Символьное решение дифференциальных уравнений

и метод конечных разностей

Мих. Дмитр. Малых* **

*Факультет наук о материалах МГУ.

**Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей РУДН.

malykhmd@yandex.ru

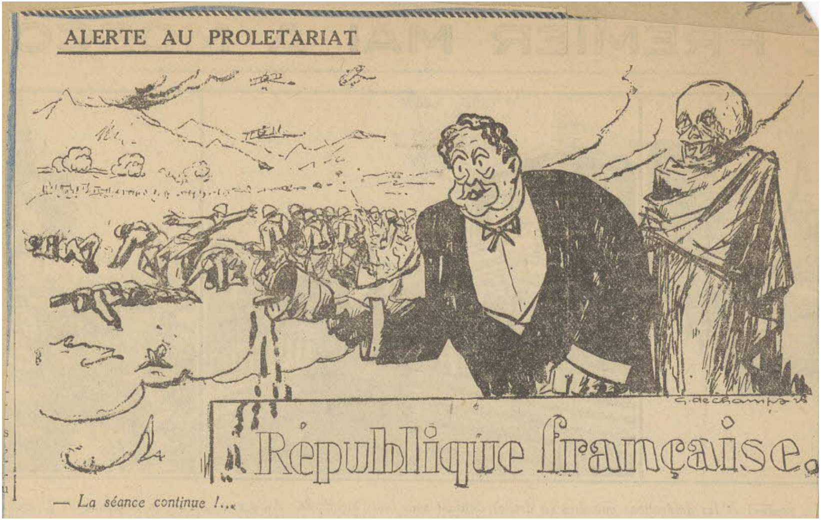
«Математические методы в естественных науках»,
ФФ МГУ, 2 ноя. 2016 года;
Версия от 28 октября 2016 г.

Введение

- Символьные методы интегрирования опираются на работы аналитиков XIX века и потому подразумевают, что числовые характеристики решения будут найдены разложениями в степенные ряды.
- Метод конечных разностей традиционно рассматриваемся как другой, «численный», подход к ОДУ.

Аналитическая теория дифференциальных уравнений.

Paul Painlevé (1863 — 1933)



Аналитическая теория ДУ

АТДУ характеризует решения по их поведению в особых точках.
Пример. Уравнение Риккати

$$y' = py^2 + qy + r, \quad p, q, r \in \mathbb{Q}[x],$$

имеет в качестве особых точек полюса $\Rightarrow$ решение можно представить как отношение всюду сходящихся степенных рядов.

Определение

Говорят, что ОДУ обладает свойством Пенлеве, если все подвижные особые точки любого однопараметрического семейства* его решения — полюса.

(*) У Пенлеве: общего решения, современные авторы сильно сузили рассматриваемый класс [Шази].

АТУД в XX веке

Задача

Среди ОДУ произвольного порядка выделить обладающие свойством Пенлеве, и представление их решения в виде отношения степенных рядов.

Прогресс:

- 1912 Найдены все уравнения среди уравнений вида $y'' = f(x, y, y')$ [П. Пенлеве и его ученики, В.В. Голубев]
- 1993 Найдены все уравнения среди уравнений вида $(y'')^m = f(x, y, y')$ [Cosgrove]
- 2006 Найдены все уравнения среди уравнений вида $(y^{(n)})^m = f(x, y, \dots)$ [Соболевский]

АТДУ и мат. моделирование

С точки зрения мат. моделирования анализ особенностей — всегда выход за рамки применимости модели.

Пример. Решение задачи трех тел можно представить в виде рядов Зундмана:

$$q_i = \mathfrak{P}(\tau), \quad t = \mathfrak{P}(\tau)$$

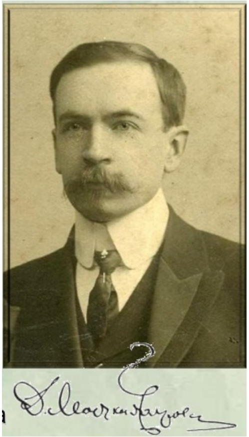
Док-во требует исследования поведения решения в точке столкновения, когда согласно Вейерштрассу координаты имеют конечный предел, а скорости соударяющихся тел стремятся к бесконечности.

