

Об интегрировании дифференциальных уравнений

в системах компьютерной алгебры

Мих. Дмитр. Малых* **

*Факультет наук о материалах МГУ.

**Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей РУДН.

`malykhmd@yandex.ru`

Версия от 15 мая 2016 г.

Введение.

Символьное интегрирование в CAS

В каждом конкретном случае более-менее понятно, почему то или иное выражение считается аналитическим решением дифференциального уравнения.

Maple 17

```
| \ ^ / |      Maple 17 (X86 64 LINUX)
._ | \ |      | / | _ . Copyright (c) Maplesoft, ... 2013
 \  MAPLE    /  All rights reserved.
 < _ _ _ _ _ >  Waterloo Maple Inc.
      |          Type ? for help.
> dsolve(diff(y(x),x)=y(x)^2+x,y(x));
      _C1 AiryAi(1, -x) + AiryBi(1, -x)
y(x) = -----
      _C1 AiryAi(-x) + AiryBi(-x)
```

Неудача при символьном интегрировании

Maple 17

```
> dsolve(diff(y(x),x)=y(x)^3+x,y(x));  
(...)  
memory used=10325.1MB, alloc=44.3MB, time=109.33  
Interrupted
```

Что означает неспособность того или иного пакета отыскать аналитическое решение?

Краткая история CAS

- 1959 SAINT, James R. Slagle
- 1967 SIN & Soldier, Joel Moses
- 1968 Macsyma, Carl Engelman, William A. Martin and Joel Moses
- 1982 Maple, Maxima
- 1996 DETools for Maple, E.S. Cheb-Terrab, L.G.S. Duarte and L.A.C.P. da Mota
- 2005 Sagemath, William A. Stein
- 2007 Lsolver, J. Avellar, L.G.S. Duarte, L.A.C.P. da Mota and M.S. Cardoso

Joel Moses, MIT



Источник: <http://mac50.csail.mit.edu/node/165>

Soldier; J. Moses, 1967

Решение в квадратурах дифференциального уравнения

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y],$$

силами первого интегратора было бы найдено в двух случаях:

- если оно допускает множитель μ , зависящий только от x или только от y ;
- если уравнение можно переписать в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} F(x^p y)$$

Здесь очевидно, что имеется множество других случаев, когда уравнение допускает аналитическое уравнение.

Интегрирующий множитель вида $\mu(x)$

Теорема

Уравнение

$$pdx + qdy = 0$$

допускает интегрирующий множитель, зависящий только от x , в том и только в том случае, когда

$$\frac{1}{q} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right)$$

не зависит от y . Этот множитель можно вычислить по формуле

$$\mu = \exp \left(\int \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) \frac{dx}{q} \right).$$

Пример: отыскание множителя

```
sage: var('x,y,xi,eta,c') 1
(x, y, xi, eta, c) 2
sage: D2=lambda p,q: (diff(p,y)-diff(q,x))/q 3
sage: p = 2*x*y^2 + 2*x^2 + 1 4
sage: q = 2*y 5
sage: r=D2(p,q).full_simplify() 6
sage: diff(r,y) 7
0 8
sage: mu= exp(integral(r,x)) 9
sage: mu 10
e^(x^2) 11
```

Пример: отыскание интеграла

```
sage: assume(x>0) 12
None 13
sage: u= integral((mu*p).subs(x=xi),(xi,0,x) 14
      ) + integral((mu*q).subs(x=0).subs(y=eta)
      ,(eta,0,y))
sage: u 15
y^2*e^(x^2) + x*e^(x^2) 16
```

Групповой анализ

Задача: создать алгоритм, не зависящий от формы записи ОДУ.

Теорема (Софуса Ли)

Если дифференциальное уравнение

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$$

обладает симметриями

$$x_1 = x_0 + \xi(x_0, y_0)\varepsilon + \dots \quad y_1 = y_0 + \eta(x_0, y_0)\varepsilon + \dots,$$

то оно обладает и интегрирующим множителем

$$\mu = \frac{1}{p\xi + q\eta}.$$

Абак в Maple; E.S. Cheb-Terrab, 1996

Soldier искал множители вида $\mu = f(x)$ или $\mu = f(y)$, а Абак — инфинитезимальные операторы вида

$$\begin{aligned} \{\xi = 0, \eta = f(x)\}, \quad & \{\xi = 0, \eta = f(y)\}, \\ \{\xi = f(x), \eta = 0\}, \quad & \{\xi = f(y), \eta = 0\}, \end{aligned}$$

затем более сложные

$$\begin{aligned} \{\xi = 0, \eta = f(x)g(y)\}, \quad & \{\xi = f(x)g(y), \eta = 0\}, \\ \{\xi = 0, \eta = f(y) + g(x)\}, \quad & \{\xi = f(y) + g(x), \eta = 0\} \end{aligned}$$

и т.д.

