Об интегрировании дифференциальных уравнений первого порядка в конечном виде

V конференция
«Проблемы математической и теоретической физики и математическое моделирование»

Мих. Дмитр. Малых

ФНМ МГУ

5 апреля 2016 года, ауд. К-1109;
версия от 3 апреля 2016 г.

Символьное интегрирование в CAS

В каждом конкретном случае более-менее понятно, почему то или иное выражение считается аналитическим решением дифференциального уравнения.

Maple 17 (X86 64 LINUX)

```
> dsolve(diff(y(x),x)=y(x)^2+x,y(x));
         _C1 AiryAi(1, -x) + AiryBi(1, -x)
y(x) = ---------------------------------
            _C1 AiryAi(-x) + AiryBi(-x)
```

Неудача при символьном интегрировании

Maple 17 (X86 64 LINUX)

```
> dsolve(diff(y(x),x)=y(x)^3+x,y(x));
(...)
memory used=10325.1MB, alloc=44.3MB, time=109.33
Interrupted
```

Что означает неспособность того или иного пакета отыскать аналитическое решение?

Soldier; J. Moses, 1962

Решение в квадратурах дифференциального уравнения

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$$

будет силами первого интегратора было бы найдено в двух случаях:

- если оно допускает множитель μ, зависящий только от x или только от y;
- если уравнение можно переписать в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}F(x^p y)$$

Здесь очевидно, что имеется множество других случаев, когда уравнение допускает аналитическое уравнение.

Абак в Maple; E.S. Cheb-Terrab, 2000-е годы

Soldier искал множители вида $\mu = f(x)$ или $\mu = f(y)$, а Абак — инфинитезимальные операторы вида $\{\xi = 0,\ \eta = f(x)\}$ и т.д., что дает множители вида

$$\mu = \frac{1}{y \cdot f(x)}$$

и т.д.

Тестирование `DETools` на Камке: авторы XIX - нач. XX веков занимались интегрирование дифференциальных уравнений с симметрией

$$\xi = f(x), \quad \eta = g(x) \cdot y + h(x).$$

Де-факто это и есть ответ на вопрос о том, что такое аналитическое решение.

Задача I.

Задача Дебона

Задача (Florimond de Beaune, 1640-е г.)

Выяснить, допускает ли заданное дифференциальное уравнение

$$pdx + qdy = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y],$$

интеграл w из $\mathbb{C}(x, y)$.

Если дифференциальное уравнение допускает рациональный интеграл, то его интегральные кривые составляются неприводимый линейный пучок.
Открытая проблема: найти оценку сверху для порядка кривых этого пучка [Chese, 2010].

Может ли решить Maple в 2016 году задачу Дебона?

Пусть u, v — произвольные многочлены, тогда $w = u/v$ является интегралом дифференциального уравнения

$$\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) dy = 0$$

Взяв

$$u = x^4y^{11} + x^{10} + y, \quad v = 2x^{11}y^8 + y^{10} + 3xy,$$

получим дифференциальное уравнение, которое `dsolve` сводит к квадратуре на два экрана:

$$\int r dx + s dy = C, \quad r, s \in \mathbb{Q}(x, y),$$

интегралы Maple взять не может!

Решение задачи Дебона

Методы отыскания рациональных интегралов *заданного* (!) порядка N:

- М.Н. Лагутинский, 1913. Метод определителей Лагутинского; современное изложение [Chéze, 2010], [4].
- Jacques-Arthur Weil, 1985. Метод, основанный на разложении в степенной ряд; современное изложение и обсуждение реализации дано в [Bostan et all, 2014].

Метод Лагутинского

Пусть $R = \mathbb{Q}[x, y]$ — кольцо с дифференцированием D, полем констант $\mathbb{Q}$ и базисом

$$\{1, y, x, y^2, xy, x^2, \ldots\}.$$

Рациональный интеграл:

$$Dw = 0, \quad w \in \mathbb{C}(x, y).$$

Определитель Лагутинского n-го порядка:

$$\Delta_n = \det \begin{pmatrix} 1 & y & x & \ldots \\ 0 & Dy & Dx & \ldots \\ 0 & D^2y & D^2x & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Теоремы об определителях Лагутинского

Теорема (прямая)

Если Δ_n обращается в нуль, то рациональный интеграл существует и его можно найти как отношение миноров этого определителя по формулам, подобным формулам Крамера:

$$\exists n \in \mathbb{N} : \ \Delta_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists w \in \mathbb{Q}(x, y) : \ Dw = 0$$

Теорема (обратная)

Если рациональный интеграл существует, то все определители Лагутинского достаточно большого порядка обращаются в нуль:

$$\exists w \in \mathbb{C}(x, y) : \ Dw = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \ \Delta_n = 0.$$

Реализация метода Лагутинского

```
sage: R.<x,y> = PolynomialRing(QQ, 2)
sage: D=lambda phi: y*(x+1)*diff(phi,x)+(y^2+x+2)*diff(phi,y)
sage: B= sorted(((1+x+y)^5).monomials(), reverse=0)
sage: lagutinski_det(5,B)==0
False
sage: lagutinski_det(6,B)==0
True
```

Поскольку $\Delta_6 = 0$, интегралом будет:

```
sage: lagutinski_integral(6,B)
(-54*x^2 + 18*y^2 - 72*x)/(-18*y^2 - 36*x - 54)
```

Возможности метода Лагутинского

Получается:

1. выяснить, имеется ли у заданного дифференциального уравнения рациональный интеграл заданного порядка;
2. оптимизировать этот процесс в случае, когда интеграл является отношением малочленов;
3. сформулировать простые достаточные условия отсутствия рационального интеграла у дифференциальных уравнений, с особыми точками типа Брио и Буке.