Классический подход к символьному интегрированию ОДУ.

Дмитр. Дмитр. Мордухай-Болтовской (1876 — 1952)

До войны в Варшавском университете занимался вопросами интегрирования дифференциальных уравнений в конченом виде, после в Ростове — историей и философией математики, автор последнего перевода Начал Евклида.

- Биография и библиография: [А.В. Родин, 1998].
- Мат. труды: `http://www.mathnet.ru/php/person.phtml?option_lang=rus&personid=35738`



История вопроса

- 1840. Лиувилль: решение — элементарная функция и квадратура,
- 1890. Мордухай-Болтовской: интеграл — элементарная функция,
- 1980. Прель-Зингер: алгоритм отыскания интегралов среди элементарны функций,
- 1990. Зингер: интегрирование в элементарных функциях и квадратурах,
- 2000. Реализации алгоритма Преля-Зингера и его обобщений; см. обзор [Гориели, 2006].

Liouvillian solver for Maple, 2007

Пример. Дифференциальное уравнение

$$(x+1)ydx - (x - xy - y^2 + x^2)dy = 0$$

имеет интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{e^{x/y}}{(x+y)^2};$$

это уравнение не удается проинтегрировать силами DETools (сборка под Maple 17, февраль 2013), но оно легко интегрируется силами пакета Lsolver.

Liouvillian solver for Maple, 2007

Авторы пакета `Lsolver` не ставили перед собой цели выяснять, имеет ОДУ решение в квадратурах или нет.

Пример: уравнение Бернулли.

Maple 17

```
> read("/home/user/lsolver/Lsolvernew.txt");
  LsolverI Package Development,
  Version: 2.0, 15/11/2013
  --------
  Authors: J.Avellar, L.G.S.Duarte, L.A.C.P.da Mota
           and  M.S.Cardoso
  --------
> Lsolve(diff(y(x), x) = y(x)+x/y(x),y(x));
  We could not find an integrating factor.
```

Квадратуры

Два типа квадратур:

$$\sum f(x_n)\Delta x \to \int\limits_{x=a}^{b} f(x)dx$$

$$\prod (1 + f(x_n)\Delta x) \to e^{\int\limits_{x=a}^{b} f(x)dx}$$

В классических изыскания возникает смешение квадратур и элементарных функций из-за того, что P-интегралы выражаются через S-интегралы при помощи экспоненты.

Задача об интегрировании в квадратурах

Задача

Для заданного дифференциального уравнения

$$pdx + qdy = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$$

выяснить, интегрируется ли оно в S- и P-квадратурах.

Расшифровка:

$$F(x, y, \alpha_1, \ldots, \alpha_r, C) = 0,$$

где

$$\alpha_1 = \int u_1 dx + v_1 dy \quad \text{или} \quad e^{\int u_1 dx + v_1 dy}, \quad u_1, v_1 \in \overline{\mathbb{Q}[x, y]}$$

Основной метод из Soldier'а Мозеса

ОДУ допускает интегрирующий множитель, зависящий только от x, в том и только в том случае, когда

$$r = \frac{1}{q}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right)$$

не зависит от y. При этом интегрирующий множитель является Р-квадратурой:

$$\mu = e^{\int r(x)dx},$$

а интегральные кривые можно выразить при помощи двух квадратур:

$$\int e^{\int r(x)dx} \cdot (pdx + qdy) = C.$$

Теорема Зингера

Теорема (M. Singer, 1992)

Если дифференциальное уравнение

$$pdx + qdy = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$$

интегрируется в S- и P-квадратурах, то:

1. *существует интегрирующий множитель, который является P-интегралом 1-го порядка, т.е.*

$$\mu = e^{\int udx + vdy}, \quad u, v \in \mathbb{Q}(x, y).$$

2. *существует интеграл, который является S-интегралом 2-го порядка.*

Отыскание множителя

Отыскание u и v сводится к задаче типа Дебона.