Пример: Kamke, no. 236

Maple 17

```
> with(DETools):  
> eq:= x*(y(x)+4)*(diff(y(x),x))-y(x)^2-2*y(x)-2*x:  
> symgen(eq, way = abaco1);  
2  
[_xi = x + 4 x, _eta = x (y + 4)]
```

Тестирование DETools на Камке: авторы XIX - нач. XX веков занимались интегрирование дифференциальных уравнений с симметрией

$$\xi = f(x), \quad \eta = g(x) \cdot y + h(x).$$

Де-факто это и есть ответ на вопрос о том, что такое аналитическое решение.

Идеальная задача

Задача

Выяснить, принадлежит ли общее решение заданного ОДУ

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0, \quad p, q \in \mathbb{C}[x, y],$$

классу $\mathcal{C}$.

Хотелось бы, чтобы:

- 1 для любого уравнения над $\mathbb{Q}$ задачу можно решить за конечное число действий;
- 2 для любого уравнения над $\mathbb{Q}(a, b, \dots)$ за конечное число действий можно подобрать значения параметров $a, b, \dots$ из $\overline{\mathbb{Q}}$, при которых решение принадлежит $\mathcal{C}$;
- 3 в случае положительного исхода имеется возможность вычислять решения начальной задачи **всюду** (!) с **любой** (!?) заданной точностью.

Задача I.

Задача Дебона

Задача (Florimond de Beaune, 1640-е г.)

Выяснить, допускает ли заданное дифференциальное уравнение

$$pdx + qdy = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y],$$

интеграл w из $\mathbb{C}(x, y)$.

Если дифференциальное уравнение допускает рациональный интеграл, то его интегральные кривые составляют неприводимый линейный пучок.

Открытая проблема: найти оценку сверху для порядка кривых этого пучка [Chèze, 2010].

Может ли решить Maple в 2016 году задачу Дебона?

Пусть u, v — произвольные многочлены, тогда $w = u/v$ является интегралом дифференциального уравнения

$$\left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = 0$$

Взяв наудачу u и v , получим дифференциальное уравнение

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$$

которое `dsolve` обычно сводит к квадратуре на много экранов:

$$\int r dx + s dy = C, \quad r, s \in \mathbb{Q}(x, y),$$

интегралы Maple взять не может!

Тривиальность теста

Генерируемое в тесте уравнение

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$$

имеет несколько линейно независимых интегрирующих делителей $\chi(x, y)$ в кольце $\mathbb{Q}[x, y]$.

Их можно найти методом неопределенных коэффициентов из условия

$$\chi^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{q}{\chi} = \chi^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{p}{\chi},$$

которое дает СЛАУ на коэффициенты χ .

Причина провала теста при произвольных u и v

В Maple поиск интегрирующих делителей в кольце $\mathbb{C}[x, y]$ делается в рамках 2-ого алгоритма DETools [Cheb-Terrab, 1996].

При этом:

- `sumgen` возвращает два интегрирующих делителя, отношение которых дает рациональный интеграл.
- `dsolve` **игнорирует** второй делитель и пишет квадратуру

$$\int \frac{p(x, y)dx + q(x, y)dy}{\chi_1(x, y)} = C,$$

которую **почему-то** не может взять в элементарных функциях.

Нетрудно поправить алгоритм, чтобы пройти тест.

Причина провала теста при особых u и v

Непреодолимые трудности возникают, когда p и q имеют общие множители. Maple прежде всего избавляет ОДУ

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0, \quad p, q \in \mathbb{C}[x, y]$$

от общих множителей, которые могут быть у p и q .

Приведенное уравнение может не иметь интегрирующих делителей в кольце $\mathbb{C}[x, y]$, а отыскание делителей из $\mathbb{C}(x, y)$ приводит к **нелинейным** уравнениям на коэффициенты и требует совсем других вычислительных затрат.

Напр., при

$$u = (x^2 + y)^5(x - y^6 + 1) + 1, \quad v = (13xy^8 + y^5 + 3xy + 2)(x^2 + y)^4,$$

`symgen` отыскивает один делитель из $\mathbb{Q}[x, y]$ и больше ничего.

Решение задачи Дебона

Методы отыскания рациональных интегралов заданного (!) порядка N :

- М.Н. Лагутинский, 1913. Метод определителей Лагутинского; современное изложение [Chèze, 2010; Malykh, 2016].
- Jacques-Arthur Weil, 1985. Метод, основанный на разложении в степенной ряд; современное изложение и обсуждение реализации дано в [Bostan et al, 2014].

Михаил Николаевич Лагутинский (1871 – 1915)

Перед Первой мировой войной М.Н. Лагутинский преподавал в Харьковском университете и погиб во время стажировки в Германии.

- Биография: Историко-математические исследования. 2001. Т. 6 (41). Р. 111-127.
- Труды: http://www.mathnet.ru/php/person.phtml?option_lang=eng&personid=39928

Метод Лагутинского был переоткрыт в на рубеже XX-XXI веков; его работы стали известны во многом благодаря активности проф. Руанского университета Жана-Мари Стельцына [A. Maciejewski, J.-M. Strelcyn, 2008], [Chèze, 2010].

