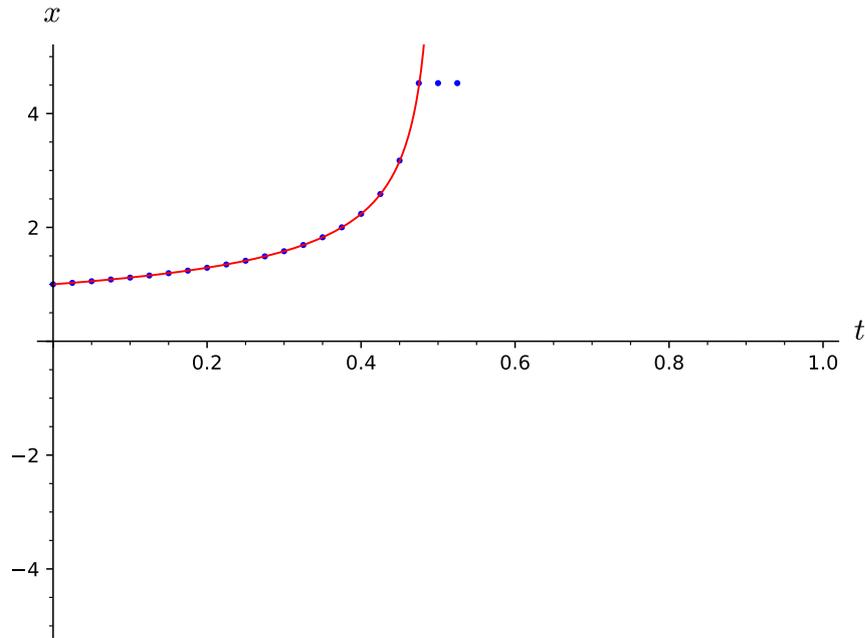


Рис. 1. Решение начальной задачи (7), полученное по схеме Кагана (точки), и точное решение (сплошная линия).

Чтобы ответить на этот вопрос рассмотрим начальную задачу

$$\frac{dx}{dt} = x^3, \quad x(0) = 1, \quad (7)$$

точное решение которой

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \quad (8)$$

имеет точку ветвления при  $t = 1/2$ . Квадратизация по Аппельроту требует введения одной новой переменной  $z = x^2$ . После ее введения, мы получим квадратизованную систему

$$\frac{dx}{dt} = xz, \quad \frac{dz}{dt} = 2z^2 \quad (9)$$

и интегральное многообразие

$$z = x^2,$$

на котором она эквивалентна исходному дифференциальному уравнению.

Для этой системы с квадратичной правой частью составить схему Кагана и найдем по ней решение задачи (7). На рис. 1 видно, что точки приближенного решения ложатся на интегральную кривую задачи (7) только до

точки ветвления  $t = 1/2$ . После этой точки интегральная кривая (8) становится мнимыми, а приближенное решение остается вещественным. Более того, точки приближенного решения ведут себя в точке ветвления так, как будто это полюс нечетного порядка: уходят на бесконечность вверх и возвращаются снизу обратно.

Таким образом, после квадратизации схема Кагана описывает точки ветвления как полюса, существенно отдаляясь от поведения точного решения задачи. Можно сказать, что после квадратизации схема Кагана навязывает приближенному решению свойства, типичные для уравнения Риккати, превращая алгебраические особенности в полюса.

Фактически теорема Аппельрота является причиной целого ряда сложностей как в аналитической теории дифференциальных уравнений, так и в теории схем Кагана. Во-первых, при квадратизации уравнения (6) мы без труда получаем систему с квадратичной правой частью, не обладающую свойством Пенлеве. Отсюда получается, что среди систем с квадратичной правой частью лишь избранные обладают этим свойством, что стало неприятным сюрпризом для аналитиков второй половины XIX века, надеявшихся на интегрирование таких уравнений, в т.ч. уравнений движения гироскопа, в однозначных функциях времени [17]. Во-вторых, при дискретизации систем с квадратичной правой частью по методу Кагана мы можем получить полюса там, где точное решение имеет алгебраическую особенность. Таким образом, схема Кагана не подражает аналитическим свойствам решения системы дифференциальных уравнений, а навязывает этой системе свойство Пенлеве.

