О символьном и численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка

Мих. Дмитр. Малых[*] [**]

[*]Факультет наук о материалах МГУ.

[**]Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей РУДН.

malykhmd@yandex.ru

19-е Международное совещание по компьютерной алгебре.
Дубна, 24-25 мая 2016.
Версия от 21 мая 2016 г.

Алгебраическая постановка задачи об интегрировании ОДУ

Задача (Florimond de Beaune, 1640-е г.)

Выяснить, являются ли решения заданного дифференциального уравнения

$$pdx + qdy = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y],$$

алгебраическими функциями x над $\mathbb{C}$.

Если да, то будет и интеграл вида

$$r(x, y) = C, \quad r \in \mathbb{Q}(x, y).$$

Задача не вводит новых трансцендентных функций.
Конструктивное решение было представлено на PCA'2016 [1].

Двойственная задача

Задача (Пенлеве, 1890)

Выяснить, допускает ли заданное уравнение

$$pdx + qdy = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$$

общее решение, которое зависит от константы алгебраически.

Если да, то будет и интеграл вида

$$r = \frac{\alpha_0(x)y^n + \ldots \alpha_n(x)}{\beta_0(x)y^n + \ldots \beta_n(x)},$$

где $\alpha_0(x), \ldots, \beta_n(x)$ — функции x, порождающие поле K, вообще говоря трансцендентное над $\mathbb{Q}[x]$.

Теорема Пенлеве

Базис тр. K над $k = \mathbb{Q}(x)$ — конечный набор тех тр. функций переменной x, которые нужно табулировать. Все решения выражаются через них алгебраически.

Теорема (Пенлеве, 1890 [2])

Ст. тр. K над $\mathbb{Q}[x]$ не превышает 3, а базис образован решениями уравнения Риккати.

Теорема допускает обобщение на случай систем ОДУ: базисом оказываются классические трансцендентные функции [3].

Сведение к уравнению Риккати

Теорема

Если общее решение дифференциального уравнения первого порядка

$$pdx + qdy = 0, \quad p, q \in k[y],$$

зависит от константы алгебраически, то существует и притом единственная *подстановка*

$$z = r(x, y), \quad r \in K(y),$$

которая переводит исходное уравнение в уравнение Риккати, а три произвольные функции из K — в другие три произвольные функции из K.

Поскольку подстановка — единственная, задача об ее отыскании должна быть линейной.

Пример

Уравнение:

$$(x^4 - 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 - y^2)dx + (x^2 + 2xy - y^2)dy = 0$$

Ищем подстановку 2-го порядка, оставляющая на месте $0, 1$ и ∞:

$$z = \frac{y(y + a_1)}{a_2y + (1 + a_1 - a_2)}.$$

Ответ:

$$z = \frac{1 - x}{1 + x}\frac{y(y + x)}{y - x}.$$

Нерешенная трудность: определение порядка подстановки.

Пример: решение при помощи пакета riccati.sage

```
sage: x,y,a1,a2=var('x,y,a1,a2')
sage: p=x^4 - 2*x^3*y + 2*x*y^3 + y^4 + 2*(x^2 - 1)*y^2
sage: q=x^2 + 2*x*y - y^2
sage: u=y*(y+a1)
sage: v=y*a2 +(1+a1-a2)
sage: J=riccati_ideal(x,y,p,q,[a1,a2],u,v)
sage: J.elimination_ideal(a2).gens()[0].factor()
(-1) * (-a1 + x) * (a1 + 1) * x^4 * (6*x^2 - 1)
sage: J.elimination_ideal(a1).gens()[0].factor()
a2 * x^4 * (6*x^2 - 1) * (a2*x - a2 + x + 1)
```

Затруднения

1. Определение порядка подстановки по заданному уравнению — нерешенная проблема ни для зачади Дебона [Chéze, 2015], ни для двойственной к ней задачи Пенлеве.
2. Для задачи Дебона вычисления удается проводить до $n \div 10$, для двойственной задачи уже при $n = 3$ вычисления по описанной схеме оказываются слишком трудными.

Соответствие между слоями

Зафиксируем две точки x_0 и x_1 на прямой Ox и рассмотрим начальную задачу:

$$?y|_{x=x_1} = y_1 : \quad \frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y|_{x=x_0} = y_0$$

Начальное значение y_0 и искомое конечное данное y_1 будем рассматривать как точки двух проективных прямых P_0 и P_1 (начальный и конечный слои).
Рациональный интеграл задает многозначное алгебраическое соответствие между начальным и конечным слоями.
Пример.

$$xdx + ydx = 0, \quad y|_{x=x_0} = y_0 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 = x_0^2 + y_0^2$$

Соответствие между слоями

Соответствие между прямыми P_0 и P_1 называется проективным типа (n, m), если

- на прямой P_0 имеется семейство M_0, элементами которого служат n-ки точек прямой P_0, причем каждая точка прямой попадает ровно в одну такую n-ку,
- на прямой P_1 имеется семейство M_1, элементами которого служат m-ки точек прямой P_1, причем каждая точка прямой попадает ровно в одну такую m-ку,
- рассматриваемое соответствие порождается взаимно-однозначным соответствием между M_0 и M_1.