Алгебраическое введение

Пусть k — поле, вложенное в кольцо R и пусть это кольцо является также линейным пространством над полем k .

Линейный оператор D называют дифференцированием кольца R , если:

- 1 $Dc = 0 \quad \forall c \in k$, поэтому поле k называют полем констант;
- 2 для произведения выполняется правило Лейбница

$$D(u \cdot v) = u \cdot Dv + v \cdot Du \quad \forall u, v \in R.$$

Пример:

$$k = \mathbb{Q}, \quad R = \mathbb{Q}[x, y], \quad D = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}.$$

Базис

Счетное множество

$$B = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}, \quad \varphi_n \in R,$$

называют базисом кольца R , если:

- 1 любой элемент ψ из R можно представить как линейную комбинацию элементов из B над полем констант:

$$\psi = c_{n_1}\varphi_{n_1} + \dots + c_{n_m}\varphi_{n_m}, \quad c_{n_1}, \dots, c_{n_m} \in k.$$

- 2 для любых целых i, j найдется такое целое $n > \max(i, j)$, что

$$\varphi_i \cdot \varphi_j = \varphi_n.$$

Максимум из чисел $n_1, \dots, n_m$ будем называть порядком ψ относительно базиса B .

Работа с этими объектами в Sagemath

Рассмотрим кольцо

```
sage: R.<x,y> = PolynomialRing(QQ, 2) 17
```

с дифференцированием

```
sage: D=lambda phi: y*(x+1)*diff(phi,x)+(y 18  
      ^2+x+2)*diff(phi,y)
```

Зададим стандартный glex-базис:

```
sage: B = sorted(((1+x+y)^5).monomials(), 19  
      reverse=0)
```

Тогда, напр.,

```
sage: B[:5] 20
```

```
[1, y, x, y^2, x*y] 21
```

```
sage: D(x^2+y) 22
```

```
2*x^2*y + 2*x*y + y^2 + x + 2 23
```

Определители Лагутинского

Определение

Определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ D\varphi_1 & D\varphi_2 & \dots & D\varphi_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{n-1}\varphi_1 & D^{n-1}\varphi_2 & \dots & D^{n-1}\varphi_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

называется определителем Лагутинского n -го порядка и будет обозначаться ниже как Δ_n .

В нашем примере

```
sage: lagutinski_det(3,B)
```

24

```
x^3 + x*y^2 + 5*x^2 + y^2 + 8*x + 4
```

25

Частный интеграл

Элемент u из R называется частным интегралом, если существует такой элемент v из R , что

$$Du = v \cdot u.$$

Теорема

Частный интеграл порядка n содержится в определителе Лагунтинского n -го порядка в качестве множителя.

Если $R = \mathbb{Q}[x, y]$ и

$$D = q \frac{\partial}{\partial x} - p \frac{\partial}{\partial y},$$

то

$$u(x, y) = 0$$

будет частным интегралом дифференциального уравнения

$$pdx + qdy = 0.$$

Пример

В нашем примере

```
sage: D(x+1).factor() 26
y * (x + 1) 27
```

поэтому $x + 1$ — частный интеграл 3-го порядка. По теореме все Δ_n порядка $n > 2$ должны иметь множитель $x + 1$:

```
sage: lagutinski_det(3,B).factor() 28
(x + 1) * (x^2 + y^2 + 4*x + 4) 29
sage: lagutinski_det(4,B).factor() 30
(6) * y * (x + 1) * (y^2 + x + 2) * (y^2 + 31
      2*x + 3) * (x^2 + y^2 + 4*x + 4)
```

Второй повторяющийся множитель — тоже частный интеграл:

```
sage: D(x^2 + y^2 + 4*x + 4).factor() 32
(2) * y * (x^2 + y^2 + 4*x + 4) 33
```

Общий интеграл

Общим интегралом называется такая пара u, v из R , что

$$u \cdot Dv - v \cdot Du = 0.$$

Если кольцо — факториальное, то

$$D \frac{u}{v} = 0.$$

Если $R = \mathbb{Q}[x, y]$ и

$$D = q \frac{\partial}{\partial x} - p \frac{\partial}{\partial y},$$

то

$$u(x, y) - C \cdot v(x, y) = 0$$

будет общим интегралом дифференциального уравнения

$$pdx + qdy = 0.$$

Н. и Д. условия существования общего интеграла

Теорема

Пусть R — полиномиальное кольцо.

- 1 Общий интеграл существует тогда и только тогда, когда все определители Лагунинского достаточно большого порядка равны нулю.
- 2 Общий интеграл порядка N существует тогда и только тогда, когда $\Delta_N = 0$.

Если $\Delta_N = 0$, мы можем вычислить интеграл как отношение миноров. Но если

$$\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \dots, \Delta_{100} \neq 0,$$

мы не можем сказать, что не существует общего интеграла любого порядка.