#### **4. Интегральные соотношения, описывающие связь между новыми и старыми переменными**

Не менее интересные выводы можно сделать и относительно сохранения алгебраических интегралов. Вспомним, что при квадратизации возникает

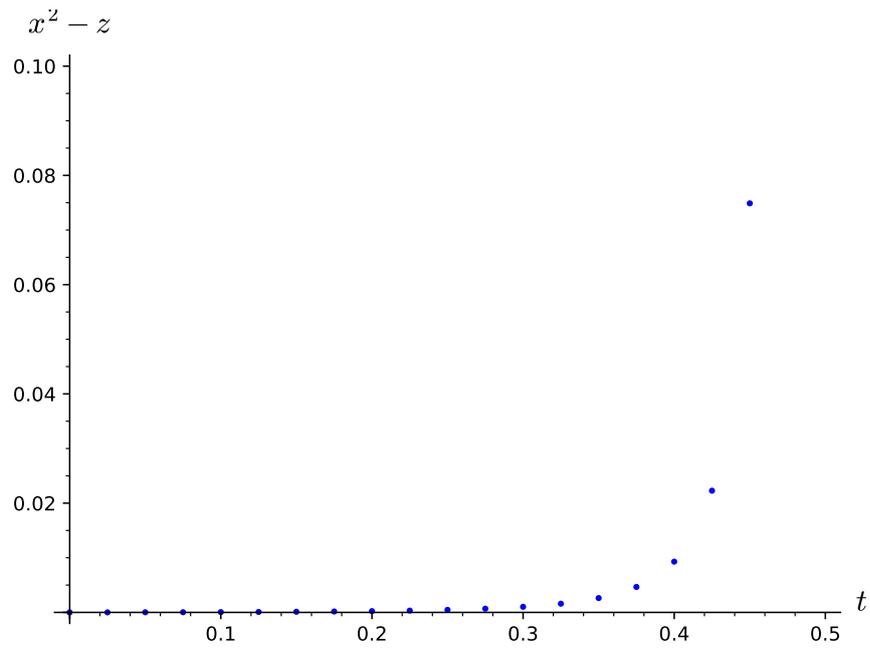


Рис. 2. Значение многочлена  $u = z - x^3$  на решение начальной задачи (7), полученном по схеме Кагана.

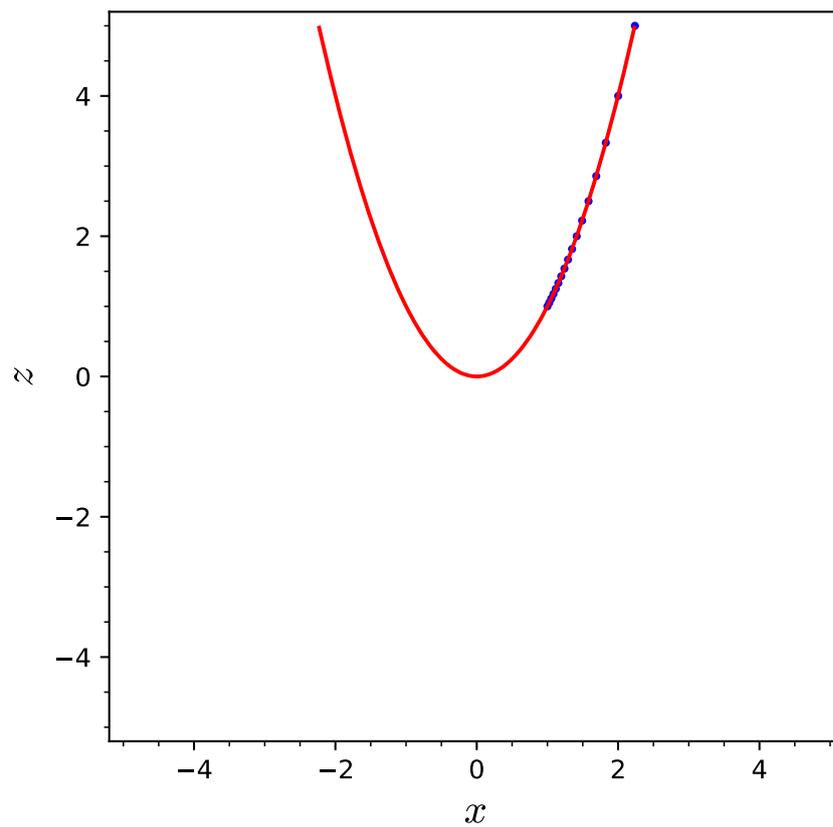


Рис. 3. Решение начальной задачи (7), полученном по схеме Кагана, на плоскости  $xz$  (точки) и парабола  $z = x^2$  (сплошная линия).