Теорема

ОДУ интегрируется при помощи конечного числа квадратур, в том и только в том случае, когда дифференцирование

$$D = q^2 \frac{\partial}{\partial x} - pq \frac{\partial}{\partial y} + \left(vq^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{p}{q} + q^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{q} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial}{\partial v}$$

кольца $\mathbb{Q}[x, y, v]$ допускает многочлен Дарбу F, линейный относительно v. Зная один такой многочлен, можно вычислить интегрирующий множитель по формуле Зингера.

Отыскание многочлена Дарбу

Определение

Многочлен f называют многочленом Дарбу диффренцирования D, если его производная Df делится на f нацело:

$$Df = \lambda f.$$

Все известные методы отыскания многочленов Дарбу требуют, чтобы пользователь задал еще и границу N для порядка искомых многочленов [Гориели, 2006].
Для вычислений ниже используется пакет Lagutinski под Sage [Малых, 2016].

Пример: Филлипов, № 308

Уравнение

$$x^2 y' = y(x+y)$$

интегрируется при $N = 5$.

```
sage: R.<x,y,v> = PolynomialRing(QQ,3)
sage: lagutinski_uv(R,-y*(x+y),x^2,5)
[[(-1)/x, (-2)/y]]
```

Отсюда множитель равен

$$\mu = \exp - \int \frac{dx}{x} + \frac{2dy}{y} = e^{-\ln(xy^2)} = \frac{1}{xy^2}$$

и ответ дается квадратурой.

Тестирование

Задача предлагает искать ответ именно в том виде, в котором его хотели видеть ученики Лейбница и авторы современных задачников.

Мы взяли наудачу уравнения № 301-331 из задачника А.Ф. Филиппова. Среди этих уравнений 20 имеют вид

$$pdx + qdy = 0,$$

18 из 20 уравнений интегрируются при $N = 4 \div 5$.Оба оставшихся номера приметны тем, что определители Лагутинского 12-го порядка для них обращаются в нуль, поэтому имеется бесконечно много многочленов Дарбу, а следовательно и вариантов для v.

Двойственная задача Дебона.

Задача Дебона

Задача (Дебон, 1630)

Выяснить, допускает ли заданное уравнение

$$pdx + qdy = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$$

общее решение, которое зависит от x алгебраически.

Задача (Пенлеве, 1890)

Выяснить, допускает ли заданное уравнение

$$pdx + qdy = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$$

общее решение, которое зависит от константы алгебраически.

Рациональный интеграл

Если ОДУ допускает общее решение, которое зависит от константы алгебраически, то допускает и интеграл вида

$$r = \frac{\alpha_0(x)y^n + \ldots \alpha_n(x)}{\beta_0(x)y^n + \ldots \beta_n(x)},$$

где $\alpha_0(x), \ldots, \beta_n(x)$ — функции x, порождающие поле K, вообще говоря трансцендентное над $\mathbb{Q}[x]$.
Решение начальной задачи сводится к решению алгебраического уравнения.

Элементарная теория интегрирования ОДУ

Методы, которые излагаются в элементарной теории интегрирования ОДУ без системы или насильственно встраиваются в групповой анализ, естественно упорядочиваются с точки зрения анализа зависимости общего решения от C.

- Линейные ОДУ — общее решение зависит от константы линейно,
- ОДУ Риккати — общее решение зависит от константы дробно-линейно,
- ОДУ Бернулли — m-ая степень общего решения зависит от константы линейно.

Такое изложение предложено в [Васильев С.А. и др., 2017].

Теорема Пенлеве (современная формулировка)

Базис тр. K над $\mathbb{Q}[x]$ — конечный набор тех тр. функций переменной x, которые нужно табулировать. Все решения выражаются через них алгебраически.

Теорема

Ст. тр. K над $\mathbb{Q}[x]$ не превышает 3, а базис образован решениями уравнения Риккати.

Теорема допускает обобщение на случай систем ОДУ: базисом оказываются классические трансцендентные функции [Painleve, 1897; Umemura,1990; Malykh, 2015].