Отыскание интеграла по методу Лагутинского

```
sage: R.<x,y> = PolynomialRing(QQ, 2)          34
sage: D=lambda phi: y*(x+1)*diff(phi,x)+(y      35
            ^2+x+2)*diff(phi,y)
sage: B= sorted(((1+x+y)^5).monomials(),        36
                reverse=0)
sage: lagutinski_det(5,B)==0                    37
False                                           38
sage: lagutinski_det(6,B)==0                   39
True                                            40
```

Поскольку $\Delta_5 \neq 0$, а $\Delta_6 = 0$, интегралом будет:

```
sage: lagutinski_integral(6,B)                 41
(-54*x^2 + 18*y^2 - 72*x)/(-18*y^2 - 36*x -   42
54)
```

Задача о малочленах

Задача

Для заданного ОДУ отыскать интеграл, который представляет собой отношение двух триномов

$$\frac{a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3}{b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3},$$

где m_1, m_2, m_3 — мономы, степень которых не превосходит заданной границы N .

Для решения этой задачи мы должны вычислить много определителей Лагунтинского 3-го порядка. Этот процесс можно с успехом распараллелить.

Пример

Функция `Lagutinski_micronomial` возвращает номер подходящего тринома в заданном множестве триномов:

```
sage: R.<x,y> = PolynomialRing(QQ, 2)          43
sage: B= sorted(((1+x+y)^5).monomials(),       44
               reverse=0)
sage: B3=[[n,m,k] for n in B for m in B for    45
           k in B if (n<m<k)]
sage: D= lambda u: (3*x^4 + 2*y)*x*y^2*diff(   46
               u,x)+ (5*x^4 + y)*y^3*diff(u,y)
sage: lagutinski_micronomial(B3)                47
678                                              48
sage: lagutinski_integral(3,B3[678])            49
(7*x^5 + 7*x*y)/(7*y^3)                        50
sage: D(7*y^3/(-7*x^5 - 7*x*y))                51
0                                              52
```

Сжимающее дифференцирование

Пусть

$$B = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$$

— базис кольца R . В разложении

$$\psi = c_{n_1}\varphi_{n_1} + \dots + c_{n_m}\varphi_{n_m}, \quad (n_1 < n_2 < \dots < n_m)$$

член $c_{n_1}\varphi_{n_1}$ называют главным и пишут

$$\psi = c_{n_1}\varphi_{n_1} + o(\varphi_{n_1}).$$

Дифференцирование D будем называть сжимающим базис B , если

$$D\varphi_n = c_n\varphi_n + o(\varphi_n), \quad c_n \in k.$$

Константы $c_1, c_2, \dots$ называются показателями сжатия.

Н. условие существования

Lemma

Если D сжимает базис

$$B = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\},$$

то

$$\Delta_n = W(c_1, c_2, \dots, c_n) \prod_{i=1}^n \varphi_i + o\left(\prod_{i=1}^n \varphi_i\right),$$

где W — определитель Вандермонда.

Поэтому для таких дифференцирований определители Лагутинского вычисляются очень быстро.

Теорема

Пусть D — сжимающее дифференцирование. Если существует общий интеграл, то среди показателей сжатия имеются равные.

Анализ неподвижных особых точек

Неподвижными особыми точками дифференциального уравнения

$$pdx + qdy = 0$$

называют пересечения кривых

$$p(x, y) = 0, \quad q(x, y) = 0.$$

Перенося начало координат в такую точку и поворачивая оси, получим уравнение, дифференцирование которого сжимает `glex`-базис.

Это дает быстрый тест `ab` на отсутствие интегралов из $\mathbb{C}(x, y)$ (`true` = может и существует, `false` = точно не существует).

Пример 1.

Для ЛДУ

$$(x + y)dx + xdy = 0$$

имеем:

<code>sage: x,y=var('x,y')</code>	53
<code>sage: lagutinski_ab(x+y,x)</code>	54
<code>True</code>	55

Поэтому общий интеграл может существовать. Так и есть:

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{C}{x}.$$

Пример 2.

Для ОДУ

$$(2 - x^2 - y^2)dx + (x - y)dy = 0$$

имеем:

```
sage: lagutinski_ab(2-x^2-y^2,x-y)
False
```

56

57

Это уравнение не допускает рационального интеграла в поле $\mathbb{C}(x, y)$.

Maple 17

```
> dsolve((2-x^2-y(x)^2) + (x-y(x))*diff(y(x),x)=0,y(x));
memory used=224.7MB, alloc=88.8MB, time=3.15
memory used=256.5MB, alloc=88.8MB, time=3.45
memory used=298.9MB, alloc=88.8MB, time=3.82
memory used=376.1MB, alloc=105.7MB, time=4.60
```

Возможности метода Лагутинского

Получается:

- 1 выяснить, имеется ли у заданного дифференциального уравнения рациональный интеграл заданного порядка;
- 2 оптимизировать этот процесс в случае, когда интеграл является отношением малочленов;
- 3 сформулировать простые достаточные условия отсутствия рационального интеграла у дифференциальных уравнений.

Не получается:

- 1 оценить сверху порядок N интеграла в общем случае;
- 2 проводить вычисления быстро, поскольку задача вычисления определителей порядка $N \simeq 10 \div 20$ в $\mathbb{Q}[x, y]$ часто оказывается «тяжелой».