Теорема Коши гарантирует проективность соответствия между слоями, но не его однозначность.

Дискретизация

При дискретизации задачи Коши важно не только аппроксимировать дифференциальное уравнение, но и сохранить алгебраические свойства решения.

Теорема

Если ОДУ имеет общее решение, зависящее от константы алгебраически, то начальная задача задает между слоями проективное (n, n)-соответствие.

Схемы, задающие проективное (n, n)-соответствие между слоями, лучше явных и неявных схем Эйлера тем, что они проходят через подвижные особые точки без существенного накопления ошибки [4].

Уравнение Риккати

Явная схема Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + (p_n y_n^2 + q_n y_n + r_n)\Delta x$$

для уравнения Риккати

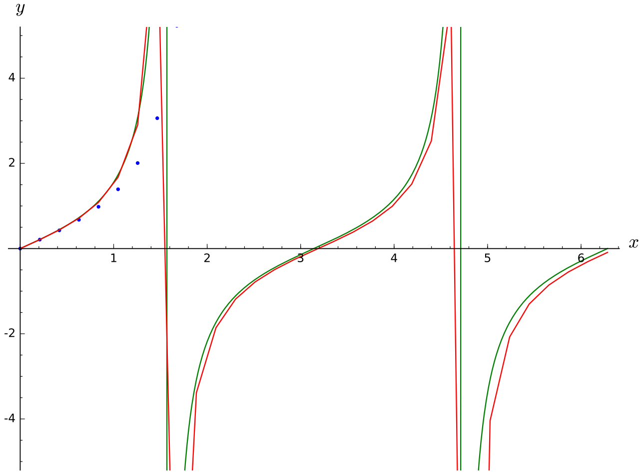
$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x).$$

задает $(1,2)$-соответствие между соседними слоями.
Вот другая схема

$$y_{n+1} = y_n + (p_n y_n y_{n+1} + q_n y_n + r_n)\Delta x,$$

задающая $(1,1)$-соответствие между слоями.

Пример: $y' = 1 + y^2, \quad y|_{x=0} = 0$



Синие точки — метод Эйлера, красная ломаная — $(1,1)$-схема.

Учебники: Эйлер $\to$ А.Н. Крылов $\to$ Н.Н. Калиткин

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = y_n + \frac{x_n^2 - y_n^2}{a^2}\Delta x$$

«Погрешность при этом вычислении происходит оттого, что на протяжении каждого отдельного промежутка обе переменные x и y считаются сохраняющими свои значения, соответствующие началу этого промежутка, так что и значение функции $f(x, y)$ остается постоянным, поэтому: чем быстрее значение этой функции меняется от одного промежутка к следующему, тем большую можно ожидать погрешность. Это невыгодное обстоятельство имеет место обыкновенно там, где значения $f(x, y)$ или уничтожаются, или же становятся бесконечно большими.» — Эйлер, цит. по [Крылов, 1933].

Построение проективных разностных схем

Задача

Выяснить, можно ли составить для заданного уравнения

$$pdx + qdy = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$$

проективную разностную (n, n)-схему.

Если общее решение зависит от константы алгебраически, то искомая схема существует.

- Можно ли обратить это утверждение? — При $n = 1$, да.
- Можно ли в этом случае составить схему за конечное число действий? — Да, если задано n можно воспользоваться алгоритмом сведения к уравнению Риккати.

К прямому решению задачи

Теорема

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad f \in \mathbb{Q}[x,y]$$

допускает симметричную проективную $(2,2)$-схему в том и только в том случае, когда имеется такая функция a от x, что

$$-(a+y)f(x,y) = yf(x,-a-y).$$

При этом сама схема имеет вид

$$(a+y_n+y_{n+1})\Delta y + (\dots)\Delta x = 0.$$

Пример.

$$\frac{dy}{dx} = py^3 + qy \quad \Rightarrow \quad a = 0.$$

Литература

- Малых М.Д. Об отыскании рациональных интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений по методу М.Н. Лагутинского // Вестник НИЯУ МИФИ, 2016. Том 5, № 3, с. 35-44.
- Малых М.Д. О дифференциальных уравнениях, общее решение которых является алгебраической функцией константы // Вестник НИЯУ МИФИ, 2016. Том 5, № 2. С. 152-161.
- Малых М.Д. О трансцендентных функциях, возникающих при интегрировании дифференциальных уравнений в конечном виде // Записки научных семинаров ПОМИ. 2015. Т. 432. Стр. 196-223.
- Малых М.Д. О приближенном решении дифференциальных уравнений, общее решение которых зависит от константы алгебраически // Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика. 2015. № 3. С. 5-9.

Конец

Вычисления выполнены при помощи `SageMath Version 7.1, Release Date: 2016-03-20`.
Дополнительные материалы доступны на сайте автора: http://malykhmd.neocities.org.

http://malykhmd.neocities.org