

Курс математического анализа с точки зрения компьютерной алгебры

Мих. Дмитр. Малых* **

*Факультет наук о материалах МГУ.

**Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей РУДН.

`malykhmd@yandex.ru`

Компьютерная алгебра
Москва, 29 июня - 2 июля 2016.
Версия от 28 июня 2016 г.

Компьютерная алгебра в курсе Высшей математики

Семинарские занятия на 1-м курсе ВУЗов в значительной мере сосредоточены вокруг задач Компьютерной алгебры, в том числе:

- дифференцирование элементарных функций,
- интегрирование элементарных функций,
- вычисление пределов по правилу Лопиталья,
- интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений.

Современные CAS справляются с этими задачами лучше студентов.

Пример на Sage.

```
sage: var('x') 1
x 2
sage: diff(x^x,x) 3
x^x*(log(x) + 1) 4
sage: integral(x^3*3^x,x) 5
(x^3*log(3)^3 - 3*x^2*log(3)^2 + 6*x*log(3) 6
- 6)*e^(x*log(3))/log(3)^4
sage: limit(ln(x)/x,x=oo) 7
0 8
sage: y=function('y')(x) 9
sage: desolve(diff(y,x)==y,y) 10
_C*e^x 11
```

Опыт создания CAS

Тезис 1.

Проработка приемов решения задач, выполненная при создании CAS, дает курсу Анализа ценный методический материал.

Обычно знакомство студентов прикладных специальностей с CAS ограничивается применением WolframAlpha на уровне пользователя.

При создании CAS были подробно проработаны приемы, предлагаемые первокурсникам для решения этих задач. Однако этот опыт остался не востребованным в учебной литературе.

Интегрирование в элементарных функциях

В курсе Анализа предлагается два метода интегрирования элементарных функций — интегрирование подстановкой и по частям. Их практическому применению обучают на примерах, не дав общего алгоритма их применения.

В 1950-х годах в MIT при создании первого символьного интегратора SAINT (J. Slagle) оба эти метода были осмыслены как эвристический алгоритм, реализованный в виде программы на языке Lisp.

SAIT: интегрирование подстановкой

В SAIT подстановка не угадывается. Если подынтегральное выражение h **содержит** функцию f и, после сокращений, отношение

$$\frac{h(x)}{f'(x)}$$

содержит меньше непостоянных множителей, чем h , то следует попытаться сделать замену

$$y = f(x).$$

Пример

Задача. Вычислите

$$\int x e^{x^2} dx.$$

Решение. Подынтегральное выражение $x e^{x^2}$ имеет два множителя и содержит $f(x) = x^2$, отношение

$$\frac{x e^{x^2}}{2x} = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

содержит один непостоянный множитель, поэтому следует сделать подстановку

$$y = x^2.$$

Современные интеграторы

Опытным путем в 1960-х годах выяснилось, что критерий Сейджля дает слишком много ложных срабатываний, и от применения классических методов интегрирования отказались в пользу полузабытых тогда идей Лиувилля.

Вопросы.

- Можно ли дать первокурсникам понятие об «алгоритме Риша»?
- Должны ли интегрирование подстановкой и по частям играть столь важную роль в современном курсе Анализа?

Как дать понятие о работах Лиувилля?

Теорема

Если интеграл

$$\int p(x)e^{q(x)} dx, \quad p, q \in \mathbb{C}[x],$$

берется в элементарных функциях, то найдется такой многочлен r , что

$$\int p(x)e^{q(x)} dx = r(x)e^{q(x)} + C.$$

Для исследования интегралов

$$\int xe^x dx, \quad \int e^{x^2} dx$$

нужен только метод неопределенных коэффициентов.

Интегрирование в популярных CAS

Символьное интегрирование в CAS осложняется след. явлениями:

- разрывная первообразная (нет такого понятия в «теории»),
- своеобразии реализации алгоритма интегрирования рациональных функций,
- появление спецфункций, не известных первокурсникам,
- необходимость делать лишние предположения о параметрах, входящих в интеграл.

Затруднения CAS — ошибки студентов.