Задача II.

Квадратуры

Два типа квадратур:

$$\sum f(x_n)\Delta x \rightarrow \int_{x=a}^b f(x)dx$$

$$\prod (1 + f(x_n)\Delta x) \rightarrow e^{\int_{x=a}^b f(x)dx}$$

В классических изыскания возникает смешение квадратур и элементарных функций из-за того, что Р-интегралы выражаются через S-интегралы при помощи экспоненты. Элементарные функции для построения лиувиллиевой теории не нужны.

Задача об интегрировании в квадратурах

Задача

Для заданного дифференциального уравнения

$$pdx + qdy = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$$

выяснить, интегрируется ли оно в S- и P-квадратурах.

Расшифровка:

$$F(x, y, \alpha_1, \dots, \alpha_r, C) = 0,$$

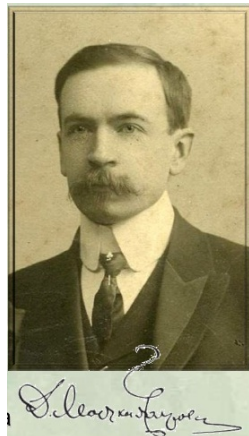
где

$$\alpha_1 = \int u_1 dx + v_1 dy \quad \text{или} \quad e^{\int u_1 dx + v_1 dy}, \quad u_1, v_1 \in \overline{\mathbb{Q}[x, y]}$$

Дмитр. Дмитр. Мордухай-Болтовской (1876 — 1952)

До войны в Варшавском университете занимался вопросами интегрирования дифференциальных уравнений в конечном виде, после в Ростове — историей и философией математики, автор последнего перевода Начал Евклида.

- Биография и библиография: [А.В. Родин, 1998].
- Мат. труды: http://www.mathnet.ru/php/person.phtml?option_lang=rus&personid=35738



Теорема Зингера

Теорема (M. Singer, 1992)

Если дифференциальное уравнение

$$pdx + qdy = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$$

интегрируется в S - и P -квadrатурах, то:

- 1 существует интегрирующий множитель, который является P -интегралом 1-го порядка, т.е.

$$\mu = e^{\int udx + vdy}, \quad u, v \in \mathbb{Q}(x, y).$$

- 2 существует интеграл, который является S -интегралом 2-го порядка.

Отыскание u и v сводится к задаче типа Дебона.

Liouvillian solver for Maple, 2007

Lsolver — общедоступная реализация алгоритма, основанного на теореме Зингера.

Пример. Дифференциальное уравнение

$$(x + 1)ydx - (x - xy - y^2 + x^2)dy = 0$$

имеет интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{e^{x/y}}{(x + y)^2};$$

это уравнение не удастся проинтегрировать силами DETools (сборка под Maple 17, февраль 2013), но оно легко интегрируется силами пакета Lsolver.

Liouvillian solver for Maple, 2007

Авторы пакета Lsolver не ставили перед собой цели выяснять, имеет ОДУ решение в квадратурах или нет. Некоторые уравнения, которые проинтегрировал бы даже Soldier Мозеса, оказываются для Lsolver слишком сложными.

Пример: уравнение Бернулли.

Maple 17

```
> read("/home/user/lsolver/Lsolvernew.txt");  
LsolverI Package Development,  
Version: 2.0, 15/11/2013  
-----  
Authors: J.Avellar, L.G.S.Duarte, L.A.C.P.da Mota  
         and  M.S.Cardoso  
-----  
> Lsolve(diff(y(x), x) = y(x)+x/y(x),y(x));  
We could not find an integrating factor.
```

Особенности интеграла и «особое» решение

Семейство кривых

$$\int e^{\int \frac{u dx + v dy}{w}} \cdot (p dx + q dy) = C, \quad u, v, w \in \mathbb{Q}[x, y],$$

определено во всех точках плоскости xy , отличных от точек кривой $w(x, y) = 0$.

Теорема

Альтернатива: или множитель будет найден Soldier'ом, или w является многочленом Дарбу для дифференцирования

$$D = q \frac{\partial}{\partial x} - p \frac{\partial}{\partial y}.$$

Линия особенностей множителя составлена из нескольких частных решений.

Пример.

