On Integration of the Differential Equations In Finite Terms and Their Numerical Solutions

POLYNOMIAL COMPUTER ALGEBRA, 2015

Мих. Дмитр. Малых

ФНМ МГУ

14 апр. 2015 г., версия от 11 апреля 2015 г.

XIX век: решения в степенных рядах

Cauchy, 1842:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad \Rightarrow \quad y = y_0 + f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \dots$$

Классификация уравнений по особенностям:

Признак	Решение	Тип д.у.
нет особенностей	целая функция	$y' = py + q$; F. Rellich, 1943
$y = \frac{A}{(x-c)^n} + \dots$	отношение целых функций	$y' = py^2 + qy + r$; L. Fuchs, 1860-е г.
$y = \frac{A}{(x-c)^{m/n}} + \dots$	???	$y' = f(x,y)$; Painlevé, 1897

Особые точки и конечные разности

- XIX век: разложение в степенной ряд — численный метод решения дифференциальных уравнений.
- XX век: метод конченых разностей вытесняет прочие как численный метод решения дифференциальны уравнений.
- Конфликт: разложения в ряд основаны на анализе особенностей, а при приближении к особой точки метод конечных разностей разваливается.

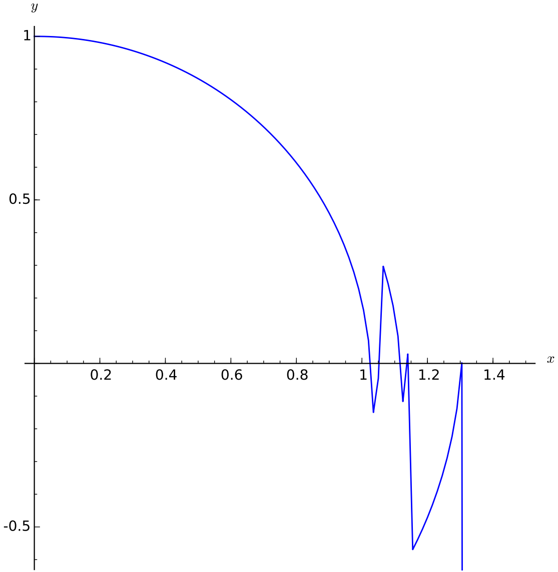
Пример: прохождение алгебраической особой точки

M. Hamburger, 1877.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = C.$$

```
sage: f=lambda x,y: -x/y
sage: N=100
sage: dx=(1.5/N).n()
sage: P=[[0,1]]
sage: for n in range (0,N): P.append([P[n
    ][0]+dx, P[n][1]+f(P[n][0],P[n][1])*dx])
```

Ответ



Замечание

Conte и Musette [Ablowitz, 2000]: разностное уравнение

$$\Delta y = f(x, y, \Delta x)$$

обладает свойством Пенлеве, если оно допускает общее решение $y = \varphi(x, \Delta x)$ в некоторой окрестности точки $\Delta x = 0$, которое как функция x имеет в качестве подвижных особых точек разве только полюса.

Символьное решение

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = C$$

Дифференциальное уравнение 1-го порядка называют разрешимым в конченом виде, если:

- интеграл u можно выразить через x и y при помощи конечного числа элементарных операций (Зингер, 1990-е г.);
- решение y можно выразить через x при помощи конечного числа операций элементарных операций (Лиувилль, 1830-е г.).

Список допустимых элементарных операций варьируется от исследования к исследованию. У Лиувилля к числу допустимых операций отнесено и вычисление интеграла.

CAS для решения дифференциальных уравнений в символьном виде

$$p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \mu(pdx + qdy) = C.$$

- 1960-е г., Soldier (J. Moses): за конченое число действий можно отыскать в квадратурах множитель вида $\mu(x)$ или $\mu(y)$ или убедится в отсутствии такового.
- 1990-е г., DETools on Maple (Cheb-Terrab): за конечное число действий можно выяснить, допускает ли уравнение симметрию

$$\xi = f(x), \quad \eta = g(x)y + h(x);$$

причем 78 % уравнений из Камке допускают [Cheb-Terrab, T. Kolokolnikov, 2003].