целый ряд интегральных соотношений, описывающих связь между исходными переменными и дополнительными переменными.

Например, для дифференциального уравнения (7) имеется одна такая связь

$$z - x^3 = 0. \quad (10)$$

С точки зрения теории интегральных многообразий, многочлен  $u = z - x^3$  является интегралом Дарбу системы (9) в том смысле, что

$$\frac{du}{dt} = 2z \cdot u.$$

Однако в данном случае можно сказать проще, что это интегральное многообразие — линия уровня алгебраического интеграла

$$\frac{z}{x^2} = \text{Const.}$$

системы (9).

На точном решении системы (9) с начальными условиями  $x = 1, z = 1$  многочлен должен быть равен нулю. На рис. 2 представлена зависимость  $u$  на приближенном решении этой задачи, найденном по схеме Кагана. Хорошо видно, что по мере приближения к точке ветвления величина  $u$  становится все больше и больше. В самой точке ветвления эта величина принимает огромное значение порядка  $10^{29}$ . На рис. 3 можно видеть, что точки приближенного решения прекрасно ложатся на параболу  $z = x^2$  до некоторого момента ( $t = 1/2$ ), а затем переходят на кривую  $z = -x^2$ , которая является тоже линией уровня интеграла  $z/x^2$  системы (9), но при другом значении константы.

Этот пример показывает, что интегральные соотношения, описывающие связь между новыми и старыми переменными, нарушаются, причем это нарушение становится особенно приметно в точках ветвления.

Глядя на рис. 3 можно предположить, что точки приближенного решения ложатся на некоторую кривую, которая при  $\Delta t \rightarrow 0$  расщепляется на две параболы, которые являются различными интегральными кривыми рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. Чем больше

на приближенном решении полюсов, заменяющих точки ветвления, тем больше должен быть порядок этой кривой. Отсюда можно сделать важное наблюдение для схем Кагана: алгебраические интегралы этих систем могут иметь существенно больший порядок чем интегралы исходной системы дифференциальных уравнений с квадратичной правой частью. Более того, вполне может оказаться, что число особых точек, а вместе с ним и степень бесконечны, и поэтому интегралы — трансцендентные. Это, в свою очередь, может объяснить, почему для уравнений движения волчка в общем случае не удалось найти выражения для приближенных интегралов на подобие того, как это было сделано для двух классических случаев [6, 10].

## 5. Полиномиальные гамильтоновы системы

Последовательное применение квадратизации по Аппельроту и дискретизации по Кагану позволяет решить приближенно любую динамическую систему с полиномиальной правой частью. В частности мы можем перейти от рассмотрения систем с кубическим гамильтонианом к системам, изученным в [4, 5], с любым полиномиальным гамильтонианом.

Рассмотрим в качестве примера систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^4, \\ \dot{x}_2 = x_1^2. \end{cases}$$

Эта гамильтонова система с гамильтонианом

$$H = \frac{x_1^3}{3} - \frac{x_2^5}{5}.$$

На интегральной кривой

$$\frac{x_1^3}{3} = \frac{x_2^5}{5} + C \tag{11}$$

решение описывается квадратурой

$$\int \frac{dx_2}{\sqrt[2/3]{\frac{3}{5}x_2^5 + 3C}} = t + C'.$$

В том случае, когда гамильтониан является кубическим многочленом, квадратура является эллиптическим интегралом 1-го типа и поэтому  $x_2$  оказывается мероморфной функцией  $t$ . В нашем же случае, обратить квадратуру не получается и поэтому ответ удастся довести только до квадратуры.

Квадратизация ПО, разработанным Бычковым, дает

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = w_0 \cdot x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2, \\ \dot{w}_0 = 2 \cdot w_1 \cdot x_1, \\ \dot{w}_1 = w_0^2 + 2 \cdot w_2 \cdot x_2, \\ \dot{w}_2 = 3 \cdot w_1^2. \end{cases} \quad (12)$$

Разумеется, квадратизация разрушает гамильтонову структуру исходной системы.

Мы нашли решение (12) по методу Кагана. На рис. 4 видно, что почти все его точки лежат с графической точностью на интегральной кривой (11), однако некоторые на нее заметно не попадают. Эти точки соответствуют тому значению  $t$ , при котором приметно нарушаются интегральные соотношения, связывающие переменные  $x_1, x_2$  и  $w_0, w_1, w_2$ . На рис. 5 хорошо видно, что в точке ветвления  $t \approx 0.52$  вспомогательные переменные принимают огромные значения.