ОДУ

$$(x + 1)ydx - (x - xy - y^2 + x^2)dy = 0$$

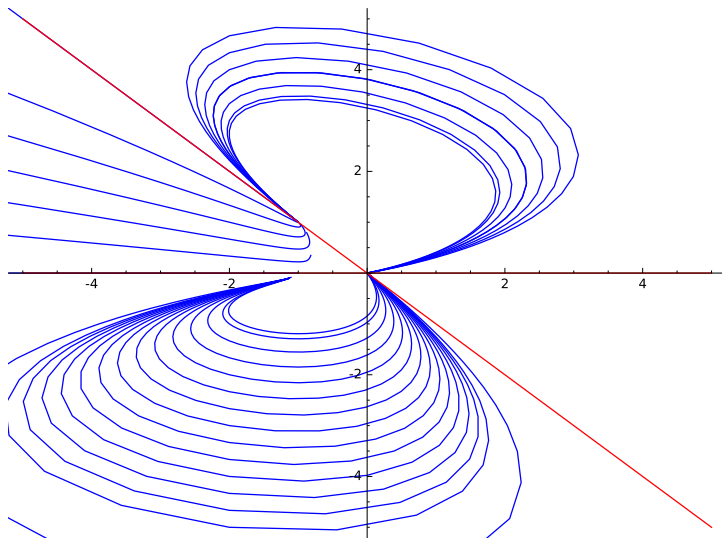
имеет множителем $\frac{e^{x/y}}{(x+y)^2}$, его линия особенностей составлена из прямых

$$y = 0, \quad x + y = 0.$$

Проверим, что y и $x + y$ — многочлены Дарбу:

```
sage: R.<x,y> = PolynomialRing(QQ, 2)          58
sage: D= lambda u: (x - x*y - y^2 + x^2 ) *      59
    diff(u,x)+ (x + 1)*y*diff(u,y)
sage: D(y).factor()                             60
y * (x + 1)                                     61
sage: D(x+y).factor()                           62
(-1) * (-x + y - 1) * (x + y)                  63
```


Пример: интегральные прямые и линия особенностей.



Задача III.

Задача Пенлеве

Задача (Пенлеве, 1890)

Выяснить, допускает ли заданное уравнение

$$pdx + qdy = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$$

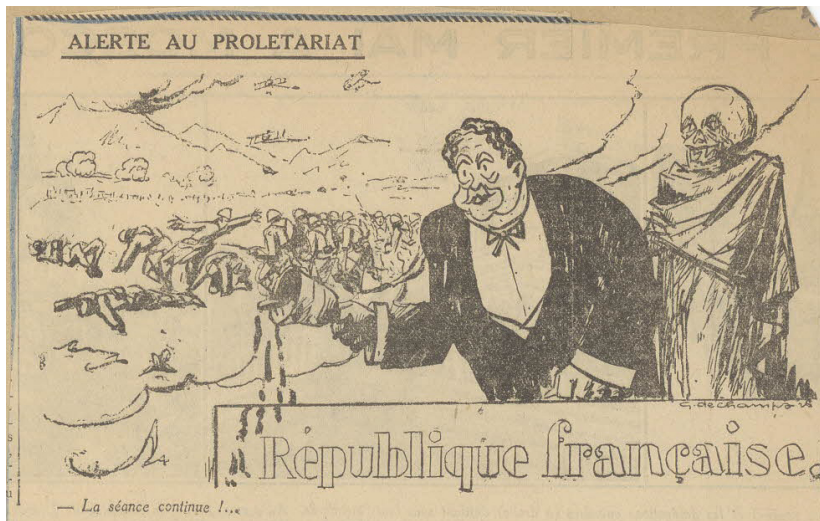
общее решение, которое зависит от константы алгебраически.

Если да, то будет и интеграл вида

$$r = \frac{\alpha_0(x)y^n + \dots \alpha_n(x)}{\beta_0(x)y^n + \dots \beta_n(x)},$$

где $\alpha_0(x), \dots, \beta_n(x)$ — функции x , порождающие поле K , вообще говоря трансцендентное над $\mathbb{Q}[x]$.

Paul Painlevé (1863 — 1933)



Теорема Пенлеве

Базис тр. K над $\mathbb{Q}[x]$ — конечный набор тех тр. функций переменной x , которые нужно табулировать. Все решения выражаются через них алгебраически.

Теорема (Пенлеве, 1890)

Ст. тр. K над $\mathbb{Q}[x]$ не превышает 3, а базис образован решениями уравнения Риккати.

Теорема допускает обобщение на случай систем ОДУ: базисом оказываются классические трансцендентные функции [Painleve, 1897; Umemura, 1990; Malykh, 2015].

Соответствие между слоями

Если общее решение зависит от C алгебраически, то решение задачи Коши дается формулой

$$r(x, y) = r(x_0, y_0).$$

Между начальным $x = x_0$ и конечным $x = x_1$ слоями эта формула задает проективное (n, n) -соответствие. Оно не обязано быть однозначным!

Пример. Общим решением

$$x dx + y dy = 0, \quad y|_{x=x_0} = y_0$$

служит

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$$

Это — $(2, 2)$ -соответствие.

Уравнение Риккати

Всякое $(1, 1)$ -соответствие прямых является дробно-линейным, поэтому такое соответствие задает только уравнение Риккати

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x).$$

Явная схема Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + (p_n y_n^2 + q_n y_n + r_n) \Delta x$$

задает $(1, 2)$ -соответствие между соседними слоями и поэтому (!) она и не работает.