Пример: решение в W-функциях Ламберта

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x(y+1)} \quad \Rightarrow \quad ye^y = Cx \quad \Rightarrow \quad y = \mathrm{WLambert}(Cx).$$

- W-функции Ламберта не является элементарной [Bronstein, 2008], но добавлена в большинство систем компьютерной алгебры. Можно ли расширять так просто список элементарных функций?
- Простейший способ вычислить ее значение — решить задачу
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x(y+1)}, \quad y|_{x=e} = 1$$
методом конечных разностей. Ответ оказывается сложнее исходной задачи?

Алгебраические изыскания Пенлеве

Идея: интегралы, которые зависят от y алгебраически, наиболее полезны.

Теорема (Painlevé, 1890)

Если общее решение дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \quad f \in \mathbb{C}(x, y)$$

зависит от константы алгебраически, то уравнение сводится алгебраической заменой к уравнению Риккати.

Пример: уравнение Бернулли

$$y' = p(x)y + q(x)y^n, \quad y = (\alpha(x)C + \beta(x))^{-1/(n+1)}$$

Алгебраические интегралы

Königsberger L., 1880-е г.: если дифференциальное уравнение допускает алгебраический интеграл, то оно допускает и рациональный интеграл.

$$y' = f(x, y) \quad \Rightarrow \quad \frac{a_0 y^l + \dots}{b_0 y^l + \dots} = C,$$

где коэффициенты $a_0, \dots$ являются аналитическими функциями x.
Базис трансцендентности поля, порожденного этими функциями над полем $\mathbb{C}(x)$, будем называть трансцендентными функциями, вводимыми интегрированием уравнения.

Соответствие между слоями

Уравнение

$$u(x_1, y_1) = u(x_0, y_0)$$

задает (l, l)-значное проективное соответствие между слоями $x = x_0$ и $x = x_1$.

Отступление [Cremona, Introd., §24]

На прямой точку M называют гармоническим среднем точек $A_1, \ldots, A_l$ относительно полюса O, если

$$\frac{MA_1}{A_1O} + \cdots + \frac{MA_l}{A_lO} = 0.$$

Соответствие между двумя разбиениями прямой на системы по l точек называют проективным, если соответствие между гармоническим средними точек этой промой является дробно-линейным.

Геометрический смысл теоремы Пенлеве

Если дифференциальное уравнение задает $(1,1)$-соответствие между слоями, то

$$y = \frac{a(x,x_0)y_0 + b(x,x_0)}{c(x,x_0)y_0 + d(x,x_0)} \quad \Rightarrow \quad y' = py^2 + qy + r.$$

Если дифференциальное уравнение задает (l,l)-соответствие между слоями, то дробно-линейным соответствием связаны гармонические средние систем l точек, на которые подразделяется слой.

Пример:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 = x_0^2 + y_0^2$$

Здесь $l = 2$, прямая разбита на пары $(y, -y)$, а y^2 при переходе со слоя $x = x_0$ на $x = x_1$ испытывает линейную подстановку.

Развитие алгебраических изысканий Пенлеве

- В XX веке алгебраические результаты Пенлеве рассматривали как не вполне строгую подпорку для обоснования неэлементарности трансцендентных Пенлеве. За период между 1914 и 1990 им не было посвящено ни строчки [Hiroshi Umemura, 1990].
- Теорема Пенлеве — фрагмент своеобразной версия теории Галуа для нелинейных дифференциальных уравнений, в которой изначально не фиксируется список допустимых трансцендентных операций.[PCA'2014]
- Алгебраические изыскание Пенлеве не связаны с анализом особенностей и поэтому прекрасно сочетаются с методом конченых разностей.

Конечные разности и уравнение Риккати

Уравнение Риккати

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

задает бирациональное соответствие между слоями $x = a$ и $x = b$.
Схема Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + (p_n y_n^2 + q_n y_n + r_n)dx$$