## 6. Обсуждение результатов

Для эквивалентности исходной системы дифференциальных уравнений (1) и квадратизованной системы (3)-(5) эти связи очень важны, поскольку порядок у систем разный: только на соответствующем интегральном многообразии квадратизованная система эквивалентна исходной. Разрушение этих связей означает утрату эквивалентности между исходной системой и системой, которая получается после квадратизации по Аппельроту и дис-

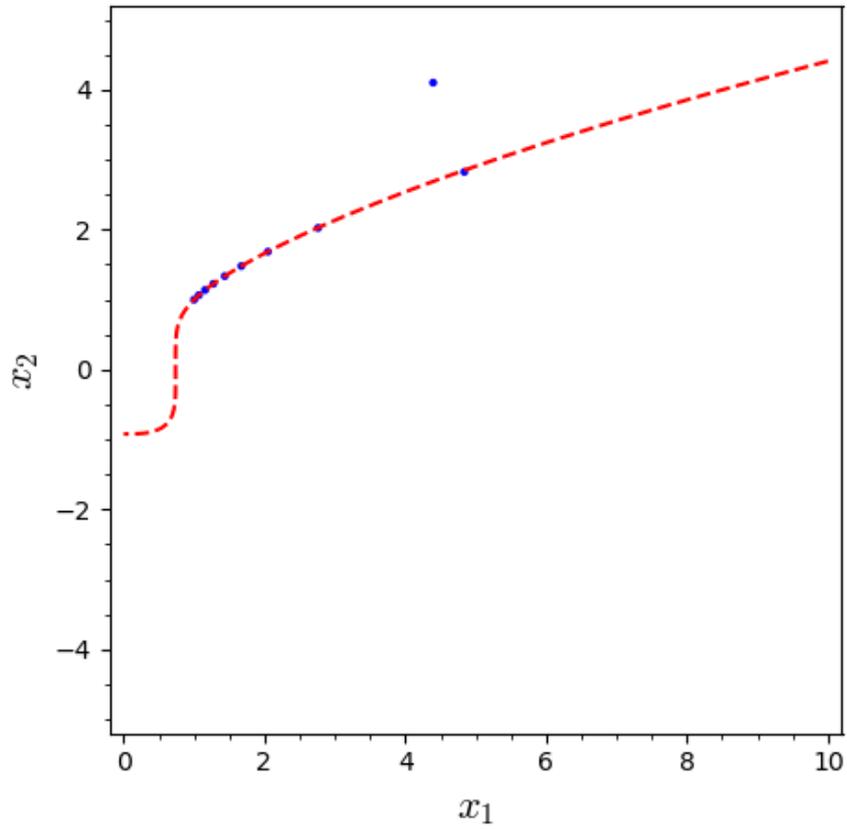


Рис. 4. Решение системы (12), полученном по схеме Кагана, на плоскости  $x_1x_2$  (точки) и интегральная кривая (11) (пунктир).

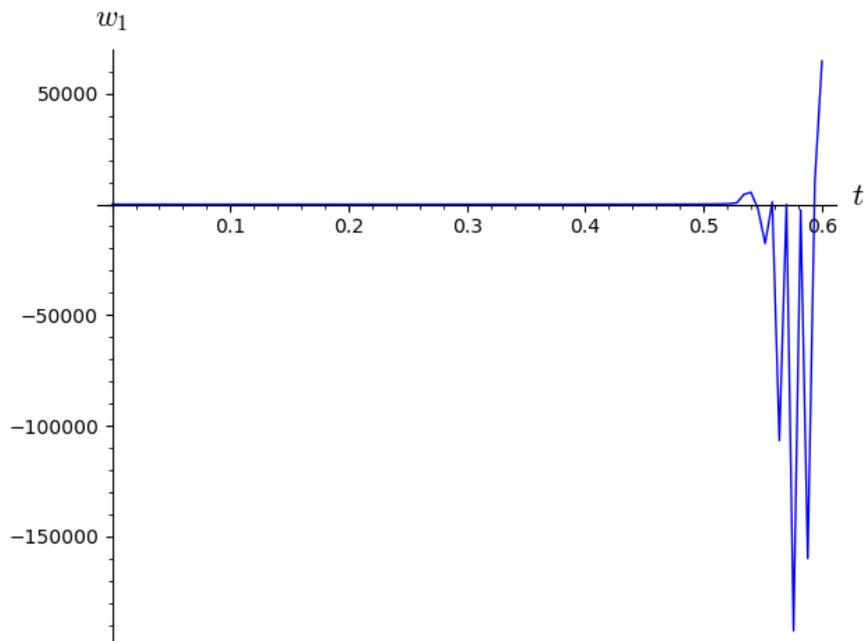


Рис. 5. Решение системы (12), полученном по схеме Кагана.