Поправим схему на $(1, 1)$:

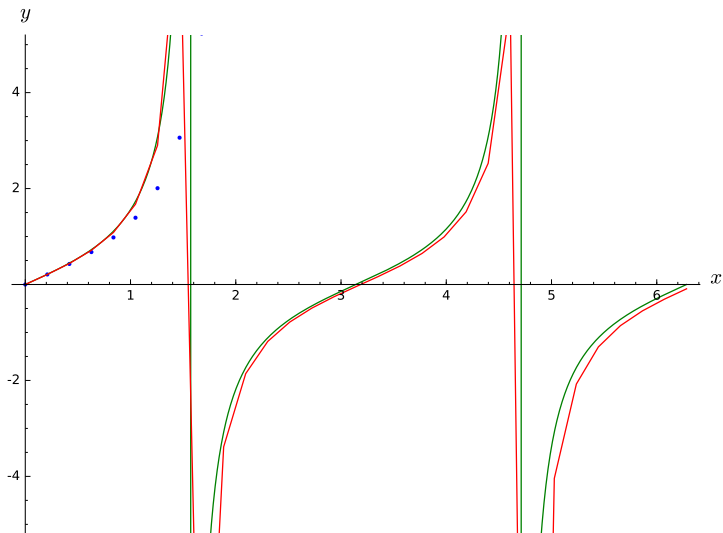
$$y_{n+1} = y_n + (p_n y_n y_{n+1} + q_n y_n + r_n) \Delta x$$

Пример 1

$$y' = 1 + y^2, \quad y|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \tan x.$$

```
sage: p=lambda x: 1 64
sage: q=lambda x: 0 65
sage: r=lambda x: 1 66
sage: N=30 67
sage: dx=(2*pi/N).n() 68
sage: P=[[0,0]] 69
sage: for n in range (0,N/2): P.append([P[n 70
    ][0]+dx, P[n][1]+(p(P[n][0))*(P[n][1])^2+q(P
    [n][0))*(P[n][1])+r(P[n][0]))*dx])
sage: Q=[[0,0]] 71
sage: for n in range (0,N): Q.append([Q[n][0]+ 72
    dx, ((1+q(Q[n][0])*dx)*Q[n][1]+p(Q[n][0])*dx
    ) / (1-r(Q[n][0])*dx*Q[n][1]))])
```


Ответ

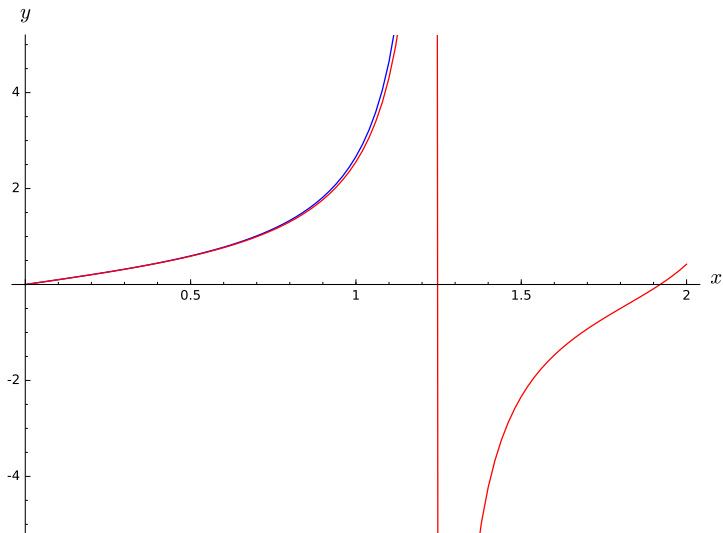


Пример 2

$$y' = 1 + x^2 + xy + x^2y^2, \quad y|_{x=0} = 0$$

```
sage: p=lambda x: 1+x^2 73
sage: q=lambda x: x 74
sage: r=lambda x: x^2 75
sage: N=100 76
sage: dx=(2/N).n() 77
sage: Q=[[0,0]] 78
sage: for n in range (0,N): Q.append([Q[n][0]+ 79
    dx, ((1+q(Q[n][0])*dx)*Q[n][1]+p(Q[n][0])*dx
    ) / (1-r(Q[n][0])*dx*Q[n][1]))]
sage: x,y=var('x,y') 80
sage: P=desolve_rk4(p(x)+q(x)*y+r(x)*y^2,y, 81
    ivar=x, ics=P[0], end_points=2,step=dx)
```

Ответ



Учебники: Эйлер → А.Н. Крылов → Н.Н. Калиткин

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{a^2} \Rightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{x_n^2 - y_n^2}{a^2} \Delta x$$

«Погрешность при этом вычислении происходит оттого, что на протяжении каждого отдельного промежутка обе переменные x и y считаются сохраняющими свои значения, соответствующие началу этого промежутка, так что и значение функции $f(x, y)$ остается постоянным, поэтому: чем быстрее значение этой функции меняется от одного промежутка к следующему, тем большую можно ожидать погрешность. Это невыгодное обстоятельство имеет место обыкновенно там, где значения $f(x, y)$ или уничтожаются, или же становятся бесконечно большими.» — Эйлер, цит. по [Крылов, 1933].