задает $(1, 2)$-соответствие между соседними слоями.
Схема

$$y_{n+1} = y_n + (p_n y_n y_{n+1} + q_n y_n + r_n)dx$$

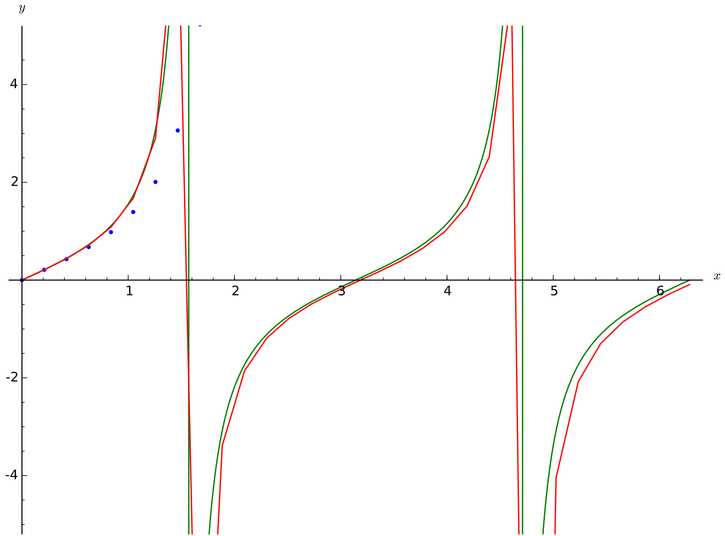
задает $(1, 1)$-соответствие между соседними, а следовательно, и любыми слоями.

Пример 1

$$y' = 1 + y^2, \quad y|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \tan x.$$

```
sage: p=lambda x: 1
sage: q=lambda x: 0
sage: r=lambda x: 1
sage: N=30
sage: dx=(2*pi/N).n()
sage: P=[[0,0]]
sage: for n in range (0,N/2): P.append([P[n][0]+dx, P[n][1]+(p(P[n][0])*(P[n][1])^2+q(P[n][0])*(P[n][1])+r(P[n][0]))*dx])
sage: Q=[[0,0]]
sage: for n in range (0,N): Q.append([Q[n][0]+dx, ((1+q(Q[n][0])*dx)*Q[n][1]+p(Q[n][0])*dx) / (1-r(Q[n][0])*dx*Q[n][1])])
```

Ответ

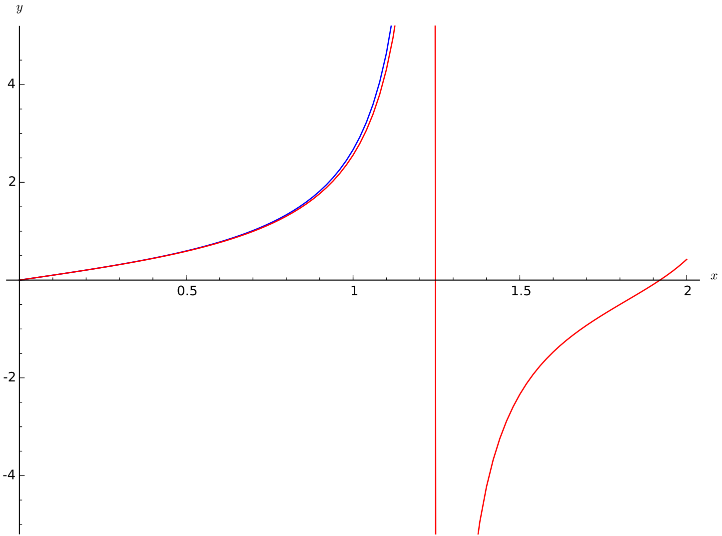


Пример 2

$$y' = 1 + x^2 + xy + x^2y^2, \quad y|_{x=0} = 0$$

```
sage: p=lambda x: 1+x^2
sage: q=lambda x: x
sage: r=lambda x: x^2
sage: N=100
sage: dx=(2/N).n()
sage: Q=[[0,0]]
sage: for n in range (0,N): Q.append([Q[n][0]+
    dx, ((1+q(Q[n][0])*dx)*Q[n][1]+p(Q[n][0])*dx
    ) / (1-r(Q[n][0])*dx*Q[n][1])])
sage: x,y=var('x,y')
sage: P=desolve_rk4(p(x)+q(x)*y+r(x)*y^2,y,ics=
    P[0], end_points=2,step=dx)
```

Ответ



Конечные разности и уравнение Риккати

- Для уравнения Риккати можно составить р.с., задающую $(1,1)$-соответствие между слоями.
- Р.с., задающая $(1,1)$-соответствие между слоями, аппроксимирует уравнение Риккати.
- Ангармоническое отношение четырех точек сохраняется при переходе от слоя к слою.
- Если точное решение имеет полюс, то приближенное решение уходит на бесконечность и возвращается без заметного накопления ошибки.