кретизации по Кагану.

Мы можем объяснить это следующим образом. Ключевое достоинство метода Кагана — получение схемы, которая задает взаимно однозначное соответствие между начальным и конечным положениями системы. Это приводит к наследованию разностной схемы интегралов и прочих свойств исходной динамической системы только в том случае, когда исходная динамическая система обладает этим свойством.

Эллиптические осцилляторы обладают этим свойством с оговорками: описывающие их дифференциальные уравнения задают бирациональное соответствие алгебраическом интегральном многообразии. Эти соответствия не продолжаются до преобразования Кремоны всего пространства, но могут быть приближены таковыми [9]. Разумеется, эллиптические осцилляторы обладают свойством Пенлеве, то есть не имеют подвижных особых точек.

Динамические системы с полиномиальной правой частью, напротив, как правило обладают подвижными точками ветвления. Это приводит к тому, что дифференциальные уравнения в действительности не задают взаимно однозначного соответствия между начальным и конечным положениями системы, вопреки нашим ожиданиям. Квадартизация и дискретизация приводят к дискретной модели той же системы, которая, однако, отличается от исходной именно тем, что она задает взаимно однозначное соответствие между начальным и конечным положениями системы. Для достижения этого мы жертвуем некоторыми алгебраическими свойствами исходной системы дифференциальных уравнений.

С точки зрения математического моделирования вопрос состоит не в том, чтобы дискретная модель как можно точнее соответствовала непрерывной, но в том, чтобы ее свойства хорошо согласовались с общими принципами и наблюдениями. Таким образом, возникает два вопроса.

Во-первых, всегда ли динамическая система должна задавать взаимно однозначное соответствие? Какой физический смысл скрыт в неоднознач-

ности соответствия между начальными и конечными данными?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим систему Калоджеро [18]. Эта система состоит из  $n$  тождественных частиц на прямой, притягивающихся друг к другу с силой, обратно пропорциональной кубу расстояния. Координаты частиц являются корнями уравнения  $n$ -ой степени

$$F(x; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t) = 0,$$

коэффициенты которого зависят рационально от времени и начальных положений  $\mathbf{x}_0$  и скоростей  $\mathbf{v}_0$  тел. Фактически, мы можем алгебраическим путем найти координаты всех  $n$  тел, но не можем понять где какое. С математической точки зрения это означает, что координата  $k$ -го тела  $x_k$  является многозначной аналитической функцией  $t$ , а координаты остальных тел, то есть  $x_1, \dots, x_n$ , суть ее ветви. С физической же точки зрения это означает, что все эти тела тождественны, что подводит нас к концепции алгебродинамики [19]. При моделировании систем с многими частицами не следует ждать взаимно однозначного соответствия. При разработке разностных методов исследования таких моделей можно закладывать в самую разностную модель тот вид многозначности, которой должна бы обладать наша система.

Во-вторых, всегда ли мы готовы пожертвовать алгебраическими интегралами ради сохранения бирациональности?

Интересный с этой точки зрения пример предлагает гироскоп в случае Лагранжа. В [10] было показано, что интеграл, выражающий равенство 1 суммы квадратов трех направляющих косинусов  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , при дискретизации Кагана переходит в соотношение вида

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + c(\Delta t)\gamma_3^2 = 1,$$

где  $c$  — известная рациональная функция  $\Delta t$ , переходящая при  $\Delta t \rightarrow 0$  в 1. Иными словами, за взаимную однозначность между начальным и конечным положениями гироскопа приходится платить искажением законов евклидовой геометрии. Едва ли в классической механике это применимо.

Но тогда нужно или искать другие разностные схемы для волчка, или объяснить физический смысл возникающей тут многозначности.