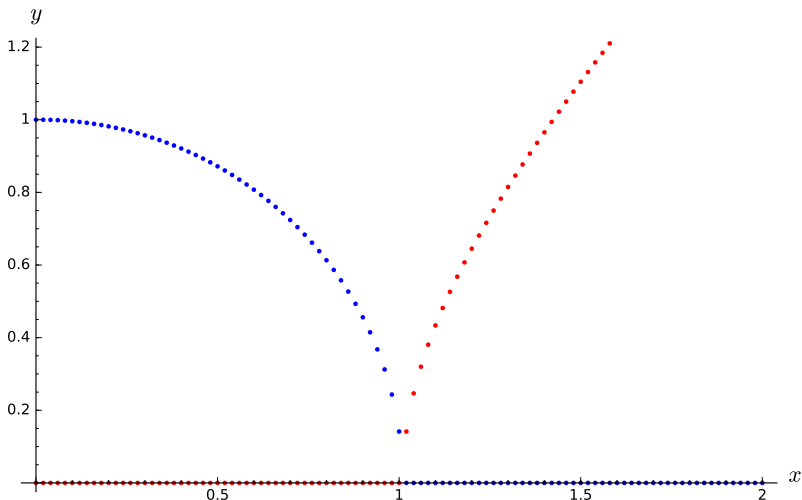
Уравнение, задающее $(2, 2)$ -соответствие между слоями

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad y_{n+1}^2 = y_n^2 - 2x_n dx$$

Для перехода от 0-го слоя к n -му следует исключать переменные $y_1, \dots, y_{n-1}$. В одномерном случае всегда можно ввести новую переменную, в данном случае $z_n = y_n^2$.

```
sage: N=100 82
sage: dx=(2/N).n() 83
sage: Q=[[0,1]] 84
sage: for n in range (0,N): Q.append([Q[n][0]+ 85
      dx, Q[n][1] - 2*Q[n][0]*dx])
sage: P1 =[[i, real(sqrt(j))]] for i,j in Q 86
sage: P2 =[[i, imag(sqrt(j))]] for i,j in Q 87
```

Ответ



Синий — вещественная часть, красный — мнимая.

Сведение к уравнению Риккати

Теорема (Пенлеве, 1890)

Если общее решение дифференциального уравнения первого порядка

$$pdx + qdy = 0, \quad p, q \in k[y],$$

зависит от константы алгебраически, то существует и притом единственная подстановка

$$z = r(x, y), \quad r \in K(y),$$

которая переводит исходное уравнение в уравнение Риккати, а три произвольные функции из K — в другие три произвольные функции из K .

Здесь $k \subset K$ — поля функций переменной x .

Пример

Уравнение:

$$(x^4 - 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 - y^2)dx + (x^2 + 2xy - y^2)dy = 0$$

Ищем подстановку 2-го порядка, оставляющая на месте 0, 1 и ∞ :

$$z = \frac{y(y + a_1)}{a_2y + (1 + a_1 - a_2)}.$$

Ответ:

$$z = \frac{1-x}{1+x} \frac{y(y+x)}{y-x}.$$

Нерешенная трудность: определение порядка подстановки.

Пример: решение при помощи пакета riccati.sage

```
sage: x,y,a1,a2=var('x,y,a1,a2') 88
sage: p=x^4 - 2*x^3*y + 2*x*y^3 + y^4 + 2*(x 89
      ^2 - 1)*y^2
sage: q=x^2 + 2*x*y - y^2 90
sage: u=y*(y+a1) 91
sage: v=y*a2 +(1+a1-a2) 92
sage: J=riccati_ideal(x,y,p,q,[a1,a2],u,v) 93
sage: J.elimination_ideal(a2).gens()[0]. 94
      factor()
(-1) * (-a1 + x) * (a1 + 1) * x^4 * (6*x^2 - 95
      1)
sage: J.elimination_ideal(a1).gens()[0]. 96
      factor()
a2 * x^4 * (6*x^2 - 1) * (a2*x - a2 + x + 1) 97
```

Литература



Малых М.Д. О трансцендентных функциях, возникающих при интегрировании дифференциальных уравнений в конечном виде // Записки научных семинаров ПОМИ. 2015. Т. 432. Стр. 196-223.



Малых М.Д. О приближенном решении дифференциальных уравнений, общее решение которых зависит от константы алгебраически // Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика. 2015. № 3. С. 5-9.



Малых М.Д. О дифференциальных уравнениях, общее решение которых является алгебраической функцией константы // Вестник НИЯУ МИФИ, 2016. Том 5, № 2. С. 152-161.



Малых М.Д. Об отыскании рациональных интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений по методу М.Н. Лагутинского // Вестник НИЯУ МИФИ, 2016. Том 5, № 3, с. 35-44.

Конец



© 2016 г., Михаил Дмитриевич Малых.

Текст доступен на условиях лицензии Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

Вычисления выполнены при помощи SageMath Version 7.1, Release Date: 2016-03-20.

Дополнительные материалы доступны на сайте автора: <http://malykhmd.neocities.org>.



<http://malykhmd.neocities.org>