Эйлер

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = y_n + \frac{x_n^2 - y_n^2}{a^2}\Delta x$$

«Погрешность при этом вычислении происходит оттого, что на протяжении каждого отдельного промежутка обе переменные x и y принимающими сохраняющими свои значения, соответствующими началу этого промежутка, так что и значение функции $f(x, y)$ остается постоянным, поэтому: чем быстрее значение этой функции меняется от одного промежутка к следующему, тем большую можно ожидать погрешность. Это невыгодное обстоятельство имеет место обыкновенно там, где значения $f(x, y)$ или уничтожаются, или же становятся бесконечно большими.» — Цит. по [Крылов, 1933].

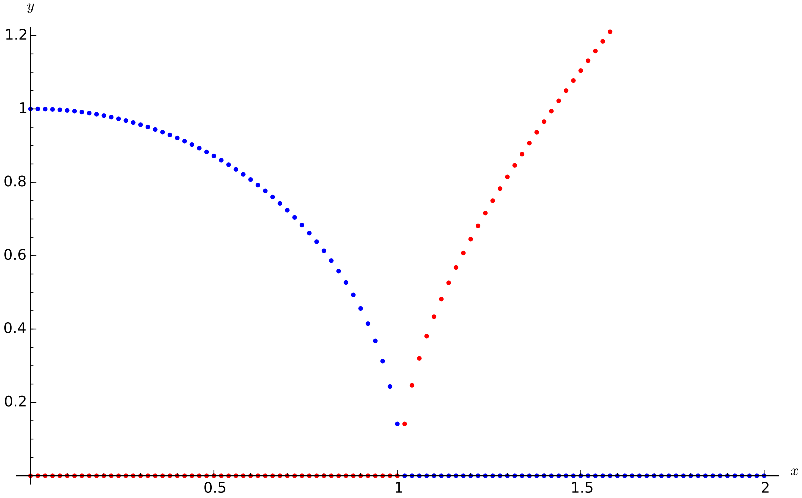
Уравнение, задающее $(2,2)$-соответствие между слоями

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad y_{n+1}^2 = y_n^2 - 2x_n dx$$

Для перехода от 0-го слоя к n-му следует исключать переменные $y_1, \ldots, y_{n-1}$. В одномерном случае всегда можно ввести новую переменную, в данном случае $z_n = y_n^2$.

```
sage: N=100
sage: dx=(2/N).n()
sage: Q=[[0,1]]
sage: for n in range (0,N): Q.append([Q[n][0]+
    dx, Q[n][1] - 2*Q[n][0]*dx])
sage: P1 =[[i, real(sqrt(j))] for i,j in Q]
sage: P2 =[[i, imag(sqrt(j))] for i,j in Q]
```

Ответ



Синий — вещественная часть, красный — мнимая.

Как составлять (l,l)-разностные схемы?

Переход с одного слоя на другой дается формулой

$$(\hat{y}-y)G(y,\hat{y})+F(y,\hat{y})dx=0,$$

где G и F — многочлены степени $l-1$ и l относительно y и $\hat{y}$.
Условия:

- Р.с. аппроксимирует дифференциальное уравнение $y'=f(x,y)$.
- Переход между двумя званиями согласован: исключение из системы, связывающей $y,\hat{y}$ и $\hat{\hat{y}}$ переменной $\hat{y}$ дает уравнение, степень которого относительно y и $\hat{\hat{y}}$ равна l.

Пример: $l = 2$

Переход с n-го слоя на $(n+1)$-ый дается формулой

$$(\hat{y} - y)(ay + b\hat{y} + c) + \dots dx = 0.$$

Условие согласования при $dx = 0$:

```
sage: R.<y,a,b,c,hy,ha,hb,hc,hhy> = PolynomialRing(QQ, 9)
sage: I=R*[(hy-y)*(a*y+b*hy+c),(hhy-hy)*(ha*hy+hb*hhy+hc)]
sage: I.elimination_ideal([hy]).gens()[0].factor()
(-y + hhy) * (y*ha + hb*hhy + hc) * (y*a + b*hhy + c) * (-y*a*ha + b*hb*hhy - c*ha + b*hc)
```

Множители попарно должны совпадать: $c = \hat{c} = 0$, $a = \hat{a} = 1$, $b = \hat{b} = 1$.

Обобщение: уравнение $F(y', y; x) = 0$

Теорема (A. Hurwitz, 1880-е г.)