В заключении отметим, что квадратизация Апфельрота дает важные сведения о методе Кагана для дифференциальных уравнений с квадратичной правой частью. На этом пути мы получаем динамические системы с квадратичной правой частью, имеющих подвижные точки ветвления. Эти системы неизбежно обладают интегралами Дарбу, которые разрушаются при дискретизации по Кагану. Поэтому дискретизация по Кагану систем с квадратичной правой частью не всегда приводит к наследованию алгебраических интегралов. Поэтому не нужно даже пытаться доказывать теоремы о наследовании всех алгебраических интегралов, они заведомо не верны.

## Список литературы

- [1] Severi F. *Lezioni di geometria algebrica*. — Padova : Angelo Graghi, 1908.
- [2] Kahan William, Ren-Chang Li. Unconventional Schemes for a Class of Ordinary Differential Equations – With Applications to the Korteweg–de Vries Equation // *Journal of Computational Physics*. — 1997. — Vol. 134. — P. 316–331.
- [3] Sanz-Serna J. M. An unconventional symplectic integrator of W. Kahan // *Applied Numerical Mathematics*. — 1994. — Vol. 16. — P. 245–250.
- [4] Geometric properties of Kahan’s method / Elena Celledoni, Robert I. McLachlan, Brynjulf Owren, G. R. W. Quispel // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2013. — Vol. 46. — P. 025201.
- [5] Petrerera M., Smirin J., Suris Yu. B. Geometry of the Kahan discretizations of planar quadratic Hamiltonian systems // *Proc. R. Soc. A*. — 2019. — Vol. 475. — P. 20180761.
- [6] Hirota Ryogo, Kimura Kinji. Discretization of the Euler Top // *Journal of the Physical Society of Japan*. — 2000. — Vol. 69, no. 3. — P. 627–630.

- [7] Petrerera M., Suris Yu. B. On the Hamiltonian structure of Hirota-Kimura discretization of the Euler top // *Math. Nachr.* — 2010. — Vol. 283, no. 11. — P. 1654–1663.
- [8] On the Construction of Elliptic Solutions of Integrable Birational Maps / Matteo Petrera, Andreas Pfadler, Yuri B. Suris, Yuri N. Fedorov // *Experimental Mathematics.* — 2017. — Vol. 26, no. 3. — P. 324–341.
- [9] Finite Difference Models of Dynamical Systems with Quadratic Right-Hand Side / Mikhail Malykh, Mark Gambaryan, Oleg Kroytor, Alexander Zorin // *Mathematics.* — 2024. — Vol. 12, no. 1. — P. 167.
- [10] Hirota Ryogo, Kimura Kinji. Discretization of the Lagrange Top // *Journal of the Physical Society of Japan.* — 2000. — Vol. 69, no. 10. — P. 3193–3199.
- [11] Rerikh K. V. Chew-Low equations as Cremona transformations structure of general intgrals // Joint Institute for Nuclear Research, Dubna. Translated from *Teoreticheskayai Matematicheskaya Fizika.* — 1982. — Vol. 0, no. 2. — P. 251–260.
- [12] Appelroth G. G. Die Normalform eines Systems von algebraischen Differentialgleichungen // *Mat. Sb.* — 1902. — Vol. 23, no. 1. — P. 12–23.
- [13] Bychkov Andrey, Pogudin Gleb. Optimal Monomial Quadraticization for ODE Systems // *Combinatorial Algorithms* / Ed. by Paola Flocchini, Lucia Moura. — Cham : Springer International Publishing, 2021. — P. 122–136.
- [14] Bychkov A. — Qbee, 2021. — URL: <https://github.com/AndreyBychkov/QBee>.
- [15] Schlesinger L. Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf functionentheoretischer Grundlagen. — 3 edition. — Berlin-Leipzig : Taubner, 1922.

- [16] Ayrjan E. A., Malykh M. D., Sevastianov L. A. On Difference Schemes Approximating First-Order Differential Equations and Defining a Projective Correspondence Between Layers // J. Math. Sci. — 2000. — Vol. 240. — P. 634–645.
- [17] Golubev V. V. Lectures on integration of the equations of motion of a rigid body about a fixed point. — Jerusalem : Israel Program for Scientific Translations, 1960.
- [18] Moser J. Integrable Hamiltonian Systems and Spectral Theory. — Edizioni della Normale, 1983.
- [19] Kassandrov V. V., Khasanov I. S. Algebrodynamics: Super-Conservative Collective Dynamics on a “Unique Worldline” and the Hubble Law // Gravit. Cosmol. — 2023. — Vol. 29, no. 1. — P. 50–56.