Пример: разрывная первообразная

$$\int_{x=0}^{8\pi} \frac{dx}{2 + \sin x} = \frac{8}{3} \sqrt{3} \pi \neq 0.$$

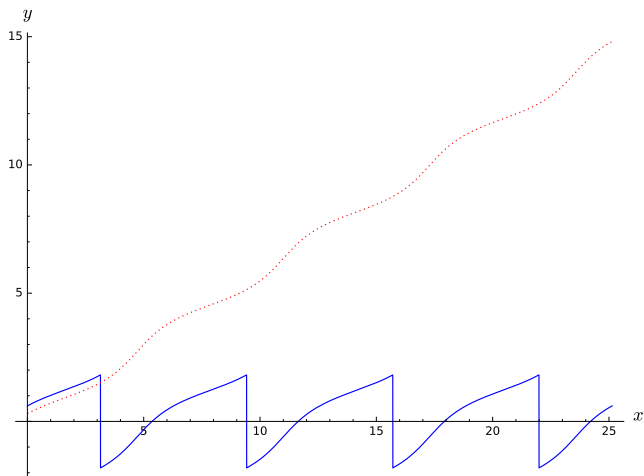
Первообразная в Sage:

$$\int \frac{dx}{2 + \sin x} = \frac{2}{3} \sqrt{3} \arctan \left(\frac{1}{3} \sqrt{3} \left(\frac{2 \sin(x)}{\cos(x) + 1} + 1 \right) \right)$$

Первообразная в Rubi:

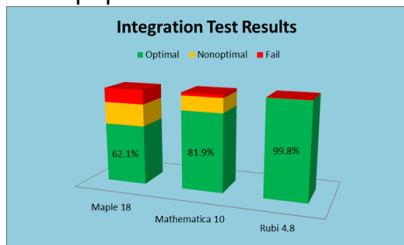
$$\int \frac{dx}{2 + \sin x} = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\cos x}{2 + \sqrt{3} + \sin x}$$

Графики двух первообразных



Замечание о Rubi

Rubi — Rule-based Mathematics Symbolic Integration Rules, Albert D. Rich — интересная альтернатива популярным символьным интеграторам, основанная на больших таблицах (правилах) интегрирования.



Доступна как надстройка для Mathematica:
<http://www.apmaths.uwo.ca/~arich/>


Пример: рациональные функции

Над каким полем реализован алгоритм интегрирования рациональных функций?


```
sage: integral(1/(x^2+2)^3,x) 12
3/64*sqrt(2)*arctan(1/2*sqrt(2)*x) + 13
    1/32*(3*x^3 + 10*x)/(x^4 + 4*x^2 + 4)
sage: integral(1/(x^5+x+2),x) 14
-1/6*integrate((x^3 - 2*x^2 + 3*x - 4)/(x^4 15
    - x^3 + x^2 - x + 2), x) + 1/6*log(x + 1)
```



Имеется ли способ решить эту задачу силами Sage без упоминания о полиномиальных кольцах?

Тот же пример в WolframAlpha


WolframAlpha computational knowledge engine

integral(1/(x^5+x+2),x) ☆ ☰



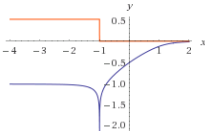
 Examples
  Random

Indefinite integral:

$$\int \frac{1}{x^5 + x + 2} dx = \frac{1}{6} \left(\log(x+1) - \sum_{\{\omega: \omega^4 - \omega^3 + \omega^2 - \omega + 2 = 0\}} \frac{-4 \log(-\omega + x) + 3 \omega \log(-\omega + x) - 2 \omega^2 \log(-\omega + x) + \omega^3 \log(-\omega + x)}{4 \omega^3 - 3 \omega^2 + 2 \omega - 1} \right) + \text{constant}$$

log(x) is the natural logarithm

Plots of the integral:



(x from -4 to 2)

— real part
— imaginary part

[Enable interactivity](#)

Как получить вещественную первообразную? Нужна ли она?