Не получается:

1. оценить сверху порядок N интеграла в общем случае;
2. проводить вычисления быстро, поскольку задача вычисления определителей порядка $N \simeq 10 \div 20$ в $\mathbb{Q}[x, y]$ часто оказывается «тяжелой».

Задача II.

Квадратуры

Два типа квадратур:

$$\sum f(x_n)\Delta x \to \int\limits_{x=a}^{b} f(x)dx$$

$$\prod(1 + f(x_n)\Delta x) \to e^{\int\limits_{x=a}^{b} f(x)dx}$$

В классических изыскания возникает смешение квадратур и элементарных функций из-за того, что P-интегралы выражаются через S-интегралы при помощи экспоненты. Элементарные функции для построения лиувиллиевой теории не нужны.

Задача об интегрировании в квадратурах

Задача

Для заданного дифференциального уравнения

$$pdx + qdy = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$$

выяснить, интегрируется ли оно в S- и P-квадратурах.

Расшифровка:

$$F(x, y, \alpha_1, \ldots, \alpha_r, C) = 0,$$

где

$$\alpha_1 = \int u_1 dx + v_1 dy \quad \text{или} \quad e^{\int u_1 dx + v_1 dy}, \quad u_1, v_1 \in \overline{\mathbb{Q}[x, y]}$$

Теорема Зингера

Теорема (M. Singer, 1992)

Если дифференциальное уравнение

$$pdx + qdy = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$$

интегрируется в S- и P-квадратурах, то:

1. *существует интегрирующий множитель, который является P-интегралом 1-го порядка, т.е.*

$$\mu = e^{\int udx+vdy}, \quad u, v \in \mathbb{Q}[x, y].$$

2. *существует интеграл, который является S-интегралом 2-го порядка.*

Отыскание u и v сводится к задаче типа Дебона. Ср. [Avellar, 2006], [Cheze, 2014].

Задача III.

Задача Пенлеве

Задача (Пенлеве, 1890)

Выяснить, допускает ли заданное уравнение

$$pdx + qdy = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$$

общее решение, которое зависит от константы алгебраически.

Польза:

- Решение задачи Коши становится чисто алгебраическим.
- Можно построить разностную схему, которая проходит через особые точки без потери точности [3].

Сведение к уравнению Риккати

Теорема (Пенлеве, 1890)

Если общее решение дифференциального уравнения первого порядка

$$pdx + qdy = 0, \quad p, q \in k[y],$$

зависит от константы алгебраически, то существует и притом единственная подстановка

$$z = r(x, y), \quad r \in K(y),$$

которая переводит исходное уравнение в уравнение Риккати, а три произвольные функции из K — в другие три произвольные функции из K.

Здесь $k \subset K$ — поля функций переменной x.

Пример

Уравнение:

$$(x^4 - 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 - y^2)dx + (x^2 + 2xy - y^2)dy = 0$$

Ищем подстановку 2-го порядка, оставляющая на месте $0, 1$ и ∞:

$$z = \frac{y(y + a_1)}{a_2 y + (1 + a_1 - a_2)}.$$

Ответ:

$$z = \frac{1 - x}{1 + x}\frac{y(y + x)}{y - x}.$$

Нерешенная трудность: определение порядка подстановки.

Пример: решение при помощи пакета riccati.sage

```
sage: x,y,a1,a2=var('x,y,a1,a2')
sage: p=x^4 - 2*x^3*y + 2*x*y^3 + y^4 + 2*(x^2 - 1)*y^2
sage: q=x^2 + 2*x*y - y^2
sage: u=y*(y+a1)
sage: v=y*a2 +(1+a1-a2)
sage: J=riccati_ideal(x,y,p,q,[a1,a2],u,v)
sage: J.elimination_ideal(a2).gens()[0].factor()
(-1) * (-a1 + x) * (a1 + 1) * x^4 * (6*x^2 - 1)
sage: J.elimination_ideal(a1).gens()[0].factor()
a2 * x^4 * (6*x^2 - 1) * (a2*x - a2 + x + 1)
```

Литература

- Малых М.Д. Об интегралах систем обыкновенных дифференциальных уравнений, представимых в конечном виде. // Вестник РУДН. Сер. математика, информатика, физика. 2014. № 3. Стр. 11-16.
- Малых М.Д. О трансцендентных функциях, возникающих при интегрировании дифференциальных уравнений в конечном виде // Записки научных семинаров ПОМИ. 2015. Т. 432. Стр. 196-223.
- Малых М.Д. О дифференциальных уравнениях, общее решение которых является алгебраической функцией константы // Вестник НИЯУ МИФИ, 2016. Том 5, № 2.
- Малых М.Д. Об отыскании рациональных интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений по методу М.Н. Лагутинского // Отослана в Вестник НИЯУ МИФИ, 2016.

Конец

Вычисления выполнены при помощи Sage Mathematics Software, ver. 7.0, Release Date: 2016-01-19.
Дополнительные материалы доступны на сайте автора: `http://malykhmd.neocities.org`.