Соответствие между слоями

Если общее решение зависит от C алгебраически, то решение задачи Коши дается формулой

$$r(x, y) = r(x_0, y_0).$$

Между начальным $x = x_0$ и конченым $x = x_1$ слоями эта формула задает проективное (n, n)-соответствие. Оно не обязано быть однозначным!
Пример. Общим решением

$$xdx + ydx = 0, \quad y|_{x=x_0} = y_0$$

служит

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$$

Это — $(2, 2)$-соответствие.

Уравнение Риккати

Всякое $(1,1)$-соответствие прямых является дробно-линейным, поэтому такое соответствие задает только уравнение Риккати

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x).$$

Явная схема Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + (p_n y_n^2 + q_n y_n + r_n)\Delta x$$

задает $(1,2)$-соответствие между соседними слоями и поэтому (!) она и не работает.
Поправим схему на $(1,1)$:

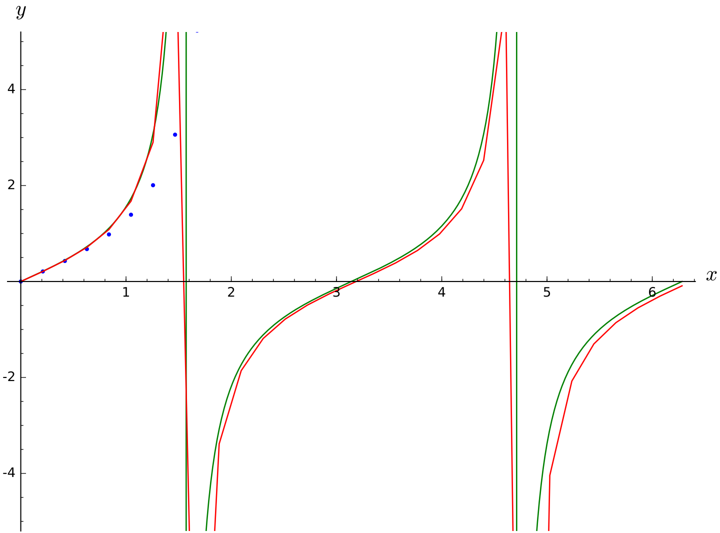
$$y_{n+1} = y_n + (p_n y_n y_{n+1} + q_n y_n + r_n)\Delta x$$

Пример 1

$$y' = 1 + y^2, \quad y|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \tan x.$$

```
sage: p=lambda x: 1
sage: q=lambda x: 0
sage: r=lambda x: 1
sage: N=30
sage: dx=(2*pi/N).n()
sage: P=[[0,0]]
sage: for n in range (0,N/2): P.append([P[n][0]+dx, P[n][1]+(p(P[n][0])*(P[n][1])^2+q(P[n][0])*(P[n][1])+r(P[n][0]))*dx])
sage: Q=[[0,0]]
sage: for n in range (0,N): Q.append([Q[n][0]+dx, ((1+q(Q[n][0])*dx)*Q[n][1]+p(Q[n][0])*dx) / (1-r(Q[n][0])*dx*Q[n][1])])
```