Примеры: спецфункции

В ответах иногда появляются спецфункции, студ. не известные.

```
sage: integral(exp(x^2), x) 16
```

```
-1/2*I*sqrt(pi)*erf(I*x) 17
```

```
sage: integral(1/sqrt(x^3+x+4), x) 18
```

```
integrate(1/sqrt(x^3 + x + 4), x) 19
```


Пример с параметром

Задача. При каких значениях a интеграл

$$\int \frac{(x - a)dx}{(x^2 + a)^3}$$

берется в рациональных функциях.

Попытка решения.

```
sage: var('a')
```

```
a
```

```
sage: integral((x-a)/(x^2+a)^3,x)
```

```
(...)
```

```
Is a positive or negative?
```

Как достучаться до алгоритма Остроградского?

Лекции и семинары

Тезис 2.

Символьные и численные методы решения задач в равной мере важны и должны дополнять друг друга.

На лекциях рассказывается теория, семинары же в существенном посвящены решению задач в символьном виде, то есть компьютерной алгебры.

Семинары не столько иллюстрируют лекционный курс, сколько на конкретных примерах стихийно научают элементам компьютерной алгебры на уровне «умений и навыков».

Пример 1.

Задача. Вычислите интеграл

$$\int_{x=0}^1 \frac{dx}{x^4 + 1}.$$

Эта типичная задача для интегрального исчисления, основным понятием которого является определенный интеграл, понятый как предел интегральных сумм.

Пример, ожидаемое решение.

Разложим дробь

$$\frac{1}{x^4 + 1}$$

на элементарные и возьмем от них интегралы по таблице,
ответ:

```
sage: integral(1/(x^4+1), (x, 0, 1))          20
1/8*sqrt(2)*pi + 1/8*sqrt(2)*log(sqrt(2) + 2) 21
      - 1/8*sqrt(2)*log(-sqrt(2) + 2)
```

Именно это решение ожидают получить на семинарах по
Аналізу. Какое отношение все это имеет к лекционному курсу
Анализа?

Пример, другое решение.

Порежем площадь по кривой на столбики и получим ответ:

```
sage: numerical_integral(1/(x^4+1), (0, 1))      22  
(0.8669729873399107, 9.625333722728231e-15)  23
```

При этом решении активно используются лекционный материал, в т.ч. понятие интегральной суммы и оценки сходимости.

Пример 2.

Задача. Вычислите интеграл

$$\int_{x=0}^1 \arcsin(\sin x) dx.$$

Даже если нарисовать график подынтегральной функции, студенты все равно станут искать элементарную первообразную.

Пример 2, Sage тоже ошибается.

```
sage: integral(arcsin(sin(x)),(x,0,pi))          24
1/2*pi^2                                         25
sage: integral(arcsin(sin(x)),(x,0,pi)).n()     26
4.93480220054468                               27
sage: numerical_integral(arcsin(sin(x)),(0,      28
    pi))
(2.4674011002723395, 2.736699755701011e-14)    29
```

Курс Анализа для НБ в РУДН

Курс Анализа для НБ читается два семестра (0.5 лекций + 1 семинар в неделю).

В нашем курсе Анализа понятие функции развивается постепенно:

- в первом семестре речь идет исключительно об элементарных функциях; дается определение этого понятия, описываются алгоритмы дифференцирования и интегрирования в элементарных функциях,
- во втором семестре обсуждаются функции, заданные рядами, основные понятия Анализа получают новое наполнение.

В качестве основной CAS используется Microsoft Mathematics.

Ссылки

Публикации:

- 1 С. А. Васильев, М. Д. Малых, Л. А. Севастьянов. Дифференциальное исчисление вместе с Microsoft Mathematics. – Москва : РУДН, 2015. ISBN 978-5-209-06428-2
- 2 С. А. Васильев, М. Д. Малых, Л. А. Севастьянов. Интегральное исчисление вместе с Microsoft Mathematics. – Москва : РУДН, 2015. ISBN 978-5-209-06429-9

Конспект доступен на <http://web-local.rudn.ru>:



Конец



© 2016 г., Михаил Дмитриевич Малых.

Текст доступен на условиях лицензии Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

Вычисления выполнены при помощи SageMath version 7.2, Release Date: 2016-05-15.

Дополнительные материалы доступны на сайте автора: <http://malykhmd.neocities.org>.



<http://malykhmd.neocities.org>