Если род p кривой

$$F(x, y) = 0$$

больше 1, то она допускает не более чем $84(p-1)$ бирациональных автоморфизмов.

Между слоями

$$F(z_0, y_0; x_0) = 0 \quad \leftrightarrow \quad F(z_1, y_1; x_1) = 0$$

имеется конечное число $(1, 1)$ преобразований. Условие $z = \frac{dy}{dx}$ не важно.

- Имеется ли софт для вычисления `bir(C)`?
- Что можно сказать про (l, l)-соответствия?

Обобщение алгебраических изысканий Пенлеве

- Hiroshi Umemura, 1990: если общее решение уравнения $F(y^{(n)}, \dots, y, x) = 0$ зависит от начальных данных рационально, то оно выражается через x при помощи решений линейных дифференциальных уравнений и абелевых функций.
- Малых М.Д., PCA'2014: если интегрирование системы дифференциальных уравнений вводит r трансцендентных функций, то поле интегралов системы допускает r-параметрическую группу $\mathbb{C}$-автоморфизмов.

Системы типа Вольтерра-Лотки

Разностная схема

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + (a_n x_n x_{n+1} + \dots)dt, \\ y_{n+1} = y_n + (b_n x_n x_{n+1} + \dots)dt, \end{cases}$$

задает $(1,1)$-соответствие между слоями и аппроксимирует

$$\begin{cases} \dot{x} = a(t)x^2 + \dots, \\ \dot{y} = b(t)x^2 + \dots, \end{cases}$$

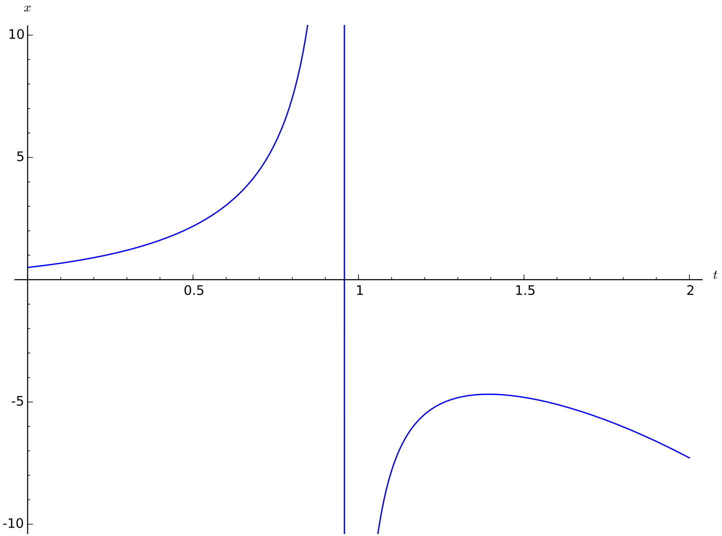
хотя сама система дифференциальных уравнений не обладает этим свойством, ср. [Maharaj, Leach, 2006].

Пример

$$\begin{cases} \dot{x} = (a - by)x, \\ \dot{y} = -(d - cx)y, \end{cases}$$

```
sage: a=1
sage: b=-1
sage: c=1
sage: d=1
sage: N=500
sage: dt=(2/N).n()
sage: P=[[0,0.5,2]]
sage: for n in range (0,N): P.append([(P[n][0]+
    dt), (P[n][1]/(1-(a-b*P[n][2])*dt)), (P[n
    ][2]/(1+(d-c*P[n][1])*dt))])
```

Ответ



Трудности обобщения на системы дифференциальных уравнений

- Для системы дифференциальных уравнений, не задающий $(1,1)$-соответствия между слоями, можно составить схему, задающую такое соответствие. Причина: хотя группа преобразований Кремоны порождается коническими преобразованиями [М. Нётер и Розанес, 1871], их суперпозиция может дать преобразование любой степени.
- Преобразования Кремоны имеют критические точки, к которым «притягиваются» приближенные решения.
- Для перехода от слоя к слою в (l,l)-схемах трюк с введением новой переменной не удастся и придется использовать технику исключительных идеалов.

Заключение

- Алгебраический подход к интегрированию дифференциальных уравнений, восходящий к ранним работам Пенлеве, переносится на разностные схемы.
- Разностные схемы, задающие (l, l)-соответствие, между слоями преодолевают алгебраические особые точки без накопления ошибки.

Конец