Ответ

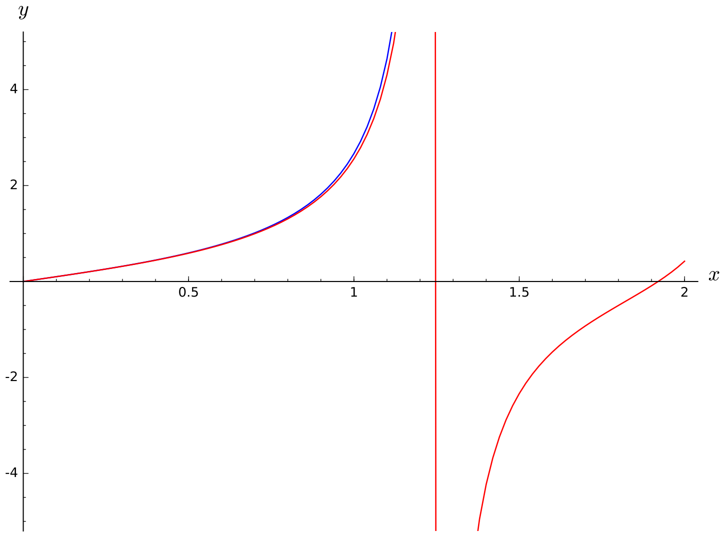


Пример 2

$$y' = 1 + x^2 + xy + x^2y^2, \quad y|_{x=0} = 0$$

```
sage: p=lambda x: 1+x^2
sage: q=lambda x: x
sage: r=lambda x: x^2
sage: N=100
sage: dx=(2/N).n()
sage: Q=[[0,0]]
sage: for n in range (0,N): Q.append([Q[n][0]+
    dx, ((1+q(Q[n][0])*dx)*Q[n][1]+p(Q[n][0])*dx
    ) / (1-r(Q[n][0])*dx*Q[n][1])])
sage: x,y=var('x,y')
sage: P=desolve_rk4(p(x)+q(x)*y+r(x)*y^2,y,
    ivar=x, ics=P[0], end_points=2,step=dx)
```

Ответ



Учебники: Эйлер → А.Н. Крылов → Н.Н. Калиткин

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = y_n + \frac{x_n^2 - y_n^2}{a^2}\Delta x$$

«Погрешность при этом вычислении происходит оттого, что на протяжении каждого отдельного промежутка обе переменные x и y считаются сохраняющими свои значения, соответствующие началу этого промежутка, так что и значение функции $f(x, y)$ остается постоянным, поэтому: чем быстрее значение этой функции меняется от одного промежутка к следующему, тем большую можно ожидать погрешность. Это невыгодное обстоятельство имеет место обыкновенно там, где значения $f(x, y)$ или уничтожаются, или же становятся бесконечно большими.» — Эйлер, цит. по [Крылов, 1933].

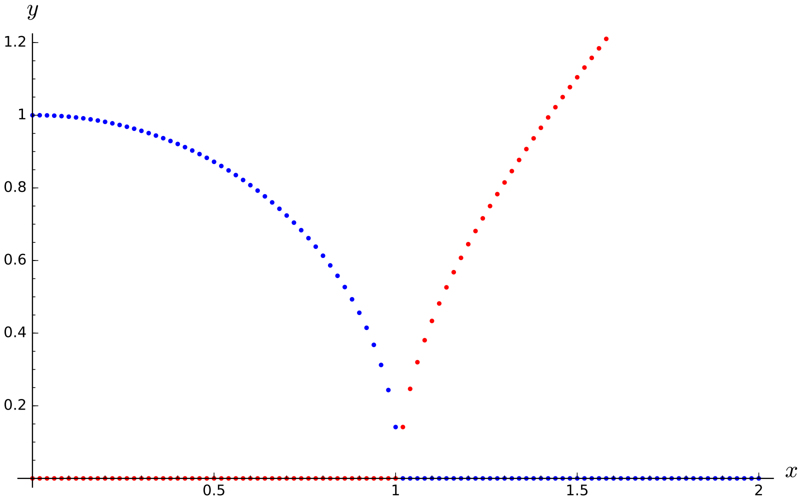
Уравнение, задающее $(2,2)$-соответствие между слоями

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad y_{n+1}^2 = y_n^2 - 2x_n dx$$

Для перехода от 0-го слоя к n-му следует исключать переменные $y_1, \dots, y_{n-1}$. В одномерном случае всегда можно ввести новую переменную, в данном случае $z_n = y_n^2$.

```
sage: N=100
sage: dx=(2/N).n()
sage: Q=[[0,1]]
sage: for n in range (0,N): Q.append([Q[n][0]+
    dx, Q[n][1] - 2*Q[n][0]*dx])
sage: P1 =[[i, real(sqrt(j))] for i,j in Q]
sage: P2 =[[i, imag(sqrt(j))] for i,j in Q]
```

Ответ



Синий — вещественная часть, красный — мнимая.

Сведение к уравнению Риккати

Теорема (Пенлеве, 1890)

Если общее решение дифференциального уравнения первого порядка

$$pdx + qdy = 0, \quad p, q \in k[y],$$

зависит от константы алгебраически, то существует и притом единственная *подстановка*

$$z = r(x, y), \quad r \in K(y),$$

которая переводит исходное уравнение в уравнение Риккати, а три произвольные функции из K *— в другие три произвольные функции из* K.

Здесь $k \subset K$ — поля функций переменной x.

Пример

Уравнение:

$$(x^4 - 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 - y^2)dx + (x^2 + 2xy - y^2)dy = 0$$

Ищем подстановку 2-го порядка, оставляющая на месте $0, 1$ и ∞:

$$z = \frac{y(y + a_1)}{a_2y + (1 + a_1 - a_2)}.$$

Ответ:

$$z = \frac{1 - x}{1 + x}\frac{y(y + x)}{y - x}.$$

Нерешенная трудность: определение порядка подстановки.

Пример: решение при помощи пакета riccati.sage

```
sage: x,y,a1,a2=var('x,y,a1,a2')
sage: p=x^4 - 2*x^3*y + 2*x*y^3 + y^4 + 2*(x^2 - 1)*y^2
sage: q=x^2 + 2*x*y - y^2
sage: u=y*(y+a1)
sage: v=y*a2 +(1+a1-a2)
sage: J=riccati_ideal(x,y,p,q,[a1,a2],u,v)
sage: J.elimination_ideal(a2).gens()[0].factor()
(-1) * (-a1 + x) * (a1 + 1) * x^4 * (6*x^2 - 1)
sage: J.elimination_ideal(a1).gens()[0].factor()
a2 * x^4 * (6*x^2 - 1) * (a2*x - a2 + x + 1)
```

Прямое решение на схеме

Ключевой момент — отыскание сопряженных решений $y = g(x)$ и $y = g^*(x)$, которым соответствует одно и то же решение уравнения Риккати.
Разностная схема выглядит так

$$Q(y_n, y_{n+1}, x_n)\Delta y + P(y_n, y_{n+1}, x_n)\Delta x = 0$$

Уравнение

$$Q(y, y^*, x) = 0$$

задает связь между сопряженными решениями и в то же время легко угадывается.

Пример

(2,2) схема для ОДУ

$$(x^4 - 2x^3 y + 2x^2 y^2 + 2xy^3 + y^4 - y^2)dx + (x^2 + 2xy - y^2)dy = 0$$

имеет

$$Q = x_n^2 + x_n(y_n + y_{n+1}) - y_n y_{n+1}.$$

Следовательно, сопряженные решения связаны соотношением

$$x^2 + x(y + y^*) - yy^* = 0.$$

Это действительно так: из

$$\frac{1-x}{1+x}\frac{y(y+x)}{y-x} = z = \frac{1-x}{1+x}\frac{y^*(y^*+x)}{y^*-x}$$

получается

$$(x^2 + xy + xy^* - yy^*)(y - y^*) = 0$$

Заключение

Класс дифференциальных уравнений, выделенный в задаче, двойственной к задаче Дебона, удобен как для численного, так и символьного решения.

- Уравнения это класса сводятся к уравнению Риккати и решаются по методу конечных разностей без накопления ошибки при прохождения через подвижные особые точки.
- Символьное решение прочих ОДУ невозможно использовать для решения начальной задачи алгебраическим путем.
- Численное решение прочих ОДУ разваливается при переходе через особые точки.

Литература

- Малых М.Д. О трансцендентных функциях, возникающих при интегрировании дифференциальных уравнений в конечном виде // Записки научных семинаров ПОМИ. 2015. Т. 432. Стр. 196-223.
- Малых М.Д. О приближенном решении дифференциальных уравнений, общее решение которых зависит от константы алгебраически // Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика. 2015. № 3. С. 5-9.
- Малых М.Д. О дифференциальных уравнениях, общее решение которых является алгебраической функцией константы // Вестник НИЯУ МИФИ, 2016. Том 5, № 2. С. 152-161.
- Малых М.Д. Об отыскании рациональных интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений по методу М.Н. Лагутинского // Вестник НИЯУ МИФИ, 2016. Том 5, № 3, с. 35-44.

Конец

Вычисления выполнены при помощи SageMath version 7.3, Release Date: 2016-08-04.
Дополнительные материалы доступны на сайте автора: http://malykhmd.neocities.org.

http://malykhmd.neocities.org